Заняття 21 Інтегральні лишки

N 4.79 Волк. Знайти лишки f відн. усіх ізол. особливих точок та ∞.

$f(z) = \frac{1}{z^3 - z^5}$.

Розвʼязок. Лишок $= C_{-1}$ в розкладі Лорана.

$z_1 = 0$ — полюс 3-го порядку

$z_2 = -1$, $z_3 = 1$ — полюси 1-го порядку

$z_4 = \infty$ — усувна особл. т. $\Rightarrow \cancel{\operatorname{res}_\infty f = 0}$

$z_1 = 0$: $f = \frac{1}{z^3} \frac{1}{1-z^2} = \frac{1}{z^3} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + \ldots$

$\Rightarrow \operatorname{res}_0 f = 1$

$z_2 = -1$: $f = \frac{\frac{1}{z^3} \cdot \frac{1}{1-z}}{1+z} = \frac{\varphi(z)}{1+z} \ominus / \varphi(z) \in A(O(z_0)) /$

$= \frac{\sum a_n (z+1)^n}{1+z} \Rightarrow \operatorname{res}_{-1} f = a_0 = \varphi(-1) = -\frac{1}{2}$

$z_3 = 1$: $f = \frac{\frac{1}{z^3} \cdot \frac{1}{1+z}}{1-z} = \frac{\varphi(z)}{1+z} \Rightarrow$ $\boxed{\begin{gathered} a \text{ – полюс 1-го п-ку} \Rightarrow \\ \operatorname{res}_a f = \lim_{z \to a} f(z)(z-a) \end{gathered}}$

$\operatorname{res}_1 f = \varphi(1) = \frac{1}{2}$

$\sum_{a_i} \operatorname{res} + \operatorname{res}_\infty = 0 \Rightarrow \operatorname{res}_\infty f = -1$

N 4.84 $f(z) = \frac{\sin 2z}{(z+1)^3}$ $\operatorname{res}_\infty - ?$

Розвʼязок $z_0 = -1$ — полюс 3-го порядку

$z_1 = \infty$ — ?

$z_0 = -1$: $\boxed{\begin{gathered} a \text{ – полюс } n\text{-го порядку} \Rightarrow \\ \operatorname{res}_a f = \lim_{z \to a} \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left(f(z)(z-a)^n \right) \end{gathered}}$

$\Rightarrow \operatorname{res}_{-1} f = \lim_{z \to -1} \frac{1}{2!} (\sin 2z)'' = \lim_{z \to -1} -2 \sin 2z = 2 \sin 2$

$\operatorname{res}_{-1} f + \operatorname{res}_\infty f = 0 \Rightarrow \operatorname{res}_\infty f = -2 \sin 2$.

N 4.90 1) $f(z) = \cos \frac{1}{z-2}$; 2) $f(z) = z^3 \cos \frac{1}{z-2}$.

Розвʼязок. 1) $z_1 = 2$ — істот. особл. точка

$\cos \frac{1}{z-2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)! \, (z-2)^{2k}} = 1 - \frac{1}{2(z-2)^2} + \ldots \Rightarrow \operatorname{res}_2 f = 0$

$z_2 = \infty$ — усувна, $\cancel{\Rightarrow}$ $\operatorname{res}_\infty f = 0$

2) $f(z) = z^3 \cos \frac{1}{z-2} = ((z-2)^3 + 6(z-2)^2 + 12(z-2) + 8) \cos \frac{1}{z-2}$

$\Rightarrow (z-2)^{-1}: 1 \cdot \frac{1}{4!} + 12 \cdot \left(-\frac{1}{2!}\right) = -\frac{143}{24} \Rightarrow$

$\operatorname{res}_2 f = -\frac{143}{24}$, $\operatorname{res}_\infty f = \frac{143}{24}$.

$\boxed{\text{№4.96}}$ $f(z)=z^n \sin\frac{1}{z}$, n – цілі

Розвʼязок. $z_1=0$ – істот. особл. т.

$f(z)=z^n\cdot\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!\,z^{2k+1}}$ ⇒

якщо n – непарне ⇒ $\operatorname{res}\limits_0 f=0$

якщо n ~~парне~~ <0 ⇒ $\operatorname{res}\limits_0 f=0$

якщо n – парне, $n\geq 0$, то $\operatorname{res}\limits_0 f=\frac{(-1)^m}{(2m+1)!}$
$n=2m$

$\operatorname{res}\limits_\infty f=-\operatorname{res}\limits_0 f$.

$\boxed{\text{№4.116}}$ Обчислити інтеграли, використ. теорему про лишки.

$J=\int\limits_C\frac{z\,dz}{(z-1)(z-2)^2}$, C – коло $|z-2|=\frac{1}{2}$.

Розвʼязок. $J=2\pi i\sum\limits_{i=1}^{n}\operatorname{res}\limits_{z_i}\frac{z}{(z-1)(z-2)^2}$, де

z_i – ізол. особл. точки f, які охоплюються контуром C

$\Rightarrow J=2\pi i\operatorname{res}\limits_2\frac{z}{(z-1)(z-2)^2}=$ / $z_0=2$ – полюс крат. 2 /

$=\lim\limits_{z\to 2}2\pi i\left(\frac{z}{z-1}\right)'=2\pi i\lim\limits_{z\to 2}-\frac{1}{(z-1)^2}=-2\pi i$

$\boxed{\text{№4.117}}$ $J=\int\limits_C\frac{dz}{(z-3)(z^5-1)}$, C – коло $|z|=2$.

Розвʼязок. Особл. точки: $\tilde{z}_1=3$, $z^5=1\Rightarrow z_k=e^{\frac{2\pi k i}{5}}$, $k=\overline{0,4}$ – полюси кратн. 1

$\Rightarrow J=2\pi i\sum\limits_{k=0}^{4}\operatorname{res}\limits_{z_k}f$ $=$ де $f=\frac{1}{(z-3)(z^5-1)}$

$=-2\pi i\left(\operatorname{res}\limits_3 f+\operatorname{res}\limits_\infty f\right)=$ / $\tilde{z}_1=3$ – простий полюс, $z=\infty$ – усувна /

$=-2\pi i\left(\operatorname{res}\limits_3 f+0\right)=-2\pi i\cdot\frac{1}{3^5-1}=-\frac{\pi i}{121}$

$\boxed{\text{№4.123}}$ $J=\int\limits_{|z|=3}(1+z+z^2)\left(e^{1/z}+e^{1/(z-1)}+e^{1/(z-2)}\right)dz$

Розвʼязок $J=2\pi i\left(\operatorname{res}\limits_0 f+\operatorname{res}\limits_1 f+\operatorname{res}\limits_2 f\right)$

$\operatorname{res}\limits_0 f=1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}$,

$\operatorname{res}\limits_1 f=$ / $\left((z-1)^2+3(z-1)+3\right)\left(1+\frac{1}{z-1}+\frac{1}{2(z-1)^2}+\frac{1}{6(z-1)^3}\ldots\right)$

$=3+\frac{3}{2}+\frac{1}{6}=\frac{14}{3}$

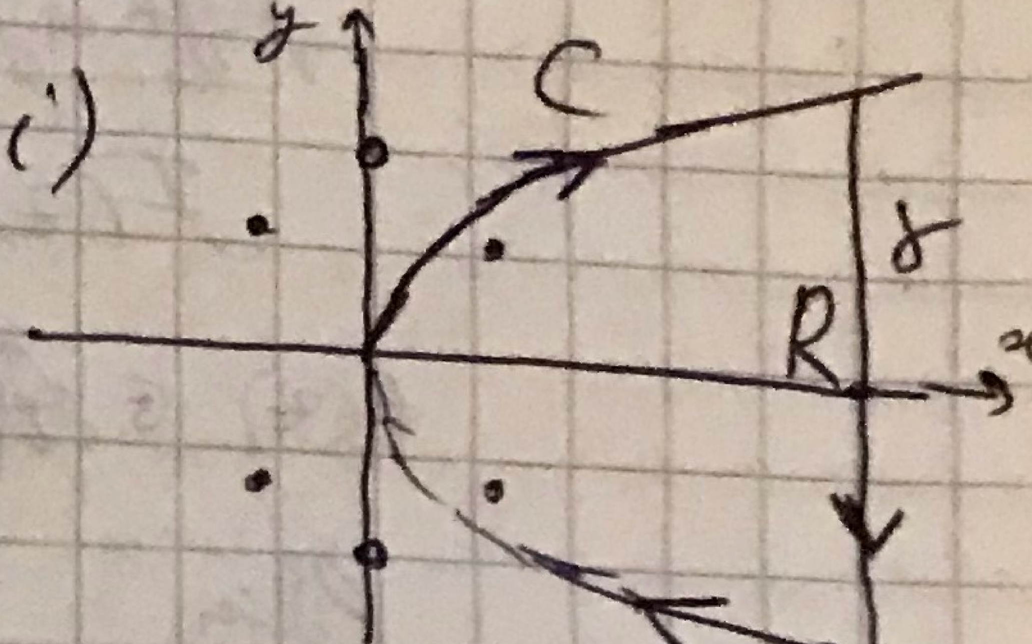
$\operatorname{res}\limits_2 f=$ / $\left((z-2)^2+5(z-2)+7\right)\left(1+\frac{1}{z-2}+\frac{1}{2(z-2)^2}+\frac{1}{6(z-2)^3}\ldots\right)$

$=7+\frac{5}{2}+\frac{1}{6}=\frac{29}{3}$ $\Rightarrow J=2\pi i\left(\frac{5}{3}+\frac{14}{3}+\frac{29}{3}\right)=32\pi i$

$\boxed{№4.128}$ Обчислити $J=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{dz}{(z^4+1)\sqrt{z^2+1}}$ $(\sqrt{1}=1)$,

де C — парабола $y^2=x$, що обходиться в напрямку зростання y.

Розв'язок. Особл. точки $z_{1,2}=\frac{1}{\sqrt{2}}(1\pm i)$



$z_{3,4}$ — зовні замкн. контура $\Gamma_R=C_R\cup\gamma_R$, де $R>\frac{1}{\sqrt{2}}$.

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_R} f(z)\,dz=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_R} f(z)\,dz-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\sqrt{R}}^{\sqrt{R}} f(R+iy)\,i\,dy = J_1+J_2 \overset{(*)}{=} \operatorname*{res}_{z_1} f+\operatorname*{res}_{z_2} f$$

$$|J_2|\le\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\sqrt{R}}^{\sqrt{R}}\frac{|dz|}{|z^4+1||\sqrt{z^2+1}|}\le\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\sqrt{R}}^{\sqrt{R}}\frac{dy}{(R^4+1)\sqrt{R^2-1}}=$$

$$=\frac{2\sqrt{R}}{2\pi i(R^4-1)\sqrt{R^2-1}}\longrightarrow 0 \text{ при } R\to\infty$$

У рівності $(*)$ робимо граничний перехід

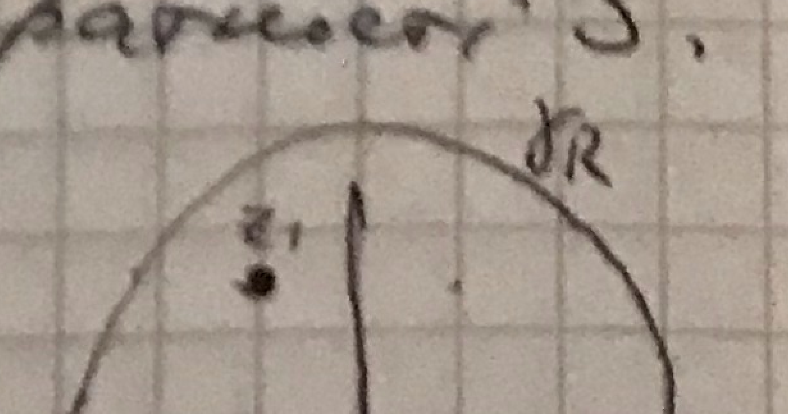
$$\Rightarrow J=\operatorname*{res}_{z_1} f+\operatorname*{res}_{z_2} f=\operatorname*{res}_{\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)} f+\operatorname*{res}_{\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)} f=$$

$$=\frac{1}{4z_1^3\sqrt{z_1^2+1}}+\frac{1}{4z_2^3\sqrt{z_2^2+1}}=\frac{1}{4}\sqrt{1+\sqrt{2}}$$

$\boxed{№4.140}$ Обчислити інтеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x\,dx}{(x^2+4x+13)^2}$.

Розв'язок. $f(z)=\frac{z}{(z^2+4z+13)^2}$ $z=\infty$ — ~~полюс~~ нуль кратності 3.

$z^2+4z+13=0 \Rightarrow z_{1,2}=-2\pm3i\notin Ox$



f має функ. полюс крат. 2 у верхній півплощині $z=-2+3i$

$\gamma_R: z=Re^{i\varphi},\ 0\le\varphi\le\pi$ $\quad R\cdot\max\limits_{z\in\gamma_R}|f(z)|\to 0$ при $R\to+\infty$

~~За лемою Жордана~~

$$\Rightarrow\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx=2\pi i\operatorname*{res}_{-2+3i} f(z)=2\pi i\lim_{z\to-2+3i}\left(f(z)(z+2-3i)^2\right)'$$

$$=2\pi i\lim_{z\to-2+3i}\left(\frac{z}{(z+2+3i)^2}\right)'=\frac{\pi}{27}.$$

$\boxed{N\ 4.149}$ Використ. лему Жордана, обч. інтегр.

1) $I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\cos x}{x^2-2x+10}\,dx$; 2) $I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin x}{x^2-2x+10}\,dx$.

<u>Розв'язок.</u> $I = I_1 + i I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x e^{ix}}{x^2-2x+10}\,dx$.

$F(z) = \frac{e^{iz}\cdot z}{z^2-2z+10} = e^{iz} f(z)$.

$z^2-2z+10=0$

$z_{1,2} = 1 \pm 3i$

$f(z) \in A$(верхня півпл.) $\setminus \{z_1, \cancel{z_2}\}$

$\lim\limits_{|z|\to\infty} f(z) = 0 \Rightarrow$ викон. всі умови леми Жордана $\Rightarrow I = 2\pi i \frac{z_1 e^{iz_1}}{z_1 - z_2} = 2\pi i \frac{(1+3i)e^{i(1+3i)}}{6i} =$

$= \frac{\pi}{3}(1+3i)e^{-3+i} = \frac{\pi}{3}(1+3i)e^{-3}(\cos 1 + i\sin 1)$

$\Rightarrow I_1 = \frac{\pi}{3e^3}(\cos 1 - 3\sin 1)$

$I_2 = \frac{\pi}{3e^3}(3\cos 1 + \sin 1)$