~~Заняття 20~~. ~~Ряди Лорана~~
Класифікація особливих точок.

$\boxed{N\,4.19\text{ Волк.}}$ З'ясувати, чи допускають вказані функції розклад в ряд Лорана в околі даної точки.

1) $f(z)=\cos\frac{1}{z}$, $z_0=0$

Розв'язок f допускає розклад в ряд Лорана якщо f – однозн в окол z_0, та z_0 – ізол. особл. точка.

$\cos\frac{1}{z}$ – однозн., z_0 – ізольов $\Rightarrow \exists$ розклад в ряд Лоран.

2) ~~$f(z)=\cos\frac{1}{z}$~~ $f(z)=\cos\frac{1}{z}$, $z_0=\infty$
Розв'язок.
$\zeta=\frac{1}{z}$ $g(\zeta)=f\left(\frac{1}{\zeta}\right)=\cos\zeta$ – однозн, ~~непер~~
$\zeta_0=0$ – усувна особл. т, ізольов.
$\Rightarrow \exists$ розклад Лоран в окол ∞.

3) $f(z)=\dfrac{1}{\cos\frac{1}{z-1}}$, $z_0=1$
Розв'язок. f – однозн.
ізол.? $\cos\frac{1}{z-1}=0 \Rightarrow z-1=\dfrac{1}{\frac{\pi}{2}+\pi k}$ $k\in\mathbb{Z}$ $\Rightarrow$
$\Rightarrow z_k=1+\dfrac{1}{\frac{\pi}{2}+\pi k}$, $k\in\mathbb{Z}$
$z_k\to 1$ при $k\to\infty$ $\Rightarrow z_0=1$ не ізольов.
$\Rightarrow \nexists$ розкладу Лорана в ~~окол~~ точці 1.

7) $f(z)=\dfrac{z}{\sin z-3}$, $z_0=\infty$
Розв'язок. $\sin z-3=0 \Rightarrow e^{iz}-e^{-iz}-6i=0$
$e^{2iz}-6ie^{iz}-1=0$ $e^{iz}=\dfrac{6i\pm\sqrt{32}i}{2}=3\pm 2\sqrt{2}i$
$\Rightarrow iz=\mathrm{Ln}(i(3\pm2\sqrt{2}))=\ln(3\pm2\sqrt{2})+i\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)$.
$z_k=\frac{\pi}{2}+2\pi k-i\ln(3\pm2\sqrt{2})\to\infty$ при $k\to\infty$
$\Rightarrow z_0=\infty$ не ізольов. $\Rightarrow \nexists$ розкладу в ряд Лорана.

8) $f(z)=\ln z$, $z_0=0$
Розв'язок. $\ln z=\ln|z|+i\arg z$
$\ln z_0=\ln|z_0|+i\varphi_0$ (до обходу)
$=\ln|z_0|+i(\varphi_0+2\pi)$ (після обходу т. $z_0=0$)
$\Rightarrow [\ln z]_{z_0=0}=2\pi i$ $\Rightarrow \ln z$ – не однозн. в околі т. $z_0=0$
$\Rightarrow$ неможливий розклад в ряд Лорана.

10) $f(z) = \frac{z-1}{z+i}$, $z_0 = \infty$.

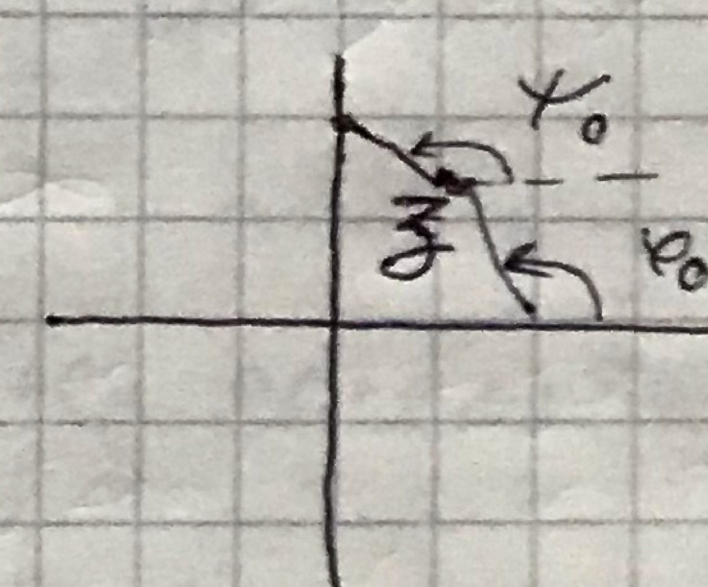
Розвʼязок. $\ln\frac{z-1}{z+i} = \ln\left|\frac{z-1}{z+i}\right| + i\arg\frac{z-1}{z+i} =$

$= \cancel{\ln\left|\frac{z-1}{z+i}\right| + i\left(Arg(z-1) - Arg(z+i)\right)}$

$= \left| \begin{matrix} \zeta = \frac{1}{z} \\ \zeta_0 = 0 \end{matrix} \right| = \ln\left|\frac{1-\zeta}{1+i\zeta}\right| + i\arg\left(\frac{1-\zeta}{1+i\zeta}\right) =$

$= \ln\left|\frac{1-\zeta}{1+i\zeta}\right| + i\left(Arg(1-\zeta) - Arg(1+i\zeta)\right) =$

$= \ln\left|\frac{1-\zeta}{1+i\zeta}\right| + i\left(\underbrace{Arg(1-\zeta)}_{\varphi_0} - \underbrace{Arg(-i+\zeta)}_{\psi_0} - \frac{\pi}{2}\right) =$



До обходу:

$\ln\left|\frac{1-\zeta}{1+i\zeta}\right| + i(\varphi_0 - \psi_0) - i\frac{\pi}{2}$

Після обходу:

$\ln\left|\frac{1-\zeta}{1+i\zeta}\right| + i(\varphi_0 - \psi_0) - i\frac{\pi}{2} \Rightarrow [f(z)]_{\zeta_0} = 0$

$\Rightarrow f$ — однозн. в околі $\zeta_0 = 0$,

$\Rightarrow$ може бути розкладена в ряд Лорана.

Класиф. особливих точок.

$\boxed{№ 4.23}$ Знайти особливі точки, зʼясувати їх характер та дослід. поведінку функції на нескінченності

$f(z) = \frac{1}{z - z^3}$

Розвʼязок. $\underbrace{z_0 = 0,\ z_1 = -1,\ z_2 = 1}_{\text{полюси 1-го порядку}}$, $z_3 = \infty$

$\lim_{z\to\infty} f(z) = 0 \Rightarrow z_3 = \infty$ — усувна особл. точка

$\boxed{№ 4.25}$ $f(z) = \frac{z^5}{(1-z)^2}$

Розвʼязок. $z_1 = 1$ — полюс ~~кратності~~ порядку 2

$z_2 = \infty$ — полюс порядку 3.

$\boxed{N 4.30}$ $f(z) = \frac{1}{e^z - 1} - \frac{1}{z}$

Розвʼязок. $z_0 = 0$: ~~$e^z - 1 \neq 0$, ⇒ полюс 1-го пор.~~

$e^z = 1 \Rightarrow z_k = \mathrm{Ln}\,1 = \ln 1 + 2\pi i k, \; k \in \mathbb{Z}$

$z_k = 2\pi i k, \; k \in \mathbb{Z}$ — полюси 1-го порядку

$$\lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{z\to 0} \frac{1}{z + \frac{z^2}{2} + o(z^2)} - \frac{1}{z} =$$

$$= \lim_{z\to 0} \frac{1}{z}\left(\frac{1}{1 + \frac{z}{2} + o(z)} - 1\right) = \lim_{z\to 0} \frac{-z/2 + o(z)}{z} = -\frac{1}{2}$$

$\Rightarrow z_0 = 0$ — усувна особлива точка.

~~$z = \infty$: $z = \frac{1}{\zeta}$ $\lim_{z\to\infty} f(z)$~~ $z = \frac{1}{\zeta}$; ~~$f\left(\frac{1}{\zeta}\right) = \frac{1}{1 + \frac{1}{\zeta} + o(\ldots)}$~~

~~$\boxed{N 4.38}$ $f(z) = e^{z - \frac{1}{z}}$~~

$z = \infty$: $\lim_{z\to\infty} f(z) = 0 \Rightarrow$ усувна особл. точка.

$\boxed{N 4.38}$ $f(z) = e^{z - \frac{1}{z}}$.

Розвʼязок. $z_0 = 0, \; z_1 = \infty$.

$z_0 = 0$: $\lim\limits_{z\to +0} e^{z - \frac{1}{z}} = 0$ (дійсно знач. вздовж дійсної осі)

$\lim\limits_{z\to -0} e^{z - \frac{1}{z}} = +\infty \Rightarrow$

$\exists$ два різних граничних значення $\Rightarrow$
$z = 0$ — істотно особлива точка.

$z_1 = \infty$: $z_n' = 2\pi n \Rightarrow f(z_n') \to +\infty$
$z_n'' = 2\pi n i \Rightarrow f(z_n'') =$

$$= e^{2\pi n i + \frac{i}{2\pi n}} = \cos\left(2\pi n + \frac{1}{2\pi n}\right) + i \sin\left(2\pi n + \frac{1}{2\pi n}\right) =$$

$$= \cos\left(\frac{1}{2\pi n}\right) + i \sin\left(\frac{1}{2\pi n}\right) \to 1 \Rightarrow$$

$z_1 = \infty$ — істотно особлива точка.

$\boxed{N 4.55}$ $f(z) = e^{\operatorname{ctg} \frac{1}{z}}$.

Розвʼязок. $z_0 = 0, \; z_1 = \infty, \; z_k = \frac{1}{\pi k}, \; k \in \mathbb{Z}, \; k \neq 0$

$z_k \to 0 \Rightarrow z_0 = 0$ — істот. особл. точка

$z = \infty$: $f \to e^{\pm\infty} = \begin{cases} \infty \\ 0 \end{cases} \Rightarrow \nexists \lim\limits_{z\to\infty} f(z)$

$\Rightarrow$ істот. особл. т.

$\lim\limits_{z\to z_k \pm 0} f(z) = \begin{cases} \infty \\ 0 \end{cases} \Rightarrow z_k$ — істот. особл. точки

$\boxed{№4.71}$ Побудувати приклади функцій, що мають в розширеній площині тільки наступні властивості:

1) Полюс 2-го порядку на нескінченності

2) полюс 2-го порядку в т. $z=0$ з головною частиною розкладу $\frac{c_{-2}}{z^2}$ та простий полюс на нескінченності

Д/З №4.19, 4.20, 4.33, 4.45, 4.47, 4.69,
4.72, 4.78, ~~4.79, 4.84, 4.90~~,