Заняття 19. Ряд Тейлора. Ряд Лорана

$\boxed{№ 11.17}$ Євградов 4) Знайти розклад в ряд Тейлора в околі $z=0$ ф-ії $f(z)$, регулярної в т. $z=0$ та що задов. умовам $f''(z)+zf(z)=0$, $f(0)=1$, $f'(0)=0$.

Розв'язок. $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, $f'(z)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n n z^{n-1}$

$f(0)=1 \Rightarrow c_0=1$, $f'(0)=0 \Rightarrow c_1=0$.

$f''(z)=\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)z^{n-2}\cdot c_n$, $zf(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{n+1}$.

$\Rightarrow f''(z)+zf(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)z^n c_{n+2}+c_0 z+\sum_{n=2}^{\infty} c_{n-1} z^n=$

$=c_0 z+\sum_{n=2}^{\infty}((n+2)(n+1)c_{n+2}+c_{n-1})z^n+$

$+2c_2+6c_3 z=$

$=2c_2+\sum_{n=1}^{\infty}((n+2)(n+1)c_{n+2}+c_{n-1})z^n=0$

$\Rightarrow (n+2)(n+1)c_{n+2}+c_{n-1}=0$, $n=\overline{1,\infty}$

$$\begin{cases} c_0=1, \ c_1=0 \\ c_{n+2}=-\dfrac{c_{n-1}}{(n+2)(n+1)} \end{cases} \Rightarrow c_3=-\frac{1}{2\cdot3}, \ c_4=0, \ c_5=0,$$

$$c_6=\frac{\frac{1}{6}}{6\cdot5}=\frac{1}{2\cdot3\cdot5\cdot6}=\frac{1}{180}$$

$$c_{3k}=\frac{(-1)^k}{2\cdot3\cdot5\cdot6\ldots(3k-1)3k}$$

$\boxed{№ 11.22}$ Нех. $f(z)$ – регулярна в околі $z=0$ та $f(z)=z+f(z^2)$, $f(0)=0$. Довести, що $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n}$.

◄ Нех. $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, $f(0)=0 \Rightarrow c_0=0$

$z+f(z^2)=z+\sum_{n=1}^{\infty} c_n z^{2n}=z+c_1z^2+c_2z^4+\ldots+c_nz^{2n}+\ldots=$

$=c_1z+c_2z^2+\ldots+c_nz^n+\ldots$

$\Rightarrow c_1=1, \ c_2=1, \ c_3=0, \ c_4=1 \Rightarrow$

$$c_n=\begin{cases} 1, & n=2^k, \ k\in\mathbb{N} \\ 0, & n\neq 2^k \end{cases} \Rightarrow f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n} ►$$

$\boxed{№ 3.87}$ Волков. Розкласти в ряд по степеням $(z-1)$ та знайти радіус збіжності

$f(z)=\sin(2z-z^2)$. $z_0=1$. $f(z)=|\zeta=z-1|=\sin((\zeta+1)(1-\zeta))=$

Розв'язок.

$=\sin(1-\zeta^2)=\sin1\cos\zeta^2-\cos1\cdot\sin\zeta^2=\sin1\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\zeta^{4n}}{(2n)!}-$

$-\cos1\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\zeta^{4n+2}}{(2n+1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin\left(1-\frac{n\pi}{2}\right)\zeta^{2n}}{n!}=$

$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin\left(1-\frac{n\pi}{2}\right)}{n!}(z-1)^{n}$. $R=\infty$.

$\boxed{№ 3.93}$ Розкласти по степеням z ф-ію $\ln(1+e^z)$.
(знайти рекурентне співвідн. між коеф.)

Розв'язок. $f'(z) = \frac{e^z}{1+e^z} = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots + c_n z^n + \dots$

$\Rightarrow 1 + z + \frac{z^2}{2} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots = (2 + z + \frac{z^2}{2} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots)(c_0 + c_1 z + \dots + c_n z^n + \dots)$

$\Rightarrow 1 = 2c_0 \Rightarrow c_0 = \frac{1}{2}$

$1 = 2c_1 + c_0 \Rightarrow c_1 = +\frac{1}{4}$, $c_2 = 0$, $c_3 = -\frac{1}{48}$

$\dots$

$\frac{1}{n!} = 2c_n + c_{n-1} + \frac{c_{n-2}}{2!} + \dots + \frac{c_1}{(n-1)!} + \frac{c_0}{n!}$

$2c_n n! + c_{n-1} n! + \frac{c_{n-2} n!}{2!} + \dots + c_1 n + c_0 = 1$, $n \geq 1$

$\Rightarrow f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} z^{n+1} + \underset{\ln 2}{\underset{\shortparallel}{A_0}} = \ln 2 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{8} - \frac{z^4}{192} + \dots$

Покажемо, що коеф. при непар степ. ≥ 1
$c_{2n+1} = 0$, $n \geq 1$:

$\ln(e^z+1) - \ln(e^{-z}+1) = \ln\left(\frac{(e^{\frac{z}{2}} + e^{-\frac{z}{2}})e^{z/2}}{(e^{-z/2} + e^{z/2})e^{-z/2}}\right) =$
$= \ln e^z = z$

Розгл. $g(z) = \ln(1+e^z) - \frac{z}{2}$

$g(-z) = \ln(1+e^{-z}) + \frac{z}{2} = \ln(1+e^z) - z + \frac{z}{2} = g(z)$

$-$ парна $\Rightarrow g(z)$ має тільки парні доданки розкладу $\Rightarrow c_{2n+1} = 0$, $n \geq 1$.

Ряди Лорана.

$\boxed{№ 4.3\ \text{Воле}}$ Розкласти $f(z)$ в ряд Лорана у вказ. кільці або в околі вказ. точки. Визначити область, в якій має місце розклад.

$f(z) = \frac{1}{z(1-z)}$ в околі точок $z=0$, $z=1$, $z=\infty$.

Розв'язок. $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$, $c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(t)}{(t-z_0)^{n+1}} dt$.

$z_0 = 0$: $f(z) = \frac{1}{z} + \frac{1}{1-z} = \frac{1}{z} + 1 + z + z^2 + \dots + z^n$, $|z|<1$
— полюс 1-го поряд

$z_0 = 1$: $f(z) = \frac{1}{1-z} + \frac{1}{1+(z-1)} = -\frac{1}{z-1} + 1 - (z-1) + (z-1)^2 - \dots$
$|z-1|<1$
— полюс порядку 1.

$z_0 = \infty$: $f(z) = \frac{1}{z} - \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \frac{1}{z} - \frac{1}{z}\left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \dots + \frac{1}{z^n} + \dots\right)$

Заміна $\zeta = \frac{1}{z} \Rightarrow \zeta_0 = 0$, ~~$g(\zeta) = f(\frac{1}{\zeta})$~~ ~~$g(\zeta) = f(\frac{1}{\zeta})$~~.

$f(\frac{1}{\zeta}) = \zeta - \zeta(1 + \zeta + \zeta^2 + \dots + \zeta^n + \dots) = -\zeta^2 - \zeta^3 - \dots - \zeta^{n+1} - \dots$
$\Rightarrow \zeta_0 = 0$ — усувна особл. точка

$\boxed{N4.7}$ $f(z)=\sqrt{(z-a)(z-b)}$, $(|b|\geq|a|)$ в околі $z=\infty$.

Розв'язок. $f(z)=z\cdot\left(1-\frac{a}{z}\right)^{1/2}\left(1-\frac{b}{z}\right)^{1/2}=$

$=\pm\left(z-\frac{1}{2}(a+b)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{z^n}\right)$, де

$c_{-(n-1)}=(-1)^n\left(C_n^{1/2}b^n+C_{n-1}^{1/2}\cdot C_1^{1/2}b^{n-1}a+C_{n-2}^{1/2}\cdot C_2^{1/2}b^{n-2}a^2+\ldots+\right.$

$\left.+C_n^{1/2}a^n\right)$ зб. при $|z|>|b|$,

$C_n^{1/2}=\frac{(2n-1)!!}{2^n\cdot n!}$

$\boxed{N4.9}$ $f(z)=z^2e^{1/z}$ в околі точок $z=0$ та $z=\infty$.

Розв'язок. $z_0=0$: $f(z)=z^2\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!\,z^2}+\ldots+\frac{1}{n!\,z^n}+\ldots\right)$

$=z^2+z+\frac{1}{2!}+\frac{1}{6z}+\ldots+\frac{1}{n!\,z^{n-2}}+\ldots$ — істот. особл. т.

$z_0=\infty$ $f(z)=z^2+z+\frac{1}{2}+\frac{1}{6z}+\ldots+\frac{1}{n!\,z^{n-2}}+\ldots$ — зб. при $0<|z|<\infty$

$\zeta=\frac{1}{z}$, $\zeta_0=0$ $f\left(\frac{1}{\zeta}\right)=\frac{1}{\zeta^2}+\frac{1}{\zeta}+\frac{1}{2}+\frac{\zeta}{6}+\ldots+\frac{\zeta^{n-2}}{n!}+\ldots$

$\Rightarrow$ $\zeta_0=0$ — полюс 2-го порядку

$\Rightarrow$ $z_0=\infty$ — полюс 2-го порядку для $f(z)$.

$\boxed{N4.12}$ $f(z)=z^2\sin\frac{1}{z-1}$ в околі точки $z=1$

Розв'язок. Заміна $\zeta=z-1$ $\zeta_0=0$

$f(\zeta+1)=(\zeta+1)^2\sin\frac{1}{\zeta}=(\zeta^2+2\zeta+1)\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\left(\frac{1}{\zeta}\right)^{2n+1}}{(2n+1)!}$

— зб. при $0<|\zeta|<\infty$
$0<|z-1|<\infty$

Євграфов	Волков
Д/З N 11.16, 11.17 б),	N 3.94, 3.95 [illegible]
	N 3.121, 3.123, 4.4, 4.5
	4.11, 4.15