Заняття 18   Ряд Тейлора.

$$c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz$$

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots$$

$$e^{az} = 1 + az + \frac{a^2z^2}{2} + \ldots + \frac{a^n z^n}{n!} + \ldots$$

$$\sin az = az - \frac{a^3z^3}{6} + \frac{(az)^5}{5!} + \ldots + (-1)^n \frac{(az)^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots$$

$$\cos az = 1 + \frac{(az)^2}{2} - \frac{(az)^4}{24} + \ldots + (-1)^n \frac{(az)^{2n}}{(2n)!} + \ldots$$

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \ldots + z^n + \ldots$$

$$\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \ldots + (-1)^n \frac{z^n}{n} + \ldots$$

$$(1+z)^\alpha = 1 + \alpha z + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} z^2 + \ldots +$$

N 11.02 (Євр.) 1) Знайти розклад Тейлора для $\cos\sqrt{z}$ в т. $z_0 = 0$

<u>Розв'язок.</u> $\cos\sqrt{z} = 1 + \frac{z}{2} - \frac{z^2}{24} + \ldots + (-1)^n \frac{z^n}{(2n)!} + \ldots$

N 11.03 Використовуючи розклад для $\frac{1}{1-z}$, знайти розклад Тейлора при $|z|<1$ для

$$f(z) = \frac{1}{(1+z)^3}$$

<u>Розв'язок.</u> $\frac{1}{(1+z)^3} = \left(\frac{1}{1+z}\right)'' \cdot \frac{1}{2} =$

$= \frac{1}{2}\left(1 - z + z^2 - z^3 + \ldots + (-1)^n z^n + \ldots\right)'' =$

$= \frac{1}{2}\sum\limits_{n=0} (-1)^n (n+1)(n+1) z^n.$

N 11.04 2) Знайти розклад $f(z)$ в ряд Тейлора в околі т. $z=0$, де $f(z) = \frac{1}{(1-z^2)^2}$.

<u>Розв'язок.</u> заміна $\zeta = z^2$ $f(z) = g(\zeta) = \frac{1}{(1-\zeta)^2} = +\left(\frac{1}{1-\zeta}\right)' =$

$= +\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} \zeta^n\right)' = +\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\zeta^{n-1} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n z^{2n-2} =$

$= \sum\limits_{n=0}^{\infty} (n+1) z^{2n}.$

N 11.05 2) Розкласти в ряд Тейлора в околі т. $z=0$

$$f(z) = \frac{2z-5}{z^2-5z+6}$$

<u>Розв'язок.</u> $f(z) = \frac{1}{z-2} + \frac{1}{z-3} \overset{\text{(МНК)}}{=}$

$= \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{3^{n+1}}\right) z^n.$

$\boxed{N11.06}$ 3) Розкласти в ряд Тейлора в околі т. $z=0$

$$f(z)=\frac{1}{(1+z)(1+z^2)(1+z^4)}.$$

Розв'язок. $f(z)=\frac{1-z}{1-z^8}=(1-z)\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^{8n}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(z^{8n}-z^{8n+1})=$

$=\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, де $a_n=\begin{cases}1, & n=8k\\ -1, & n=8k+1\\ 0, & n\neq 8k,\ n\neq 8k+1.\end{cases}$

$\boxed{N11.07}$ Розкласти в ряд Тейлора в околі $z=0$

3) $f(z)=\sin^4 z+\cos^4 z$

Розв'язок. $f(z)=\left(\frac{1-\cos 2z}{2}\right)^2+\left(\frac{1+\cos 2z}{2}\right)^2=$

$=\frac{2+2\cos^2 2z}{4}=\frac{2+2\,\frac{1+\cos 4z}{2}}{4}=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cos 4z=$

$=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(4z)^{2n}}{(2n)!}$

$\boxed{N11.09}$ Розкласти в ряд Тейлора в околі $z=0$

$f(z)=\operatorname{arctg} z$.

Розв'язок. $f'(z)=\frac{1}{1+z^2}\Rightarrow f(z)=\int\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n dz \ \textcircled{=}$

при $|z|<1$

$\textcircled{=}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)}$.

$\boxed{N11.08}$ 1) Використовуючи розклад $(1+z)^\alpha$ знайти розклад в ряд Тейлора $f(z)=\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}$

Розв'язок. $f(z)=(1-z^2)^{-1/2}=$

$=1+\frac{1}{2}z^2+\frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}-1)z^4}{2!}+\frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}-1)(-\frac{1}{2}-2)}{3!}z^6+\ldots=$

$=1+\frac{1}{2}z^2+\frac{1\cdot 3}{2^2\cdot 2!}z^4+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3\cdot 3!}z^6+\ldots+\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)z^{2n}}{2^n\cdot n!}+\ldots$

$=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{2^n\cdot n!}z^{2n}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}z^{2n}.$

$\Rightarrow$ 3) $\arcsin z=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{z^{2n+1}}{2n+1}$

$\boxed{N11.10}$ 8) Знайти розклад Тейлора в околі $z=z_0$

$f(z)=\frac{z^2-5}{z^2-4z+3}$, $z_0=2$

Розв'язок. Заміна $z-2=\zeta\Rightarrow$

$f(z)=\frac{(z-2)^2+4z-9}{(z-2)^2-1}=1+\frac{4z-8}{(z-2)^2-1}=1+\frac{4(z-2)}{(z-2)^2-1}=$

$=1+\frac{4\zeta}{\zeta^2-1}=1-\frac{4\zeta}{1-\zeta^2}=1-4\zeta\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}\zeta^{2n}\right)=$

$=1-4\sum\limits_{n=0}^{\infty}\zeta^{2n+1}\Rightarrow f(z)=1-4\sum\limits_{n=0}^{\infty}(z-2)^{2n+1}.$

$\boxed{№ 11.11}$ 1) За доп. метода МНК знайти перші три відмінні від нуля члени розкладу $f(z)$ в ряд Тейлора в околі $z=0$, якщо $f(z) = \dfrac{z}{\ln(1+z)}$

Розв'язок. $f(0) = 1$. Нехай $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$

$$\Rightarrow z = \ln(1+z) \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \Rightarrow$$

$$z = \left(z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n} z^n + \ldots\right)\left(c_0 + c_1 z + \ldots + c_n z^n + \ldots\right)$$

$$= c_0 z + \left(c_1 - \frac{c_0}{2}\right) z^2 + \left(c_2 + \frac{c_1}{2} - \frac{c_0}{3}\right) z^3 + \ldots$$

$$+ \ldots + \left(c_n - \frac{c_{n-1}}{2} + \frac{c_{n-2}}{3} - \ldots + (-1)^n \frac{c_0}{n+1}\right) z^{n+1} + \ldots$$

$$\Rightarrow c_0 = 1, \quad c_1 - \frac{c_0}{2} = 0$$

$$c_2 - \frac{c_1}{2} + \frac{c_0}{3} = 0$$

$$\ldots$$

$$c_n = \frac{c_{n-1}}{2} - \frac{c_{n-2}}{3} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{c_0}{n+1}$$

$$\Rightarrow c_0 = 1, \quad c_1 = \frac{1}{2}, \quad c_2 = -\frac{1}{12}, \ldots$$

$$\Rightarrow f(z) = 1 + \frac{z}{2} - \frac{z^2}{12} + o(z^2).$$

Д/З. Євграфов № 11.02 (2), 11.06 (4), № 11.05 (3), № 11.07 (4), № 11.09 (1,4), № 11.10 (7), № 11.11 (2), № 11.12.