Заняття 17. Інтегрування

$\boxed{№ 3.19}$ Доказати, що якщо шлях не проходить через точки $\pm i$, то $\int_0^1 \frac{dz}{1+z^2} = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

◄ $\frac{1}{1+z^2} = \frac{i}{2(z+i)} - \frac{i}{2(z-i)}$ (методом МНК) $\Rightarrow$

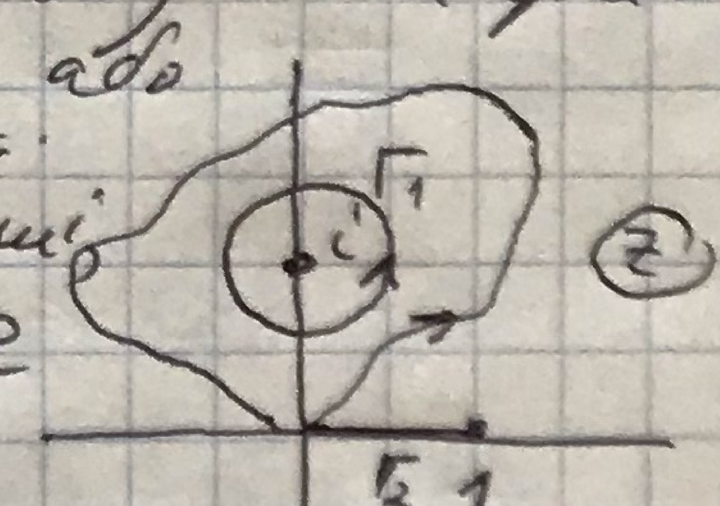
$$\int_0^1 \frac{dz}{1+z^2} = \frac{i}{2}\int_0^1 \frac{dz}{z+i} - \frac{i}{2}\int_0^1 \frac{dz}{z-i}$$

1) Якщо шлях інтегрування не охоплює точки $\pm i$, то інтеграл не залежить від його вибору і можна інтегрувати, наприклад, по відрізку $[0,1]$:

$$\int_0^1 \frac{dz}{1+z^2} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

2) Нехай крива, по якій здійснюється інтегрування, охоплює точку i та складається з замкненої кривої та відрізка $[0,1]$, орієнтованих в додатньому напрямку.

Замість довільної гладкої або кусково-гладкої орієнтованої кривої можна, згідно теор. Коші, взяти додатньо орієнтоване коло радіуса ε з центром в т. i.



Тоді $J = \int_\Gamma \frac{dz}{1+z^2} = \int_0^1 \frac{dz}{1+z^2} =$

$$= \frac{i}{2}\int_{\Gamma_1} \frac{dz}{z+i} - \frac{i}{2}\int_{\Gamma_1} \frac{dz}{z-i} + \int_{\Gamma_2} \frac{dz}{1+z^2} =$$

$$= -\frac{i}{2}\int_{\Gamma_1} \frac{dz}{z-i} + \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = -\frac{i}{2}\int_0^{2\pi} \frac{i\varepsilon e^{i\varphi}d\varphi}{\varepsilon e^{i\varphi}} +$$

$$+ \frac{\pi}{4} = \pi + \frac{\pi}{4}.$$

Цей інтеграл $=0$, це інтеграл від аналіт. функції по замкн. гладкому контуру.

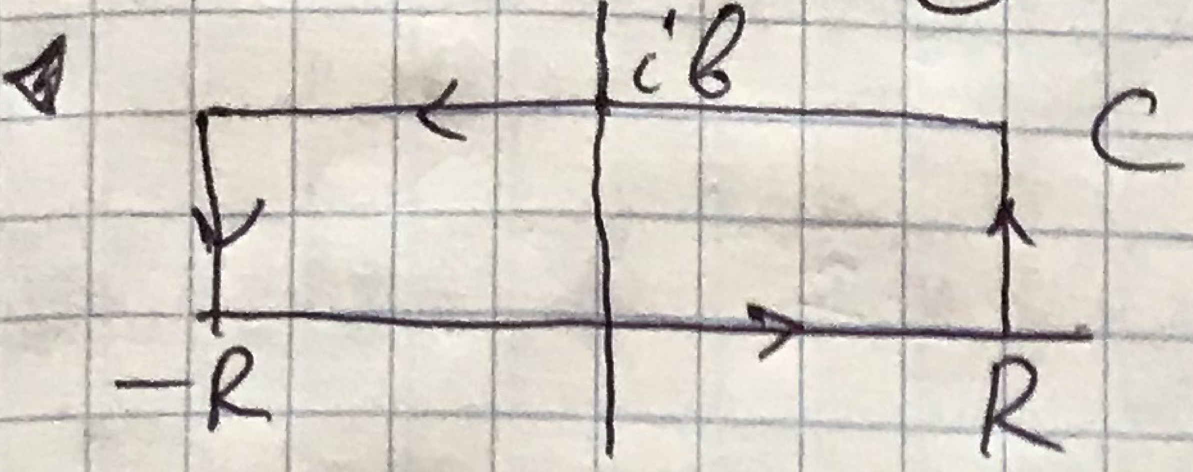
Нехай k обходів точки i в додатному напрямку, то $\int_{\Gamma_1} \frac{dz}{z+i}$ замінюється на $\int_{k\Gamma_1} \frac{dz}{z+i} =$

$$= \int_0^{k2\pi} i\,d\varphi = -i\pi k \Rightarrow J = \frac{\pi}{4} + k\pi.$$

Аналогічні міркування, якщо контур охоплює точку $-i$, або якщо обхід від'ємний. ►

$\boxed{№3.23}$ Довести, що $\int_0^{\infty} e^{-x^2}\cos 2bx\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-b^2}$

Вказівка. Інтегрувати ф-ію $f(z)=e^{-z^2}$ по границі прямокутника $|x|<R$, $0\le y\le b$ та скорист. інтегралом Пуасона $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}dt=\sqrt{\pi}$.



$f(z)=e^{-z^2}$ — аналіт в $\mathbb{C}$ $\Rightarrow$ ін-л по замкн. контуру $=0$

$\Rightarrow \oint_C e^{-z^2}dz = 0$.

З іншого боку,

$$\oint_C e^{-z^2}dz = \int_{-R}^{R} e^{-x^2}dx + \int_0^b e^{-(R+iy)^2}d(R+iy) -$$

$$- \int_{-R}^{R} e^{-(x+ib)^2}d(x+ib) - \int_0^b e^{-(-R+iy)^2}d(-R+iy)$$

$$= J_1+J_2+J_3+J_4$$

$J_1\to\sqrt{\pi}$ при $R\to+\infty$. (Ін-л Пуасона)

$$J_3 = -\int_{-R}^{R} e^{-x^2-2bix+b^2}dx = \cancel{-\int_{-R}^{R}}$$

$$= -e^{+b^2}\int_{-R}^{R} e^{-x^2}(\cos 2bx - i\sin 2bx)\,dx =$$

$= /\ e^{-x^2}\cdot\sin 2bx$ — непарна $\Rightarrow \int_{-R}^{R} e^{-x^2}\sin 2bx\,dx=0\ /$

$$= -\frac{e^{b^2}}{\cancel{e^{b^2}}}\int_{-R}^{R} e^{-x^2}\cos 2bx\,dx = -\frac{2e^{b^2}}{\cancel{e^{b^2}}}\int_0^R e^{-x^2}\cos 2bx\,dx$$

$$J_2 = \int_0^b e^{-R^2+y^2}(\cos 2Ry - i\sin 2Ry)\,dy =$$

$$= e^{-R^2}\int_0^b e^{y^2}(\cos 2Ry - i\sin 2Ry)\,dy \to 0 \text{ при } R\to+\infty$$

$$J_4 = -\int_0^b e^{-(-R+iy)^2}d(-R+iy) = -e^{-R^2}\int_0^b e^{y^2}(\cos 2Ry+i\sin 2Ry)\,dy$$

$\to 0$ при $R\to+\infty$.

$\Rightarrow$ при $R\to+\infty$ отримаємо рівність відносно шуканого інтегралу:

$$\sqrt{\pi} - \frac{2e^{b^2}}{\cancel{e^{b^2}}}J = 0 \Rightarrow J = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-b^2}$$

Інтегральна формула Коші

$\boxed{№3.27}$ Нех. C — простий замкнений спрямлюв. контур.

Обчислити $I=\int\limits_C \frac{dz}{z^2+9}$, якщо

1) точка $3i$ лежить всередині контура C, а точка $-3i$ — зовні
2) $-3i$ — всередині, а $3i$ — зовні
3) точки $\pm 3i$ знаходяться всередині C

Розв'язок. 1) $f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f(t)}{t-z}$ — формула Коші, де f — аналіт. в D, $C=\partial D$, $z\in D$.

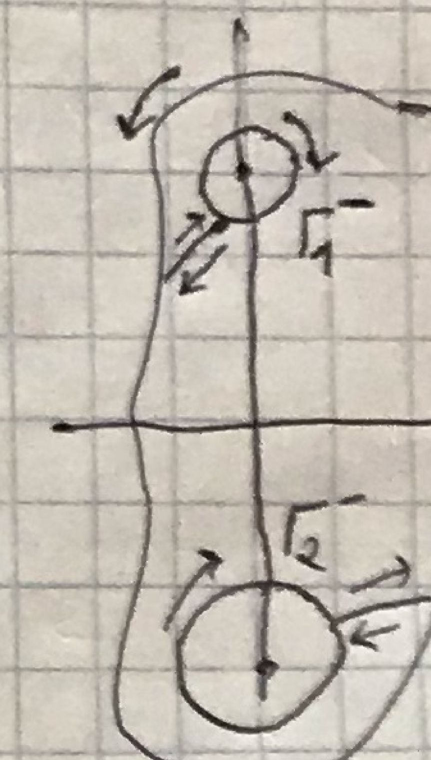
Тоді $I=\int\limits_C \frac{dz}{(z+3i)(z-3i)} = \left| f(z)=\frac{1}{z+3i} \right| =$

$= 2\pi i\cdot\frac{1}{3i+3i} = \frac{\pi}{3}$.

2) $I = 2\pi i \cdot \frac{1}{-3i-3i} = -\frac{\pi}{3}$

3) $I = \int\limits_\Gamma \frac{dz}{z^2+9} = \int\limits_{\Gamma_1}\frac{dz}{z^2+9} + \int\limits_{\Gamma_2}\frac{dz}{z^2+9} =$

$= \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = 0.$



$\boxed{№3.32}$ Обчислити інтеграл

$I=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{ze^z}{(z-a)^3}dz$, якщо точка a лежить всередині контура C.

Розв'язок. Раціонально скористатись формулою для похідної n-го порядку інтеграла типу Коші: $f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f(t)}{(t-z)^{n+1}}dt$

~~$f(z)=ze^z$~~

Нех. $f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{te^t}{t-z}dt$, $f''(z)=\frac{2!}{2\pi i}\int\limits_C \frac{te^t}{(t-z)^3}dt$

А за інтегр. формулою Коші $f(z)=ze^z$.

Тоді: $I=\left(\frac12 ze^z\right)''\Big|_{z=a} = e^a\left(1+\frac{a}{2}\right)$.

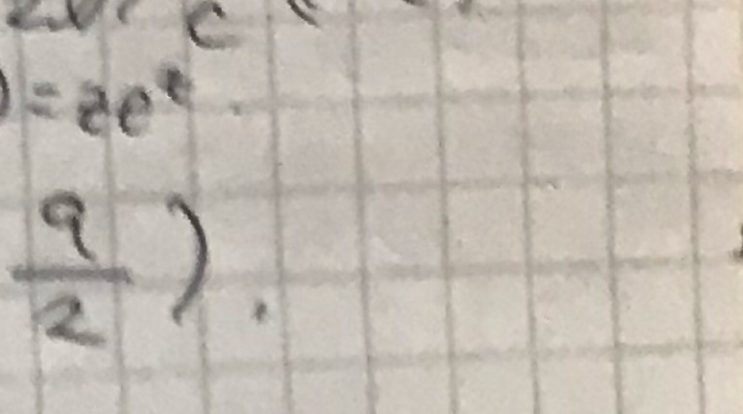
$\boxed{№3.34}$ $f\in A(D)$, $C=\partial D$ — простий замкн. конт. $0\in D$. Довести, що $\forall$ гілки $\mathrm{Ln}(z)$

$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C f'(z)\,\mathrm{Ln}\,z\,dz = f(z_0)-f(0)$, де z_0 — початкова точка інтегрування.

◄ Інтегр. частинами:

$I=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C f'(z)(\ln|z|+i\arg z+2\pi i k)\,dz =$

$= \frac{1}{2\pi i}\left[(\ln|z|+i\arg z+2\pi i k)f(z)\right]_C - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f(z)dz}{z} =$



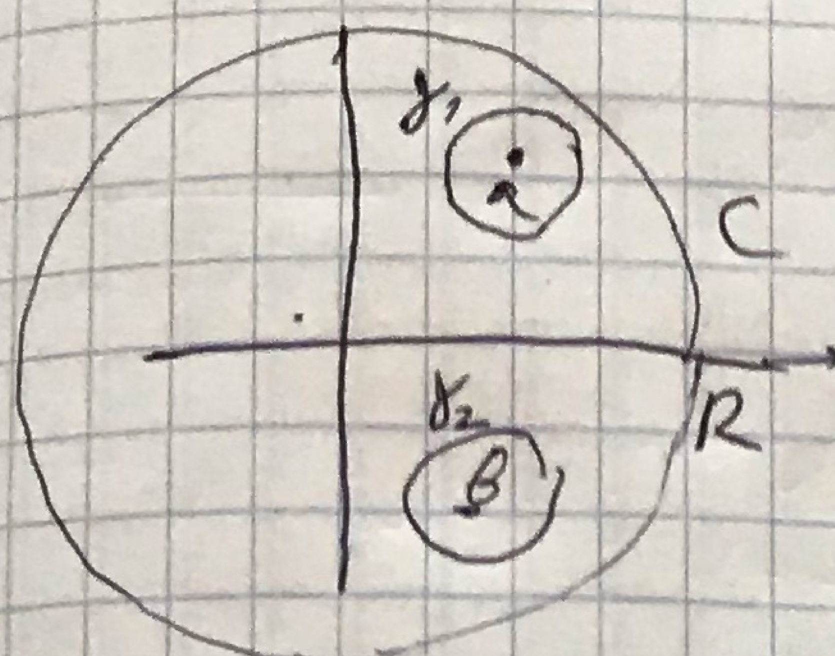
$\left| [\mathrm{Ln}\,z]_C = 2\pi i \Rightarrow \left[\frac{1}{2\pi i}\mathrm{Ln}\,z\, f(z)\right]_C = f(z_0) \right|$

$= f(z_0) - f(0)$ ►

N 3.36 Довести теорему Ліувілля, обчисливши $J=\int\limits_{|z|=R}\frac{f(z)}{(z-a)(z-b)}dz$ ($|a|<R$, $|b|<R$) та виконавши його оцінку при $R\to\infty$

Δ Теор. Ліувілля. Якщо f – аналіт та обмеж на $\mathbb{C}$, то $f=const$.

$f\in A(\mathbb{C})$, $\exists M>0: |f(z)|<M\ \forall z\in\mathbb{C} \Rightarrow f\equiv const$



$$J=J_1+J_2=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_1}\frac{f(t)}{(t-a)(t-b)}dt+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_2}\frac{f(t)}{(t-a)(t-b)}dt=$$

$$=\frac{f(a)}{a-b}+\frac{f(b)}{b-a}=\frac{1}{a-b}(f(a)-f(b))$$

$$|J|\le\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|z|=R}\frac{|f(t)|}{|t-a||t-b|}|dt|<\frac{M}{2\pi}\frac{2\pi R}{(R-|a|)(R-|b|)}$$

$\to 0$ при $R\to+\infty$

$\Rightarrow \frac{1}{a-b}(f(a)-f(b))=0 \Rightarrow \forall a,b\ \ f(a)=f(b)$

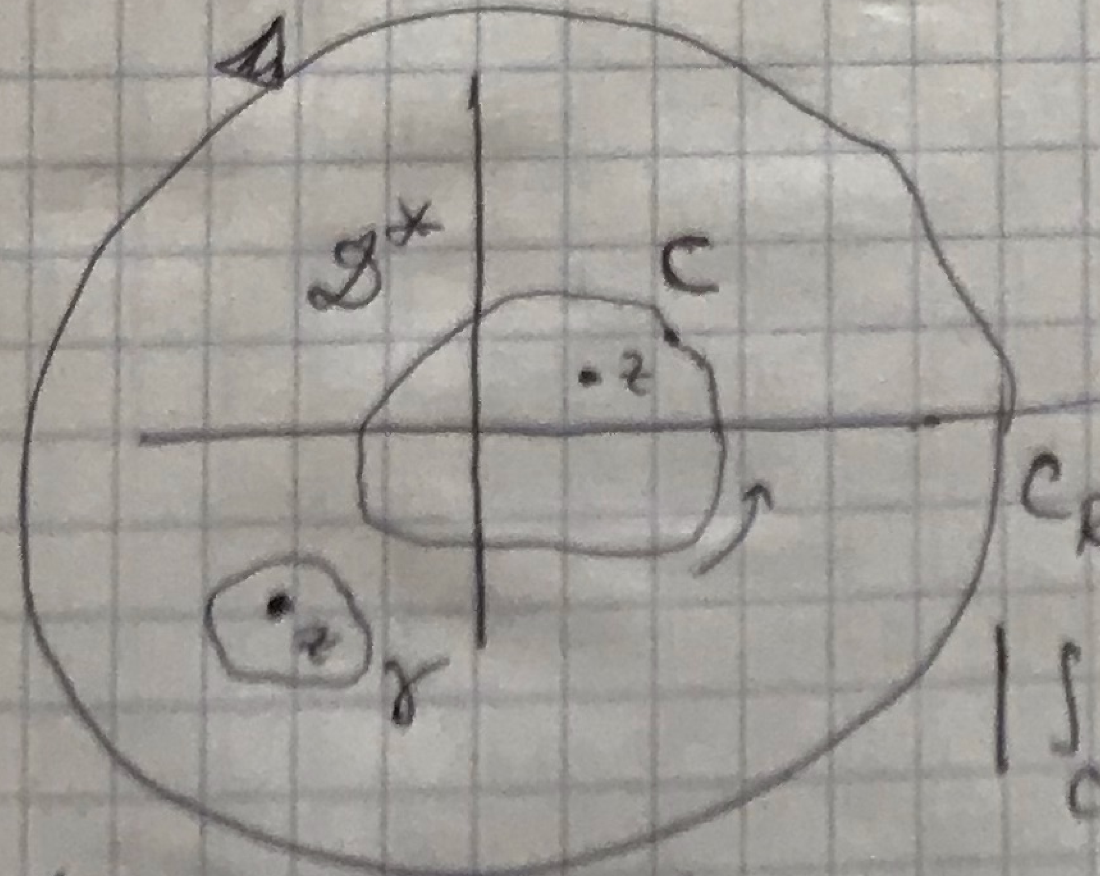
$\Rightarrow f=const$ ▲

N 3.38 Довести теорему Коші для необмеженої області:

Нехай C – простий замкнений контур, що обмежує обмежену область D. Функція $f\in A(\mathbb{C}\setminus D)$ та $\lim\limits_{z\to\infty}f(z)=A$. Тоді

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=\begin{cases}-f(z)+A, & \text{якщо } z\in\mathbb{C}\setminus D\\ A, & \text{якщо } z\in D\end{cases}$$

Δ



1) $z\in D \Rightarrow \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_R}\frac{f(t)}{t-z}dt=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C\frac{f(t)dt}{t-z}$

$C_R: |z|=R$

$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_R}\frac{A}{t-z}dt=A$ (за формулою Коші)

$$\left|\int\limits_{C_R}\frac{f(t)-A}{t-z}dt\right|\le\int\limits_{C_R}\frac{|f(t)-A|}{|t-z|}|dt|<$$

$<$ / $f(z)\to A$ при $z\to\infty$ / $\to 0$ при $R\to+\infty \Rightarrow \int\limits_{C_R}\frac{f(t)}{t-z}dt=A$

2) $z\in\mathbb{C}\setminus D$. За теор Коші

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_R}\frac{f(t)}{t-z}dt=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C\frac{f(t)}{t-z}dt+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma\frac{f(t)}{t-z}dt.$$

$$A=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C\frac{f(t)}{t-z}dt+f(z)$$

за формулою Коші

$\Rightarrow J=A-f(z)=-f(z)+A.$

Д/З N 3.28, N3.29, N3.33, N3.35, N3.37, N3.39