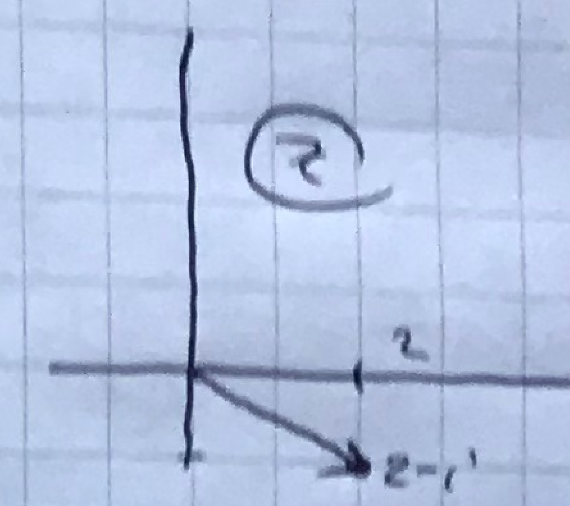
Заняття 16. Інтегрування

$\boxed{№\ 3.4}$ Обчислити інтеграл $\int_\Gamma |z|\,dz$ по таким шляхам: 1) по радіус-вектору точки $z=2-i$; 4) ~~по півкол~~ по колу $|z|=R$

Розв'язок. 1) рівн. прямої

$y=-\frac{1}{2}x \Rightarrow z=x+iy=x\left(1-\frac{i}{2}\right).$



$$\int_\Gamma |z|\,dz=\int_0^2\sqrt{x^2+\frac{x^2}{4}}\left(1-\frac{i}{2}\right)dx=$$

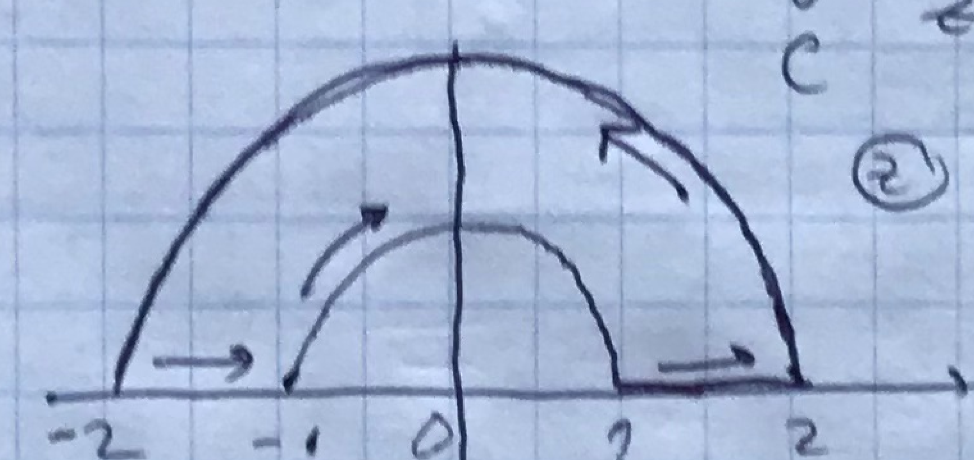
$$=\left(1-\frac{i}{2}\right)\frac{\sqrt5}{2}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_0^2=\left(1-\frac{i}{2}\right)\sqrt5.$$

4) $\Gamma: |z|=R \qquad z=Re^{i\varphi} \qquad 0\le\varphi\le 2\pi$

$$\int_\Gamma |z|\,dz=i\int_0^{2\pi}R^2e^{i\varphi}\,d\varphi=iR^2\frac{e^{i\varphi}}{i}\Big|_0^{2\pi}=R^2(1-1)=0$$

$\boxed{№\ 3.6}$ Обчислити інтеграл $\int_C \frac{z}{\bar z}\,dz$,

де C:



Розв'язок.

$$\int_C\frac{z}{\bar z}\,dz=\int_1^2dx+\int_0^\pi\frac{2e^{i\varphi}}{2e^{-i\varphi}}\cdot 2ie^{i\varphi}\,d\varphi+$$

$$+\int_{-2}^{-1}dx+\int_\pi^0\frac{e^{i\varphi}}{e^{-i\varphi}}\,ie^{i\varphi}\,d\varphi=1+2i\int_0^\pi e^{3i\varphi}\,d\varphi+$$

$$+1+i\int_\pi^0 e^{3i\varphi}\,d\varphi=1+\frac{2ie^{3i\varphi}}{3i}\Big|_0^\pi+1+$$

$$+\frac{ie^{3i\varphi}}{3i}\Big|_\pi^0=1+\frac{2}{3}(-1-1)+1+\frac{1}{3}(1-(-1))=$$

$$=2-\frac{4}{3}+\frac{2}{3}=2-\frac{2}{3}=\frac{4}{3}.$$

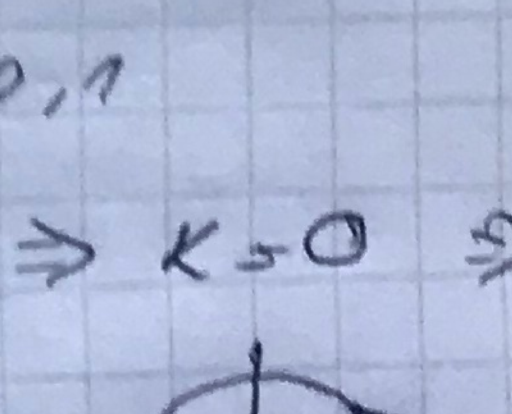
$\boxed{№3.8}$ Обчислити інтеграл $\int_\Gamma\frac{dz}{\sqrt z}$ по таким контурам: ~~1) $|z|=1$~~, $\sqrt1=1$

1) по півколу $|z|=1$, $y\ge0$

Розв'язок. $\sqrt z=\sqrt r\,e^{i\frac{\varphi+2\pi k}{2}}$, $k=0,1$; $z=re^{i\varphi}$

$\sqrt1=e^{i\frac{0+2\pi k}{2}}=1 \Rightarrow e^{i\pi k}=1 \Rightarrow k=0 \Rightarrow$

$\sqrt z=\sqrt r\,e^{i\frac{\varphi}{2}}$. $\Gamma: z=e^{i\varphi}$



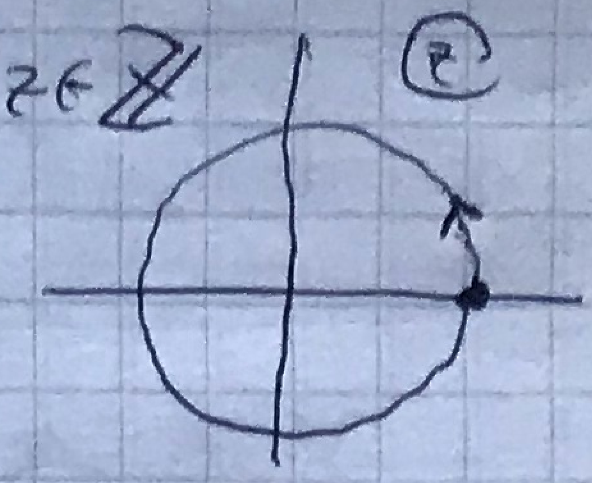
$$\int_0^\pi\frac{ie^{i\varphi}}{e^{i\varphi/2}}\,d\varphi=i\int_0^\pi e^{i\varphi/2}\,d\varphi=$$

$$=2e^{i\varphi/2}\Big|_0^\pi=2\left(e^{i\frac{\pi}{2}}-e^0\right)=2(i-1).$$

№3.9 Обчислити інтеграл $\int_C \operatorname{Ln} z\,dz$, де

1) C – одиничне коло $|z|=1$ та $\operatorname{Ln} 1 = 0$.

Розв'язок. $\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i(\arg z + 2\pi k)$, $k \in \mathbb{Z}$



C: $|z|=1$, $\ln|z|=0$,

$\operatorname{Ln} 1 = i\cdot 2\pi k = 0 \Rightarrow k=0$.

$\Rightarrow$ Для $z \in C$ $\operatorname{Ln} z = i\varphi$, $\varphi = \arg z$.

$z = e^{i\varphi}$, $dz = ie^{i\varphi}d\varphi$.

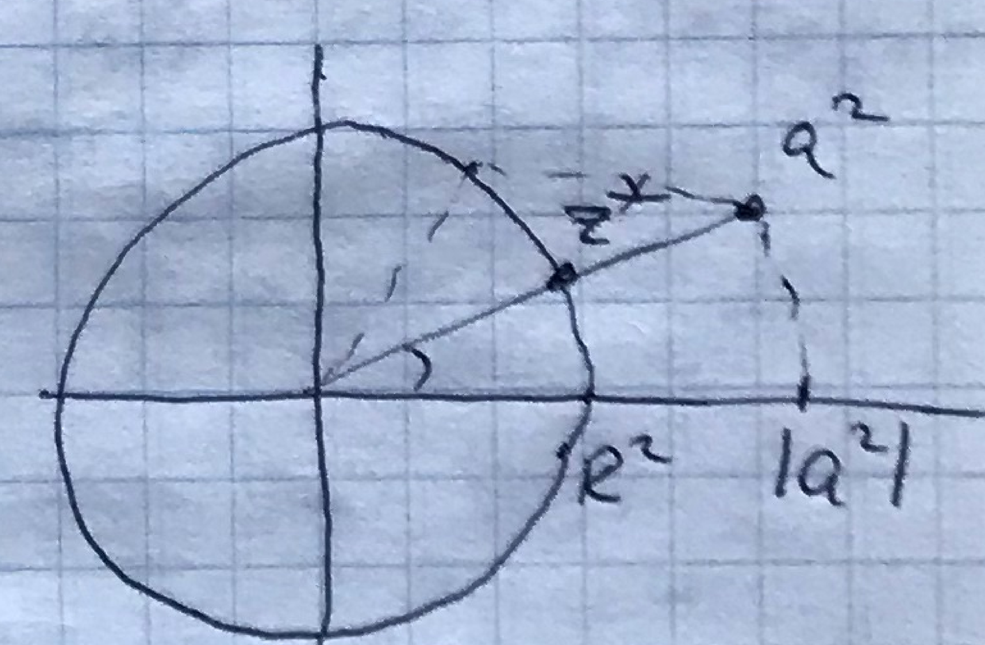
$$\int_0^{2\pi} i\varphi\, ie^{i\varphi}d\varphi = -\int_0^{2\pi}\varphi e^{i\varphi}d\varphi = -\left(\varphi\frac{e^{i\varphi}}{i}\Big|_0^{2\pi} - \frac{e^{i\varphi}}{i}\Big|_0^{2\pi}\right) =$$
$$= 2\pi i.$$

№3.14 Довести, що якщо $|a| \neq R$, то

$$\int_{|z|=R}\frac{|dz|}{|z+a|\cdot|z+a|} < \frac{2\pi R}{|R^2-|a|^2|}.$$

Розв'язок. ◁ $|z|=R \Rightarrow z = Re^{i\varphi}$

$$\int_0^{2\pi}\frac{|iRe^{i\varphi}|d\varphi}{|Re^{i\varphi}-a|\cdot|Re^{i\varphi}+a|} = R\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{|R^2e^{2i\varphi}-a^2|} \le$$



$|R^2e^{2i\varphi}-a^2|$ — мінімальне, якщо $R^2e^{2i\varphi} = z^*$,

тобто $2\varphi = \arg a^2$

$$\le R\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{|R^2-|a^2||} =$$
$$= \frac{2\pi R}{|R^2-|a^2||} = \frac{2\pi R}{|R^2-|a|^2|}$$

№3.15 Довести

1) якщо f – непр. в околі т. $z_0=0$, то

$$\lim_{r\to 0}\int_0^{2\pi} f(re^{i\varphi})d\varphi = 2\pi f(0)$$

◁ $\int_0^{2\pi} f(0)d\varphi = 2\pi f(0)$.

$$\left|\int_0^{2\pi} f(re^{i\varphi}) - f(0)\cdot 2\pi\right| = \left|\int_0^{2\pi}(f(re^{i\varphi})-f(0))d\varphi\right| \le$$

$\le$ f – непр. $\Rightarrow \forall \varepsilon>0\ \exists\delta>0 : r<\delta \Rightarrow |f(re^{i\varphi})-f(0)|<\varepsilon$

$\le 2\pi\varepsilon = \varepsilon' \Rightarrow \lim_{r\to 0}\int_0^{2\pi} f(re^{i\varphi})d\varphi = 2\pi f(0)$ ▷

2) Якщо f — непр. в околі т. $z=a$, то

$$\lim_{r\to 0} \int\limits_{|z-a|=r} \frac{f(z)}{z-a}\,dz = 2\pi i f(a).$$

◄ $\cancel{2\pi i f(a)} = \int\limits_{|z-a|=r} \frac{f(a)}{z-a}\,dz = \left| \begin{array}{l} z=a+re^{i\varphi} \\ \varphi\in[0,2\pi] \end{array} \right| =$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{f(a)\, i r e^{i\varphi}}{r e^{i\varphi}}\,d\varphi = i f(a)\cdot 2\pi = 2\pi i f(a).$$

$$\left| \int\limits_{|z-a|=r} \frac{f(z)}{z-a}\,dz - 2\pi i f(a) \right| =$$

$$= \left| \int\limits_{|z-a|=r} \frac{f(z)-f(a)}{z-a}\,dz \right| \le \int\limits_{|z-a|=r} \left| \frac{f(z)-f(a)}{z-a} \right| |dz| =$$

$$= \frac{1}{r} \int\limits_{|z-a|=r} |f(z)-f(a)|\,|dz| =$$

$$= \frac{1}{r} \int_0^{2\pi} |f(a+re^{i\varphi}) - f(a)|\, r\, d\varphi \Rightarrow$$

$$= \int_0^{2\pi} |f(a+re^{i\varphi}) - f(a)|\,d\varphi \to 0 \text{ при } r\to 0$$ ►

Інтегральна теорема Коші

$\boxed{№3.20}$ Показати, що якщо C — довільний простий замкнений контур, що не проходить через точку a, а n — ціле число, то

$$\int_C (z-a)^n dz = \begin{cases} 0, & \text{якщо } n\ne -1 \\ 2\pi i, & \text{якщо } n=-1, \text{ а всередині } C \\ 0, & \text{якщо } n=-1, \text{ а зовні } C \end{cases}$$

◄ 1) a зовні C. f — аналіт $\Rightarrow$ за теор. Коші

$\int_C (z-a)^n dz = 0.$

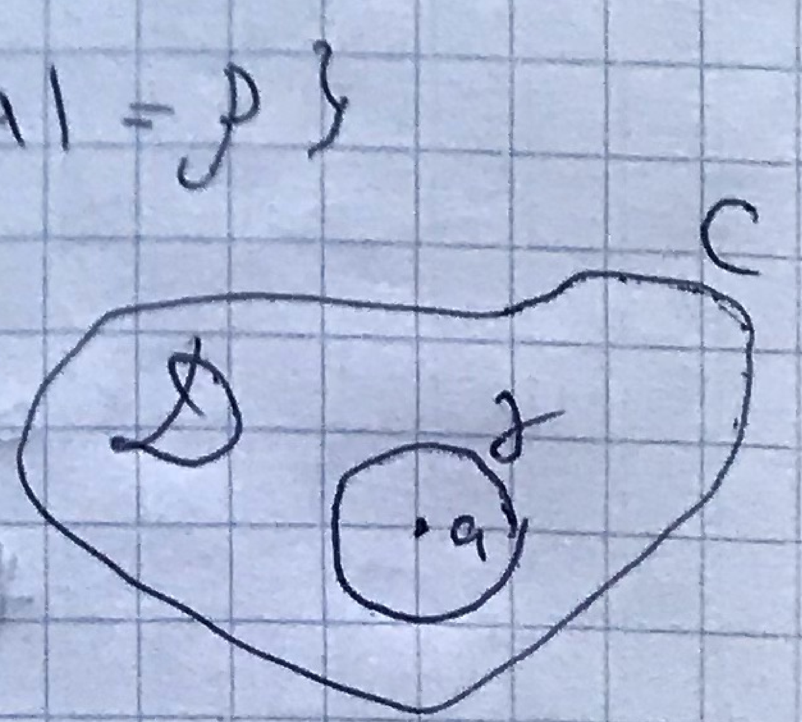
2) $a\in D$ (D область, границею якої є контур C)
$\partial D = C$

Нехай $n\ge 0$ $\int_C (z-a)^n dz = 0$ за теор. Коші

3) $a\in D$, $n<0$, $\gamma=\{z: |z-a|=\rho\}$

$z-a=\rho e^{i\varphi}$, $\int_0^{2\pi} \rho^{n+1} e^{i(n+1)\varphi}\, i\, d\varphi =$

$= i\rho^{n+1} \frac{e^{i(n+1)\varphi}}{i(n+1)}\Big|_0^{2\pi} = 0$ при $n\ne -1$



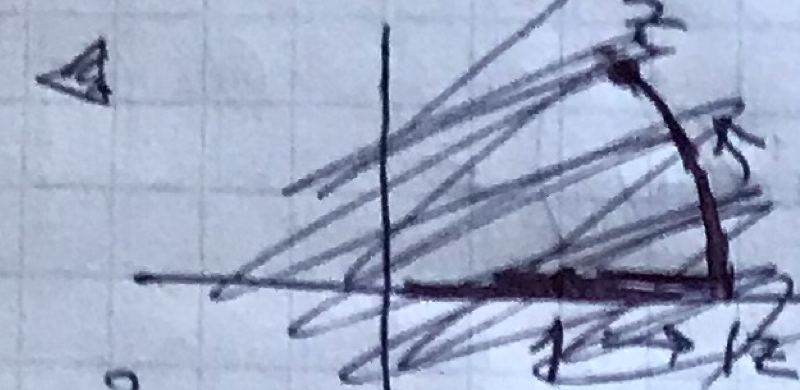
4) Нех. $a\in D$, $n=-1$

$$\int_C \frac{dz}{z-a} = \int_\gamma \frac{dz}{z-a} = \int_0^{2\pi} i\,d\varphi = 2\pi i$$

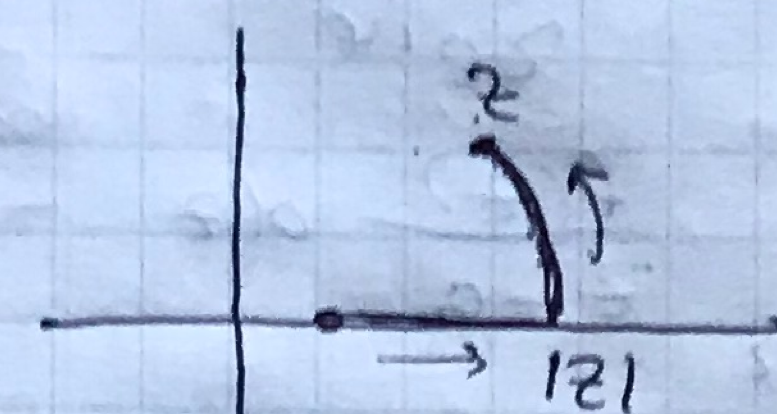
№ 3.18 Показати, що якщо шлях не проходить через початок координат, то

$$\int_1^z \frac{dz}{z} = \ln r + i\varphi + 2\pi i k,$$

де k - ціле число, що вказує, скільки разів шлях інтегрування обходить початок координат ($z = re^{i\varphi}$)



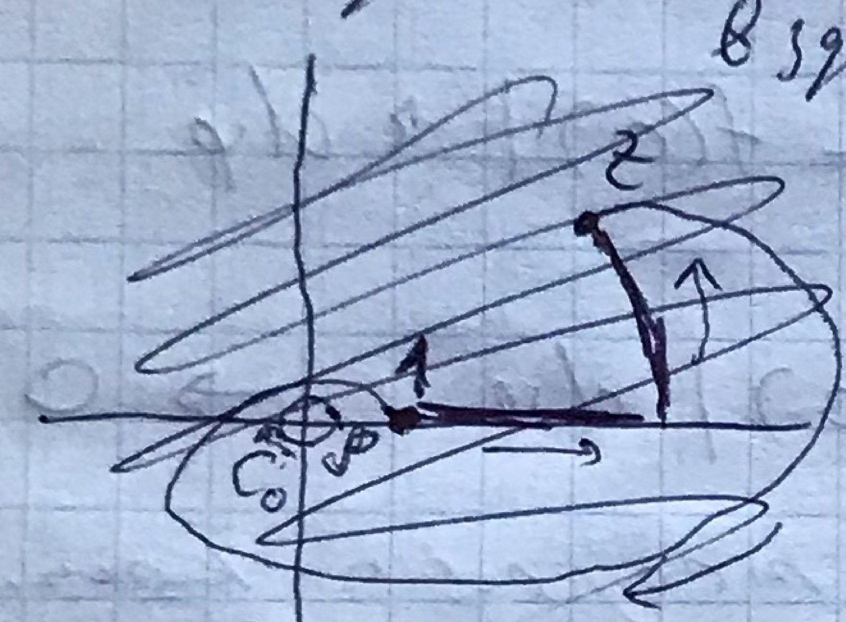
1)

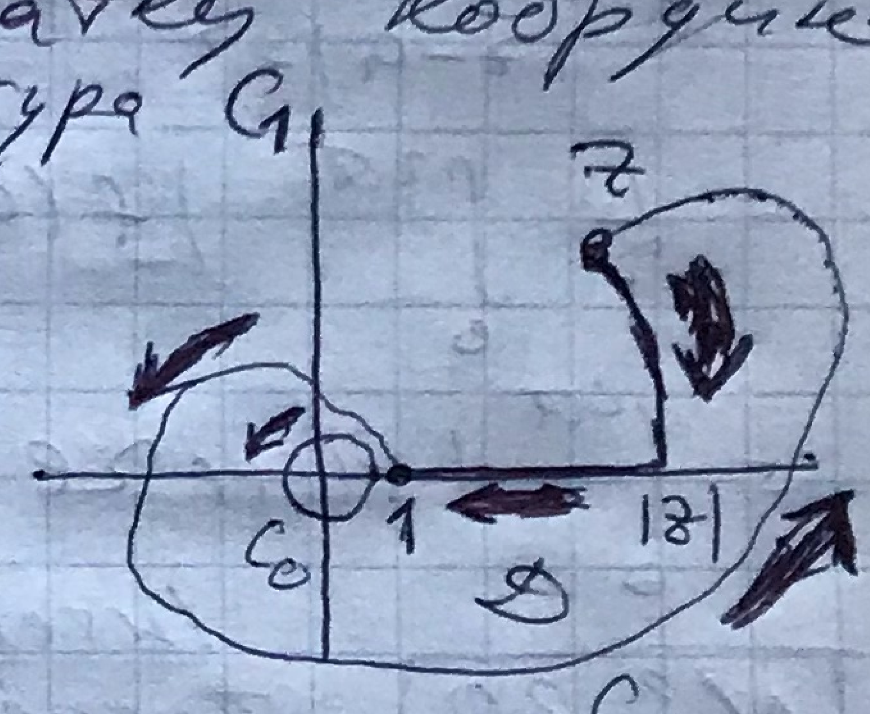


$$\int_1^z \frac{dz}{z} = \int_1^r \frac{dt}{t} + \int_0^{\varphi} \frac{r i e^{i\theta}}{r e^{i\theta}} d\theta =$$

$$= \ln r + \int_0^{\varphi} i\, d\theta = \ln r + i\varphi.$$

2) один обхід початку координат вздовж контура C_1





Нехай Γ - контур, що склад. з відрізку від 1 до $|z|$ та дуги кола від $|z|$ до z, $C_0 = \{z : |z| = \varepsilon\}$, $\varepsilon > 0$ достатньо мале; C_0 всередині замкненого контуру C_1

$f(z) = \frac{1}{z}$ — аналітична в двозвʼязній обл. D, яку оточують контури C_1 ~~та C_0~~ та контур Γ та контур C_0

$$\Rightarrow \int_{C_1} \frac{dz}{z} - \int_{\Gamma} \frac{dz}{z} - \int_{C_0} \frac{dz}{z} = 0$$

$$\Rightarrow \int_{C_1} \frac{dz}{z} = \int_{\Gamma} \frac{dz}{z} + \int_{C_0} \frac{dz}{z} =$$

$$= \ln r + i\varphi + \int_0^{2\pi} \frac{i\varepsilon e^{i\varphi}}{\varepsilon e^{i\varphi}} d\varphi = \ln r + i\varphi + 2\pi i$$

$$\Rightarrow \int_{1 \text{ вздовж } C_1}^{z} \frac{dz}{z} = \ln r + i\varphi + 2\pi i$$

Д/з № 3.8, № 3.9, № 3.16, № 3.17, № 3.19, № 3.22, № 3.23