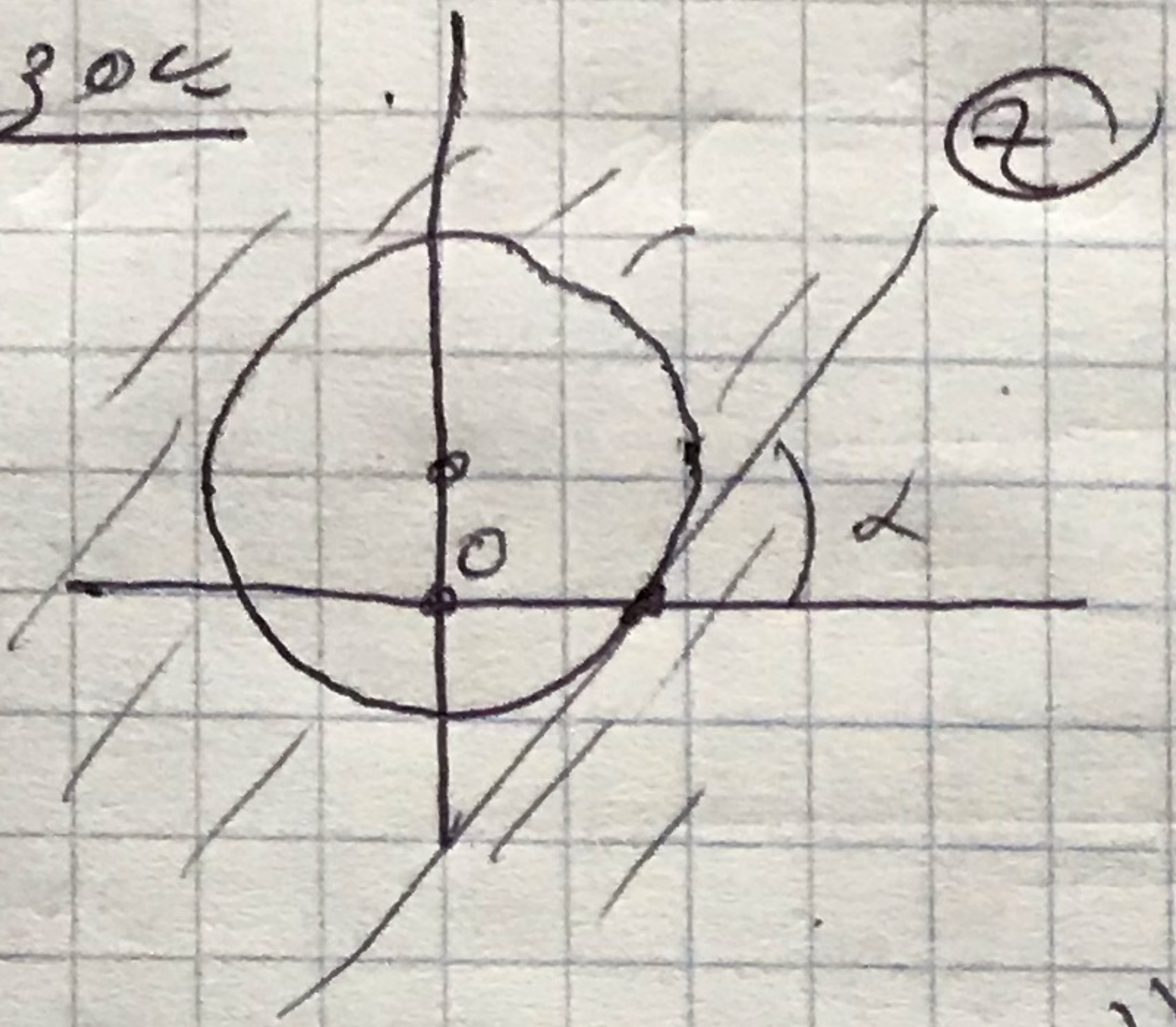


Зачет № 14 Конформное отображение

№ 2.121 Представить функцию Мюковского
 в виде $\frac{w-1}{w+1} = \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2$, найти

1) образ круга C , который проходит через точки ± 1
 под углом \angle ($-\pi < \angle < \pi$) по дуге $Re z > 0$ в
 точке 1 на область w как область w конформно
 отображается на область w .

Решение



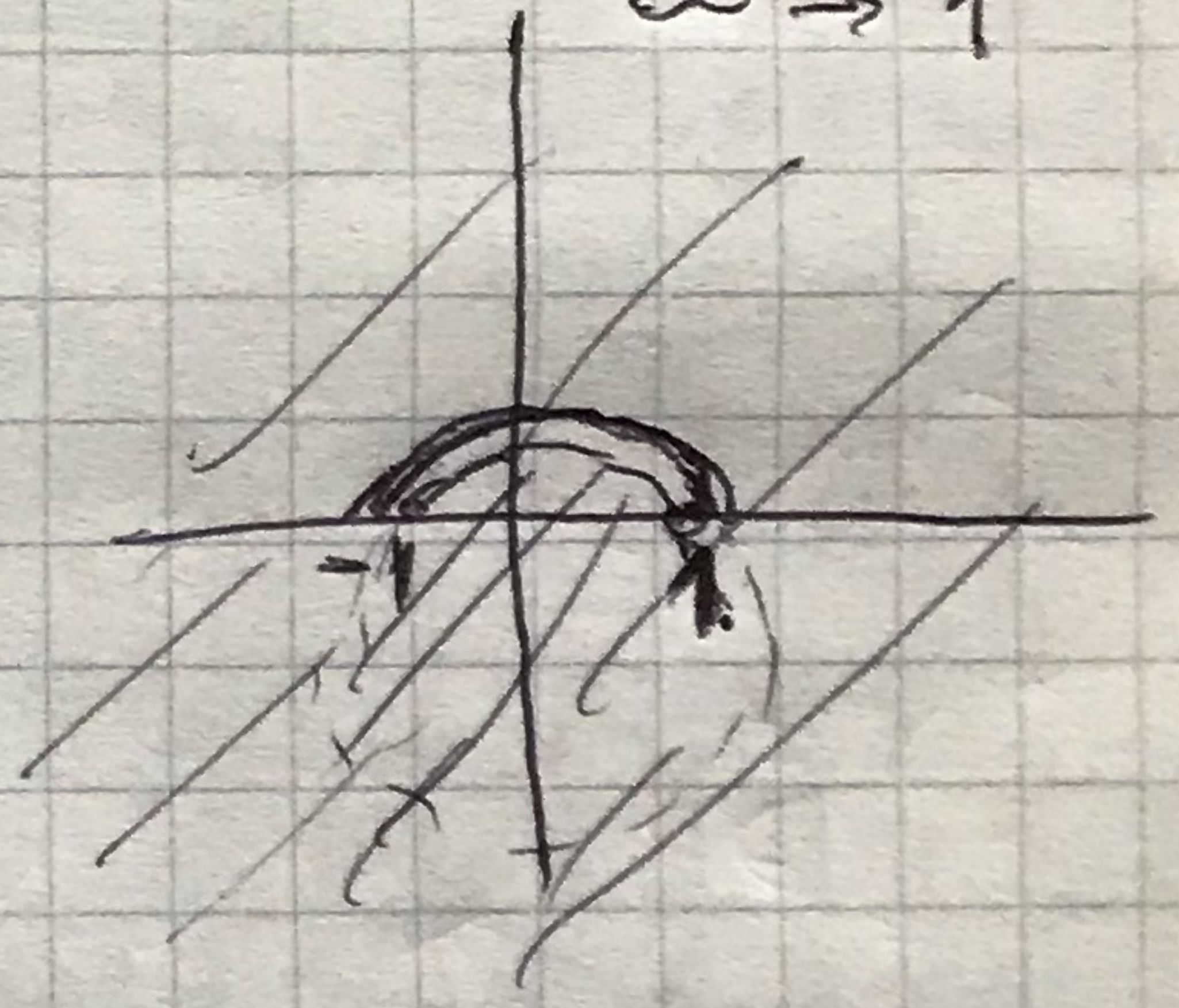
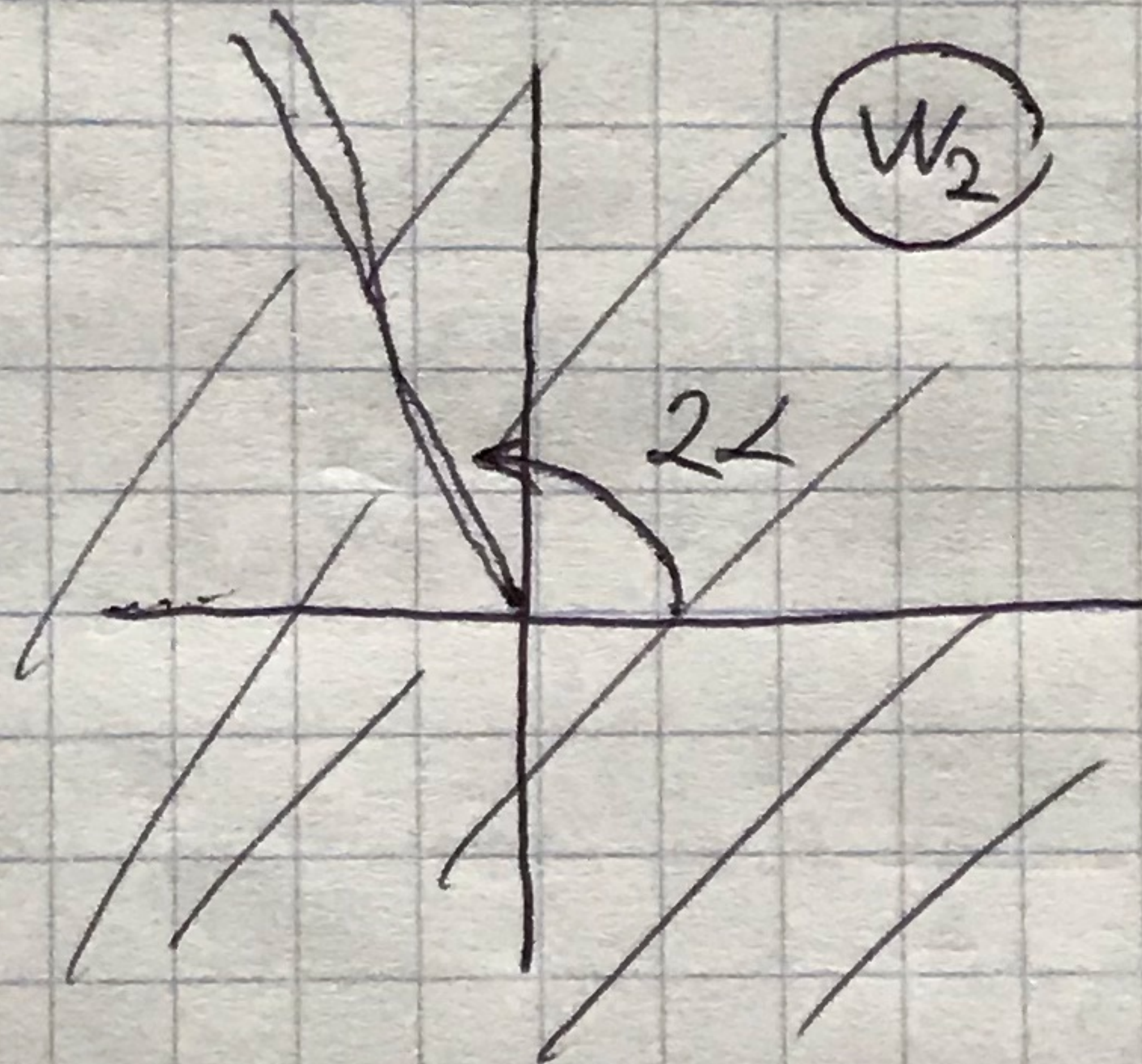
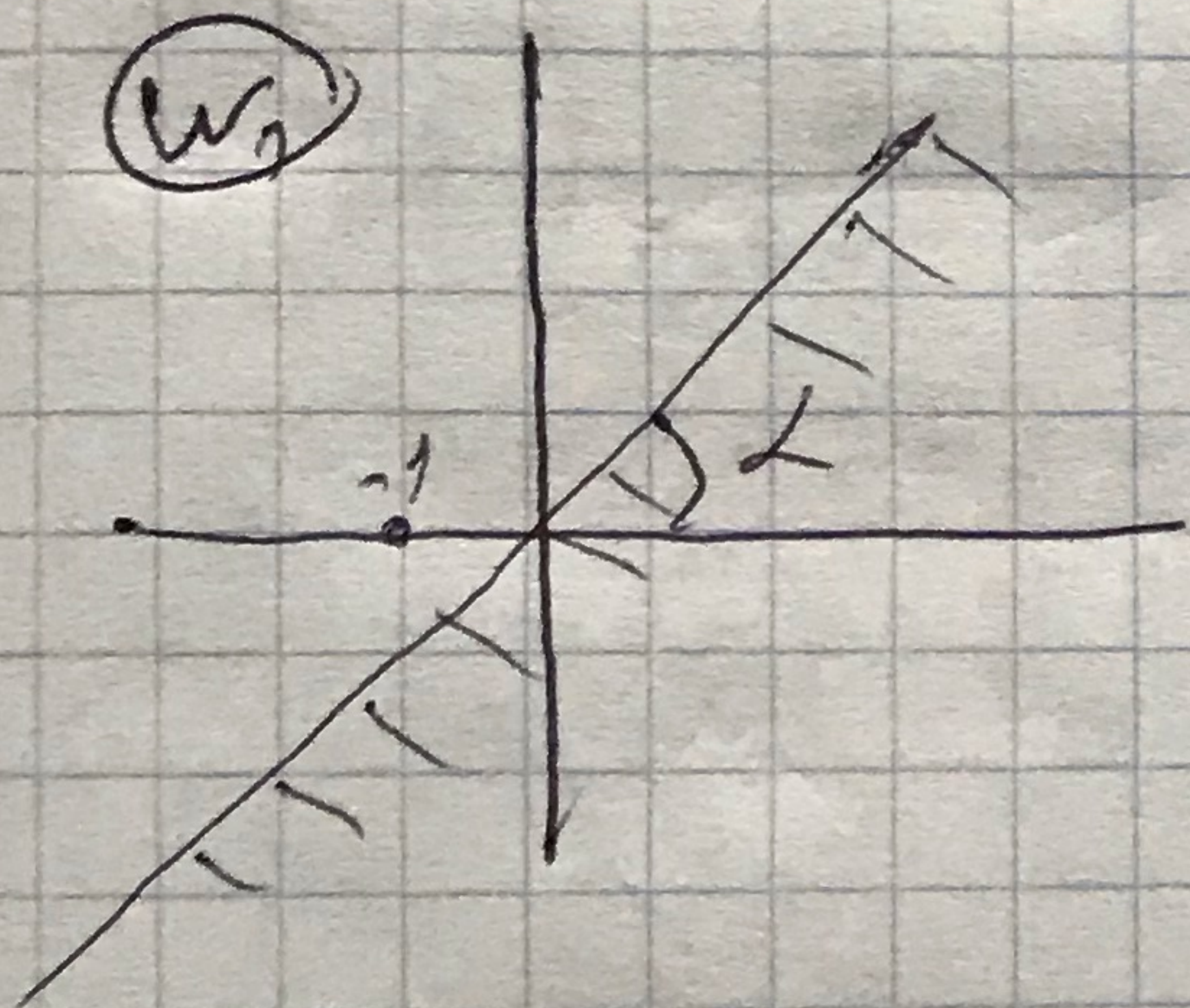
$$w_1 = \frac{z-1}{z+1}$$

$$w_2 = w_1^2$$

$$\frac{w-1}{w+1} = w_2 \Rightarrow w = \frac{w_2+1}{1-w_2}$$

$$0 \rightarrow -1$$

$$\infty \rightarrow 1$$

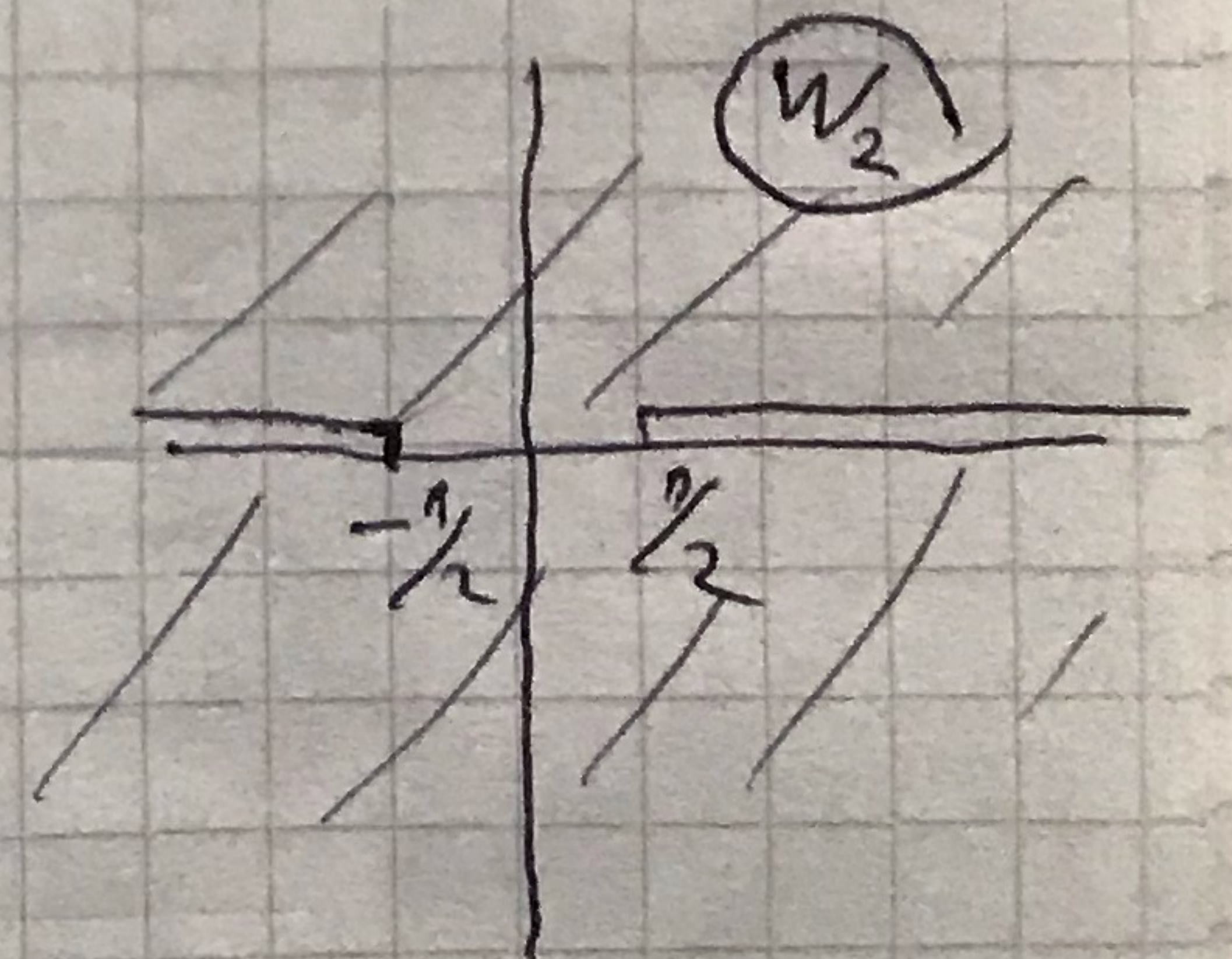
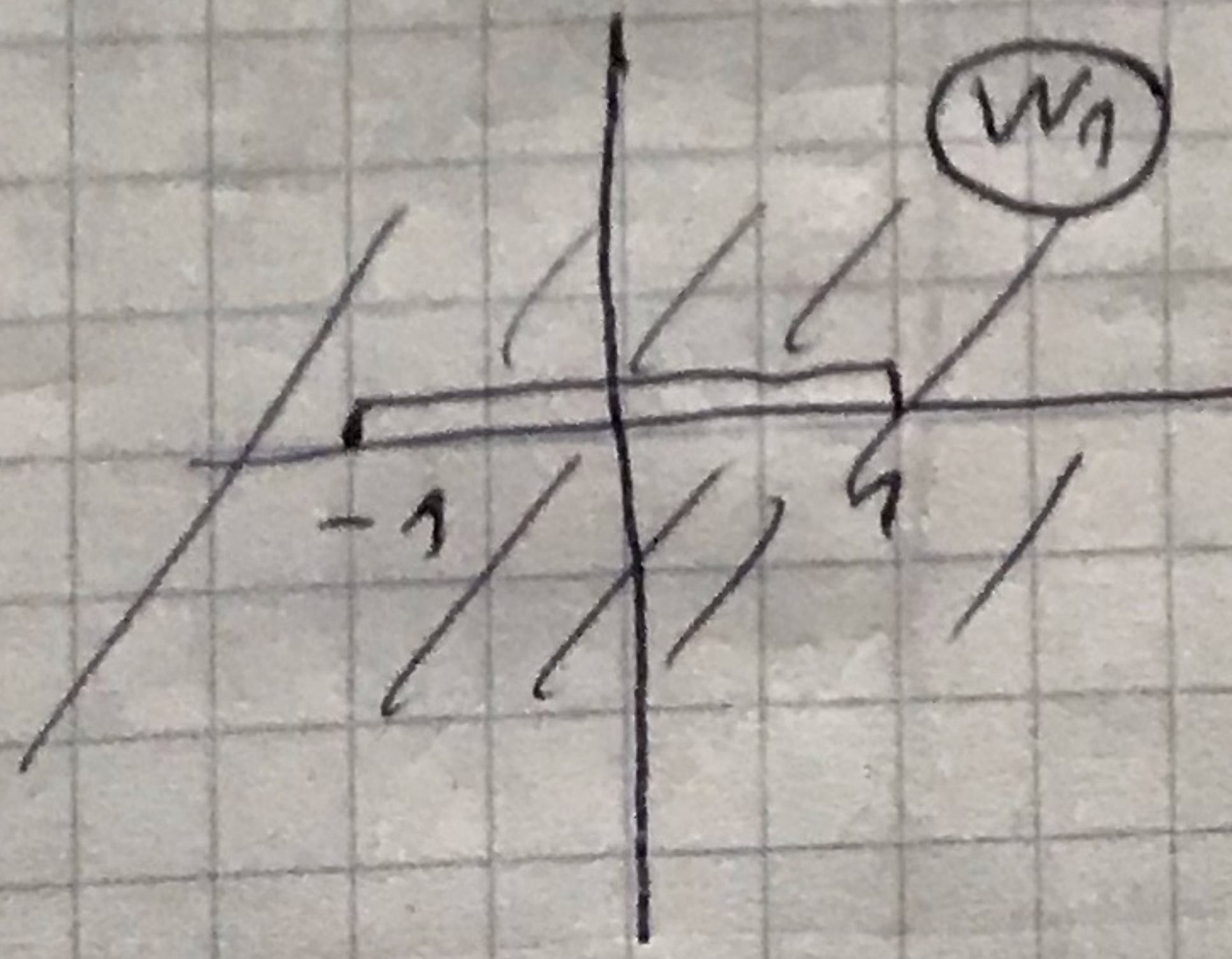
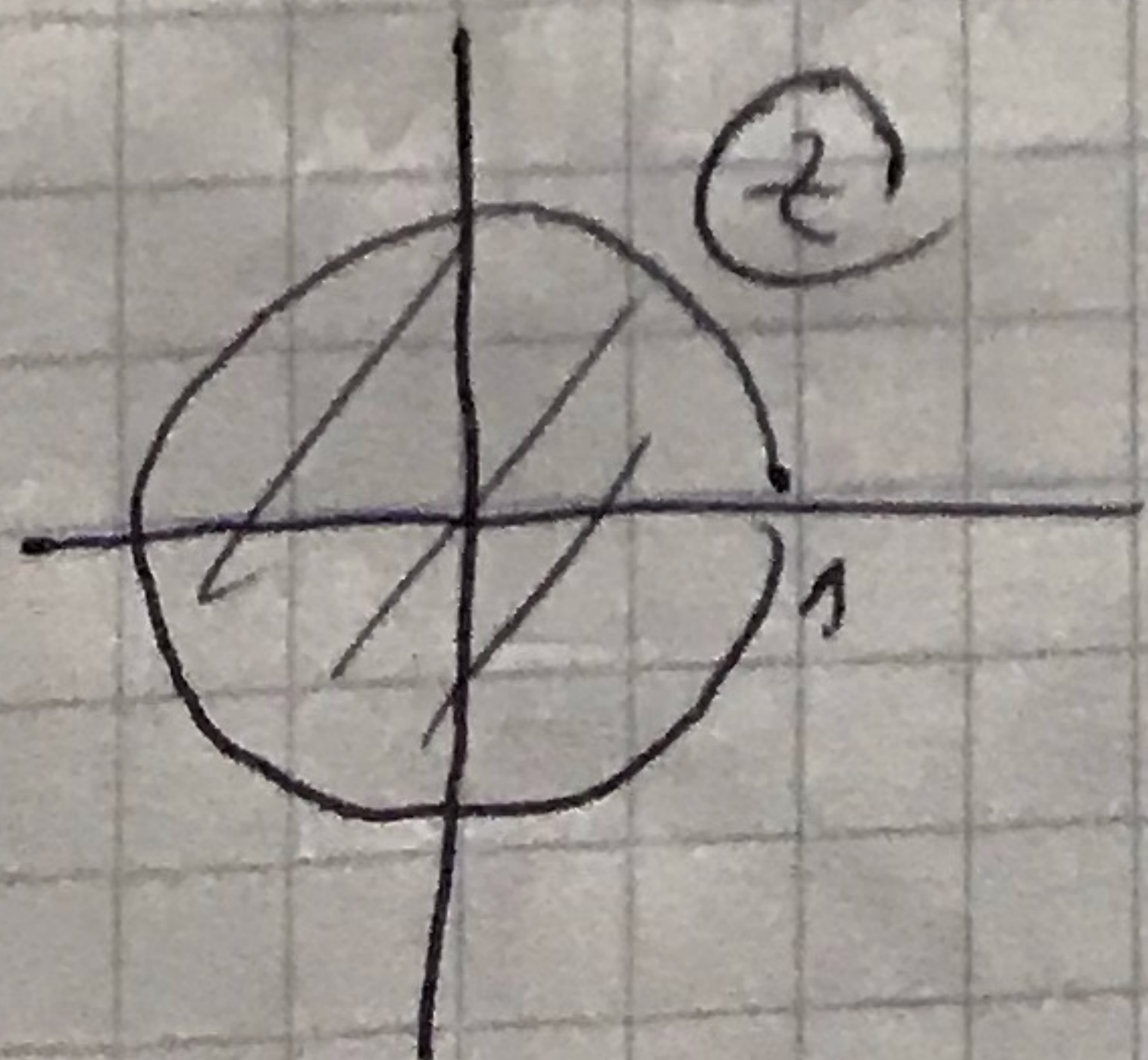


№ 2.124 Найти область, которая отображается
 при конформном отображении заданной области
 заданной функцией. "Знаешь отрезок"

Круг $|z| < 1$, $w = \frac{z}{z^2+1}$

Решение. $w = \frac{z}{z^2+1} = \frac{1}{z+\frac{1}{z}} = \frac{1/2}{\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z})}$

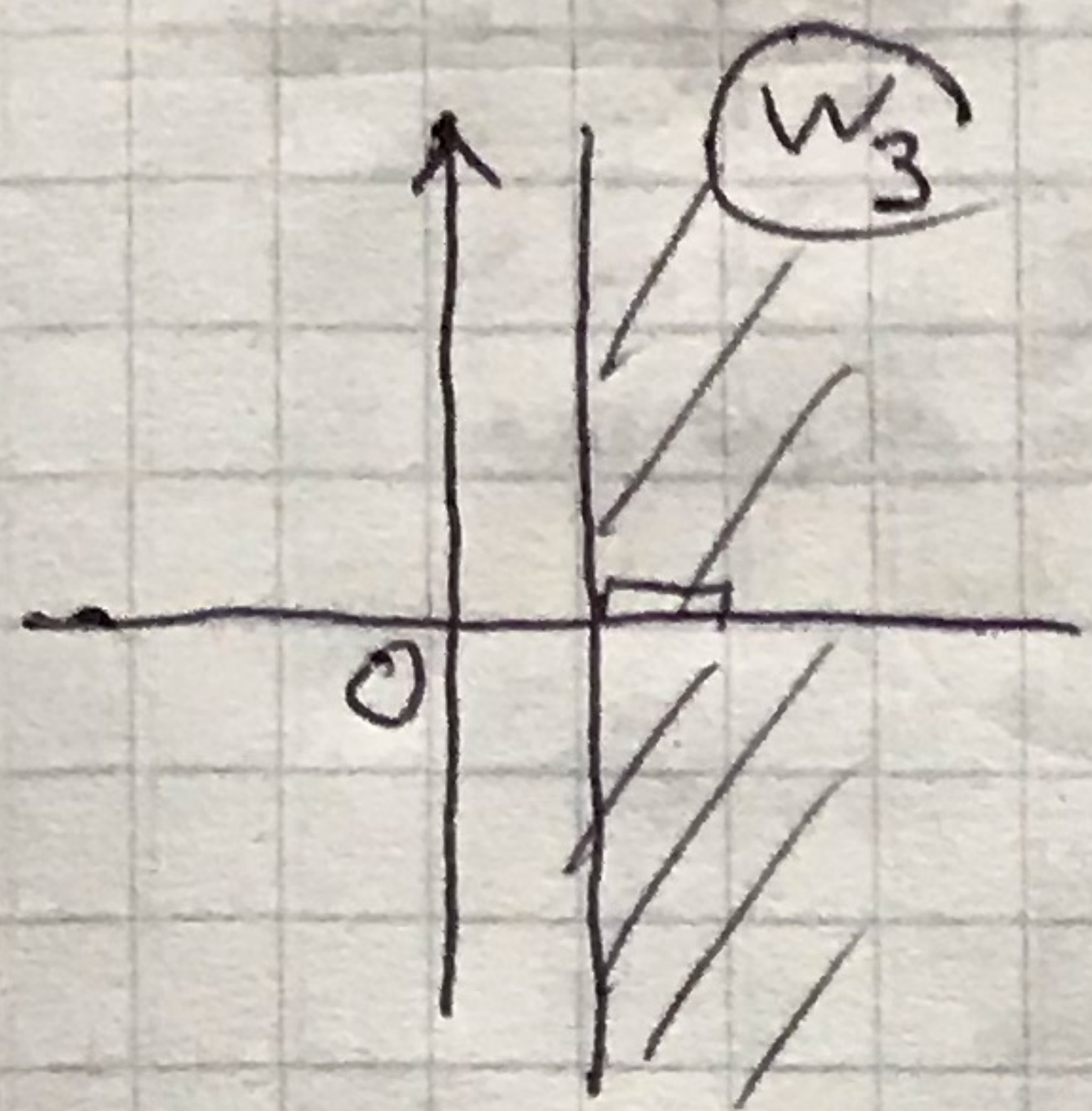
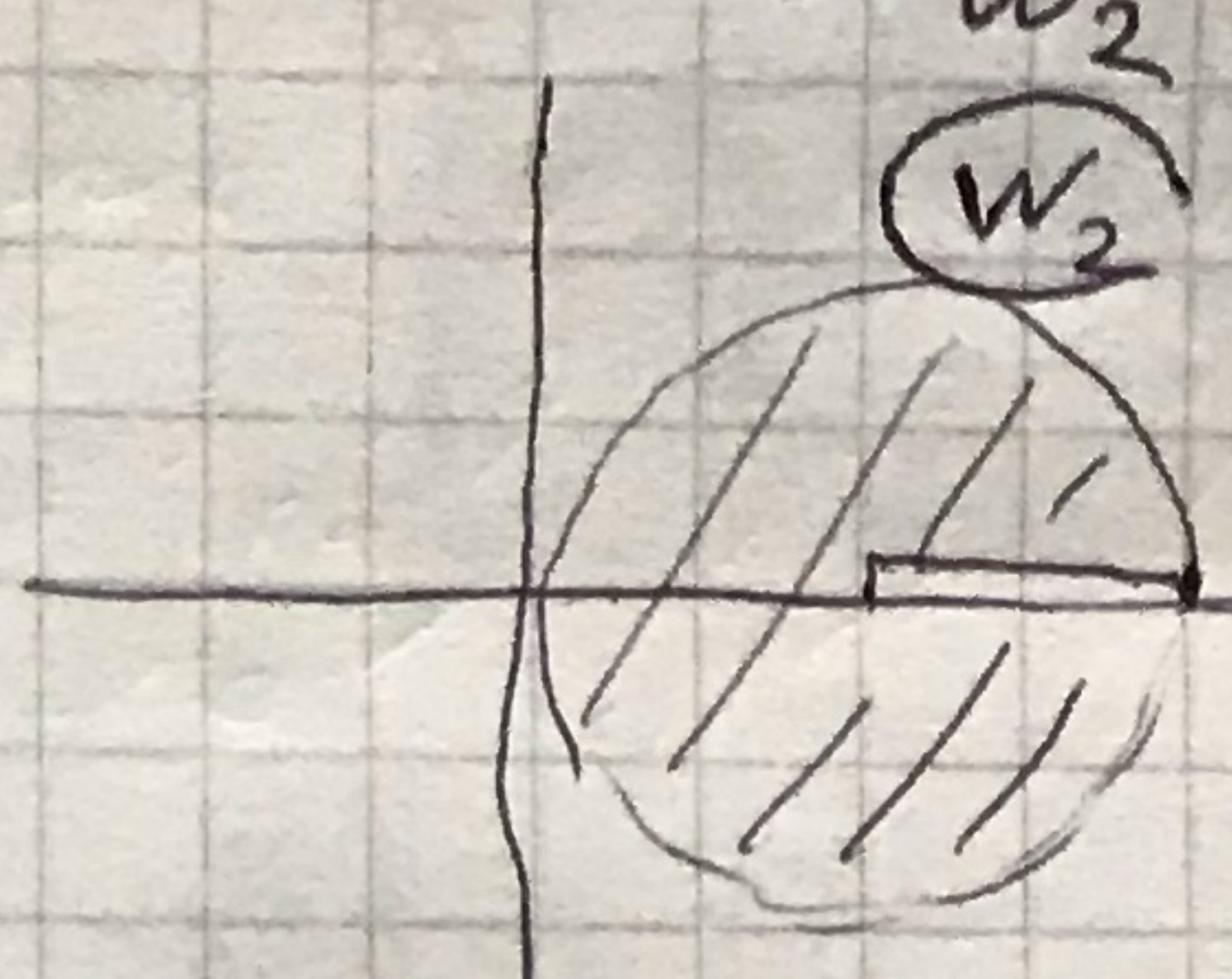
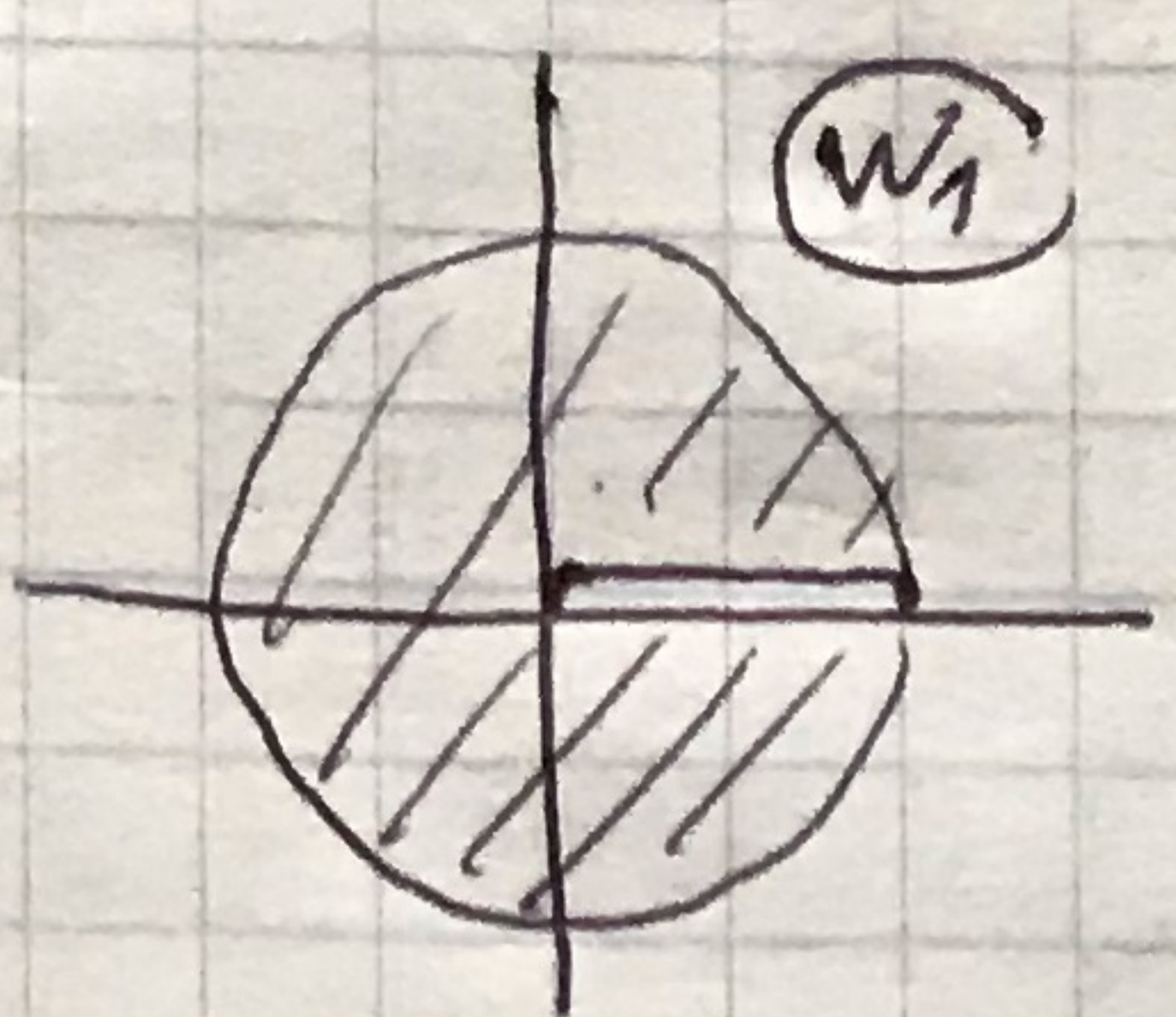
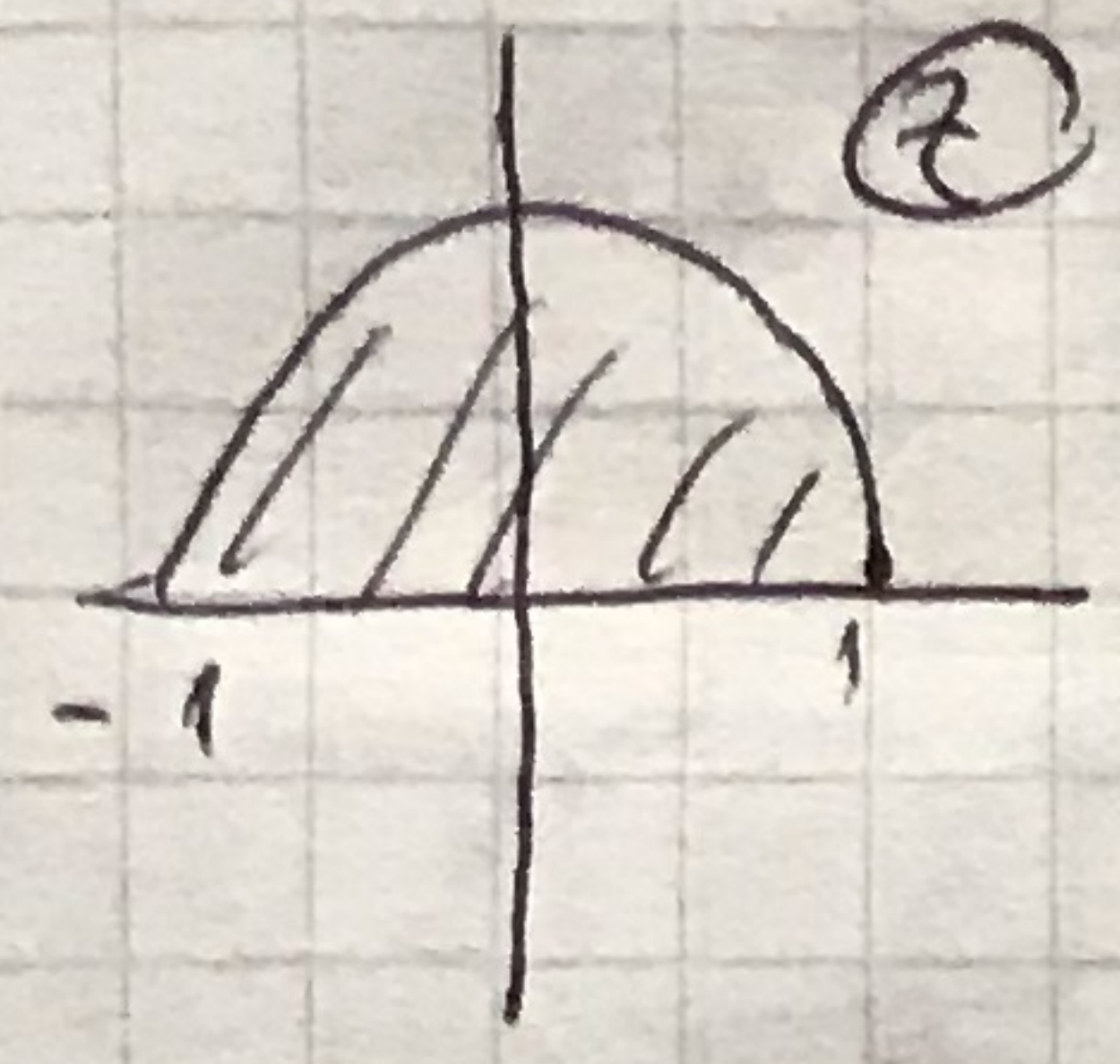
$$w_1 = \frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right), \quad w_2 = \frac{1}{2w_1}$$



N 2.125

Знайти образ півсфери $|z| < 1, \text{Im } z > 0$
 при відображенні $w = \frac{1}{z^2 + 1}$

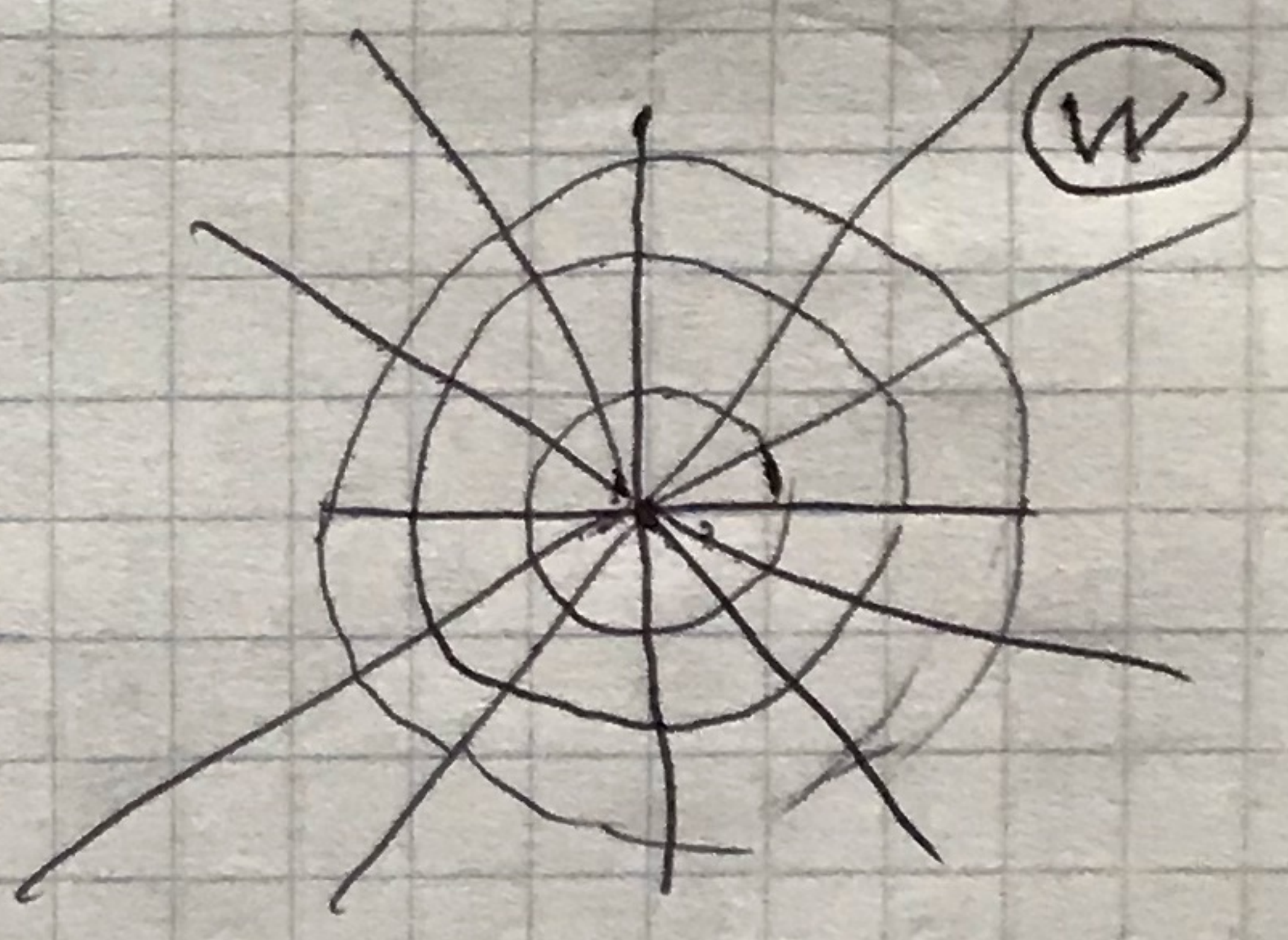
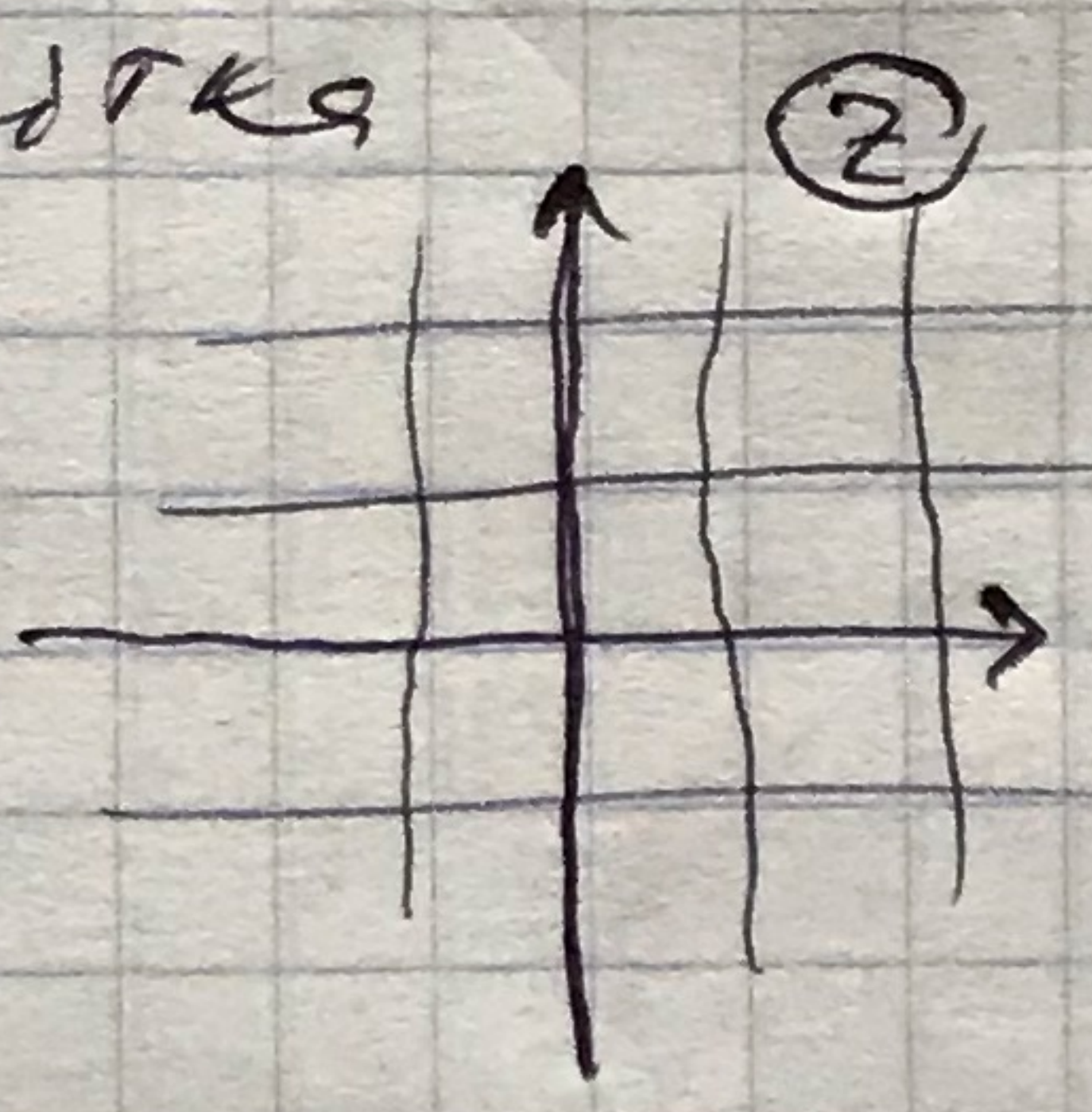
Розглянемо, $w_1 = z^2, w_2 = w_1 + 1, w_3 = \frac{1}{w_2}$



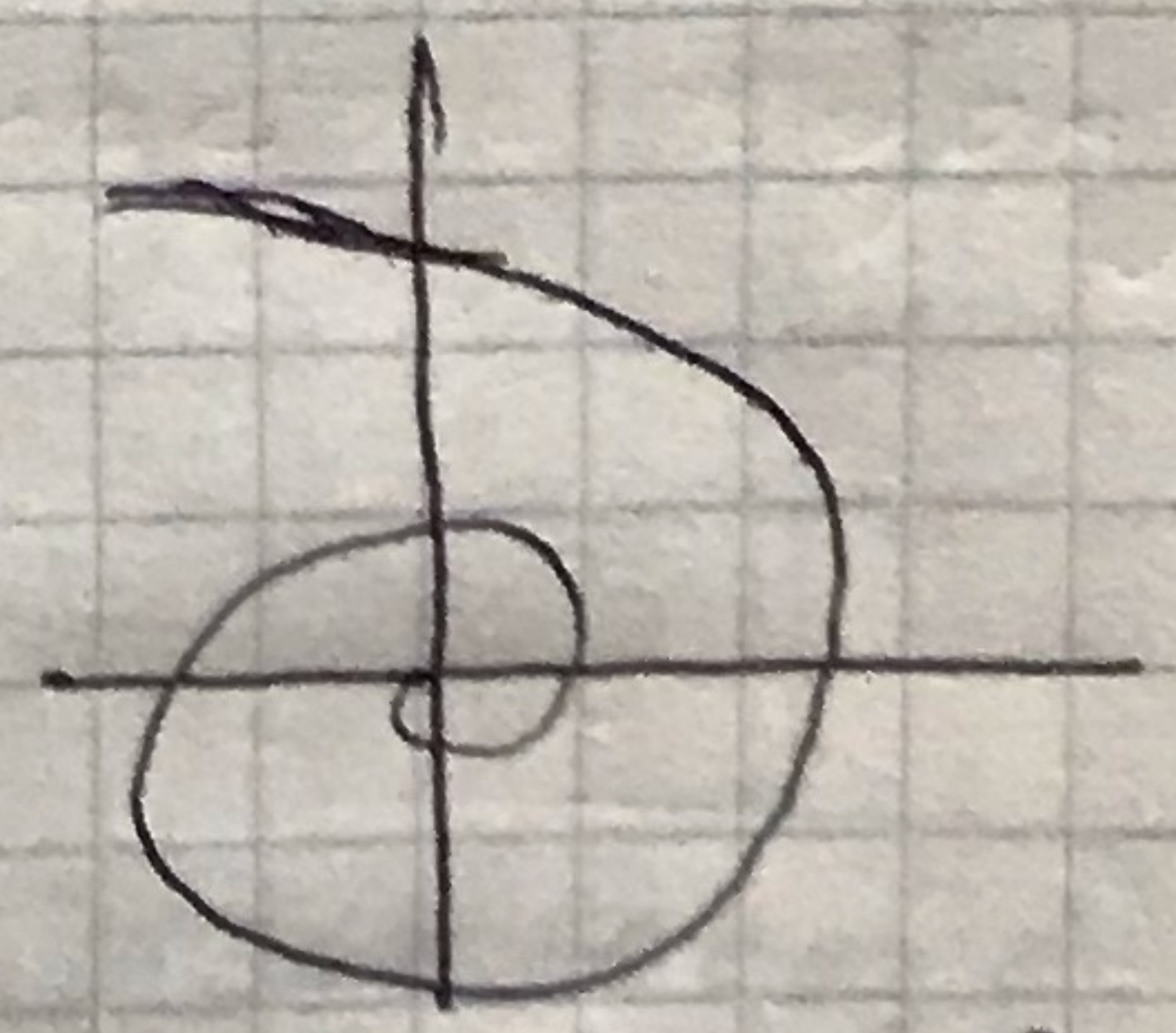
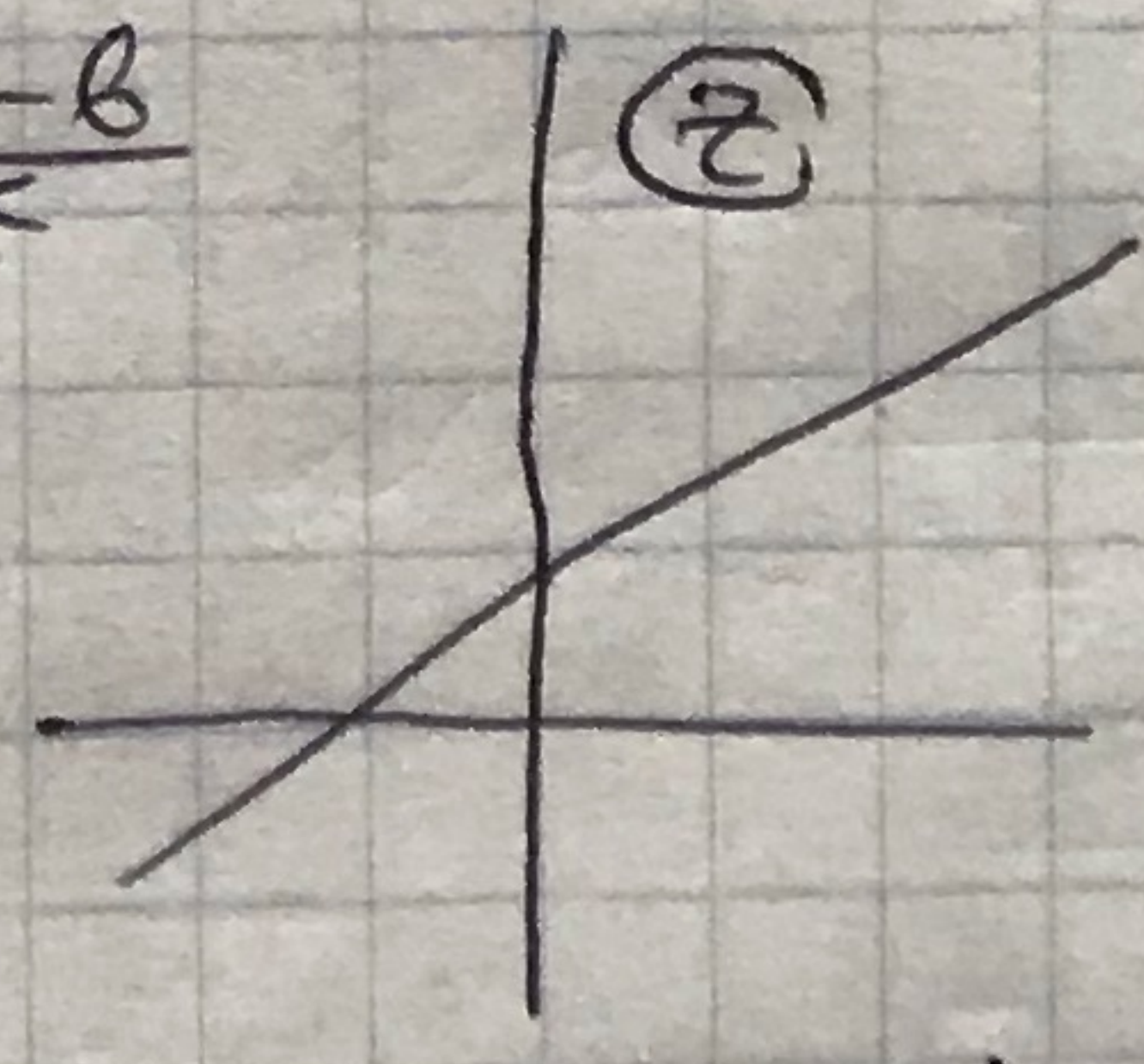
N 2.146

Знайти, у якій переворот задані області
 при відображенні $w = e^z$

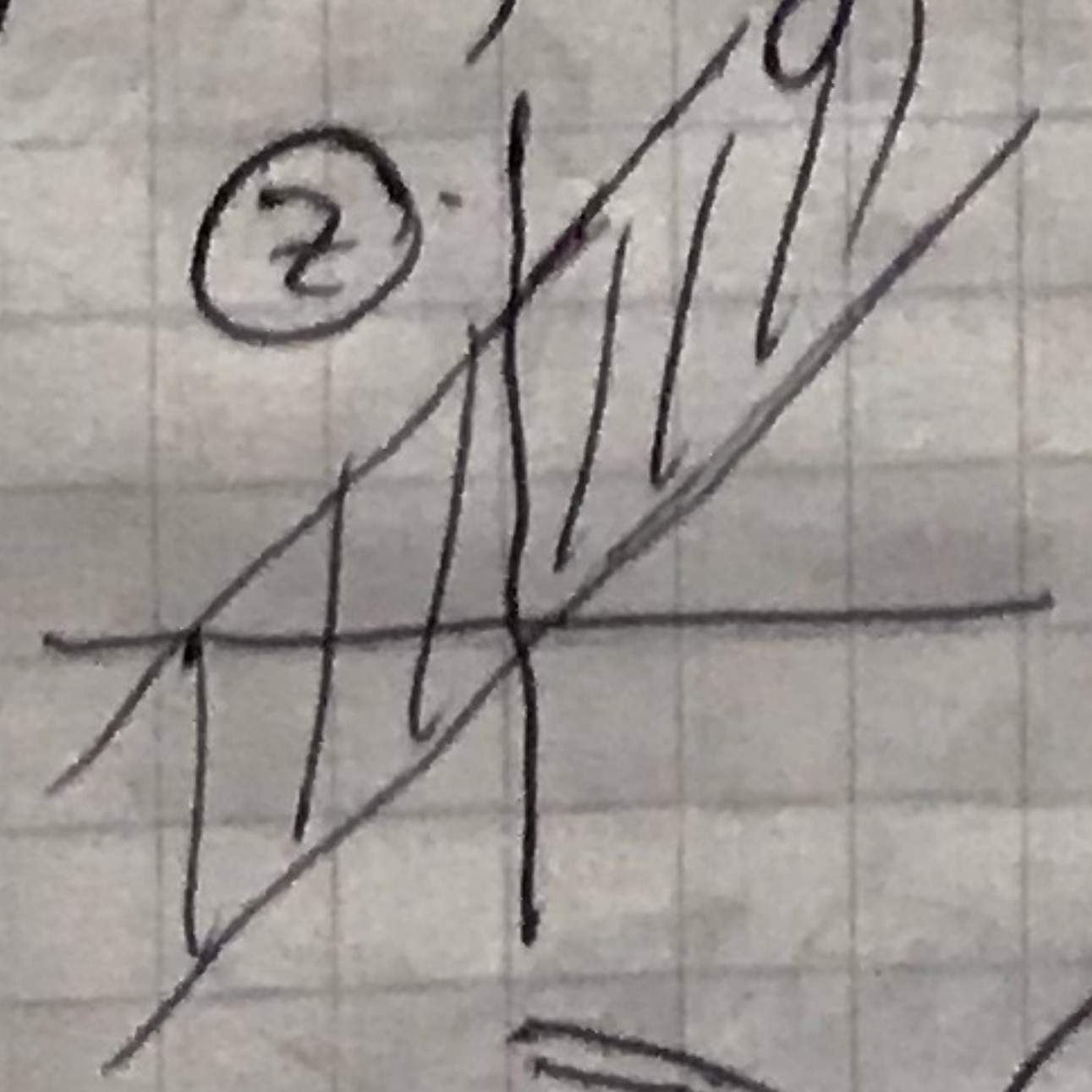
1) прямокутна сітка
 $x = c, y = c$
 $\rho = e^c, \theta = c$



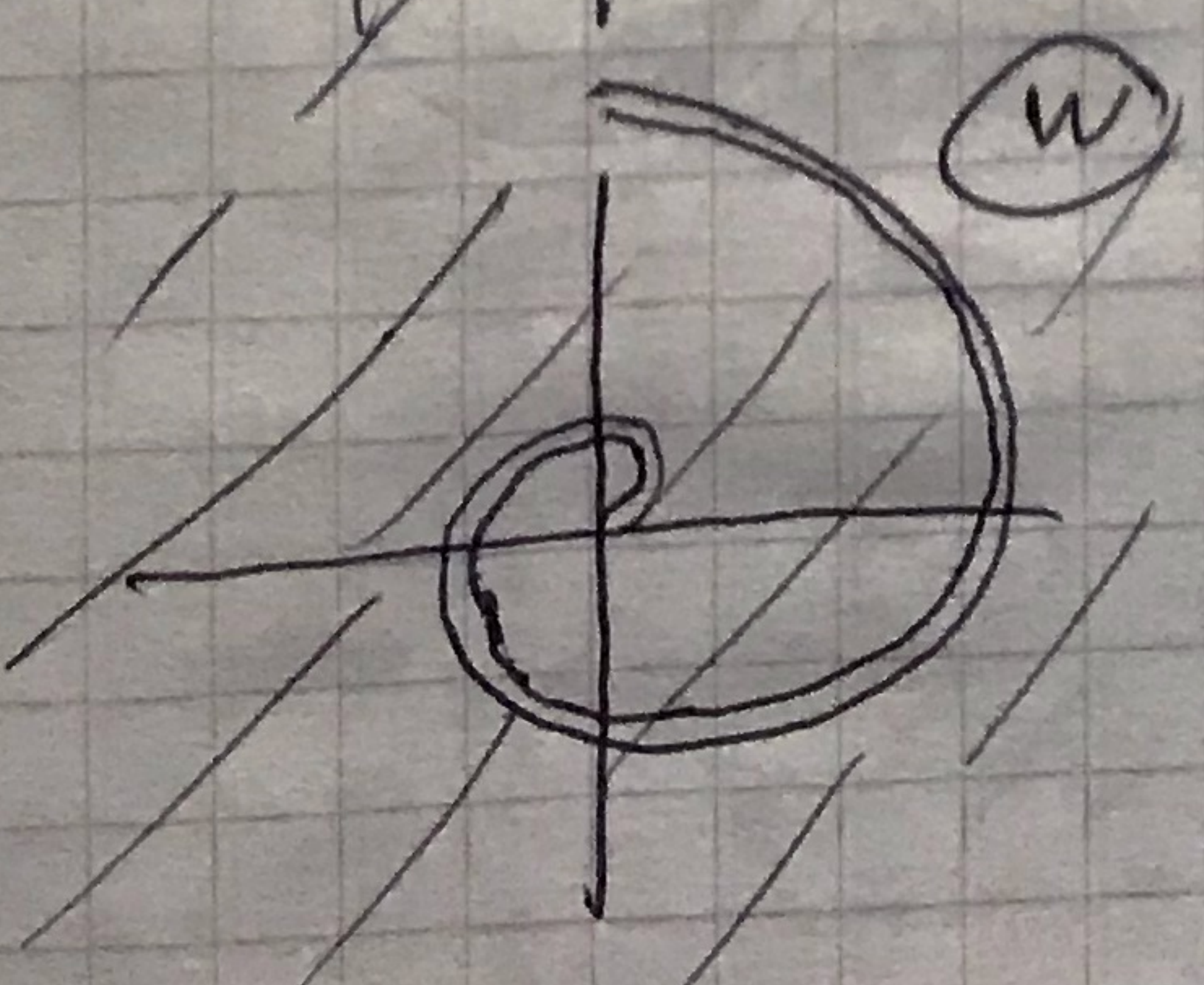
2) пряма
 $y = kx + b$
 $\rho = e^x, \theta = kx + b$
 $x = \frac{\theta - b}{k} \Rightarrow \rho = e^{\frac{\theta - b}{k}}$



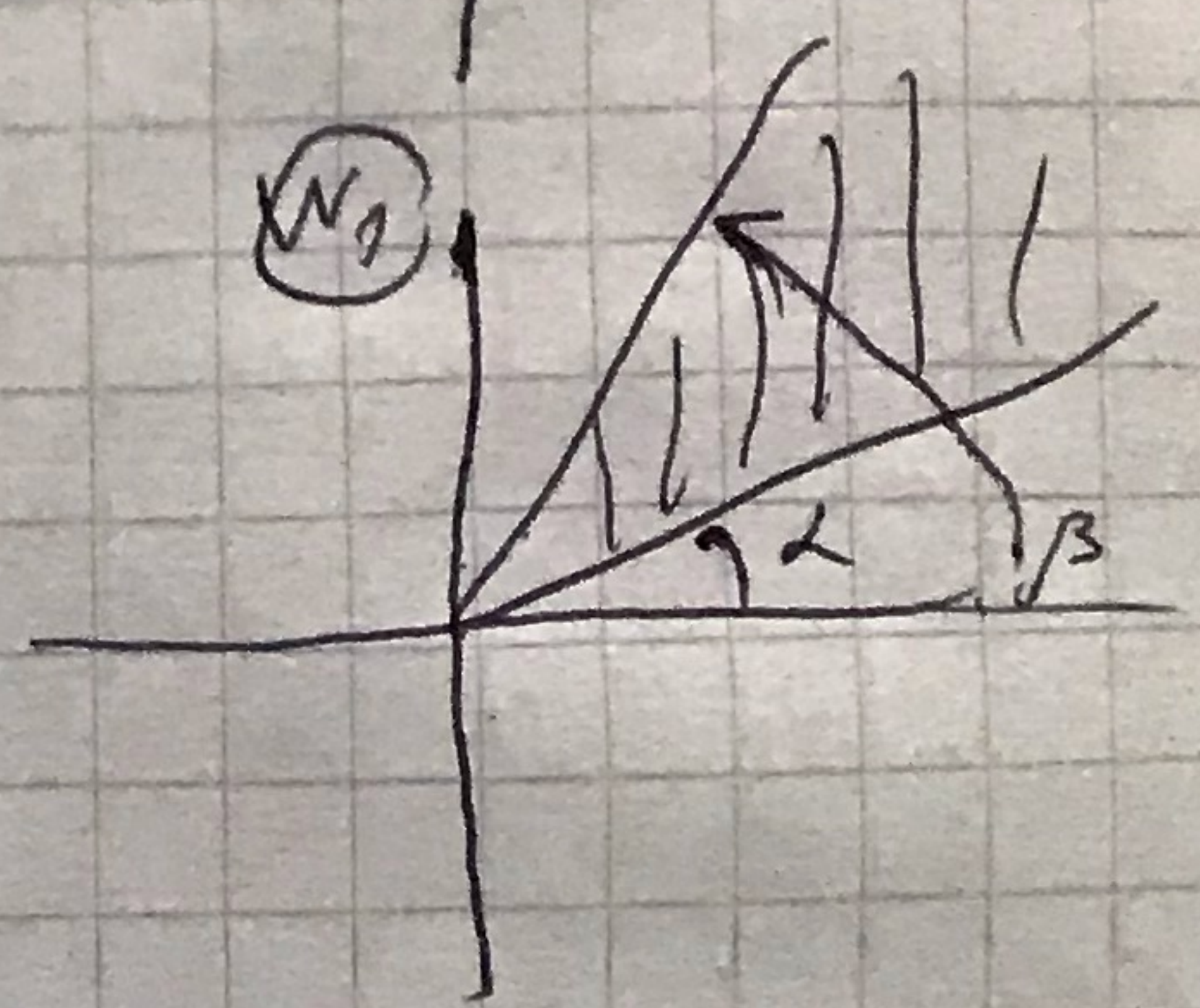
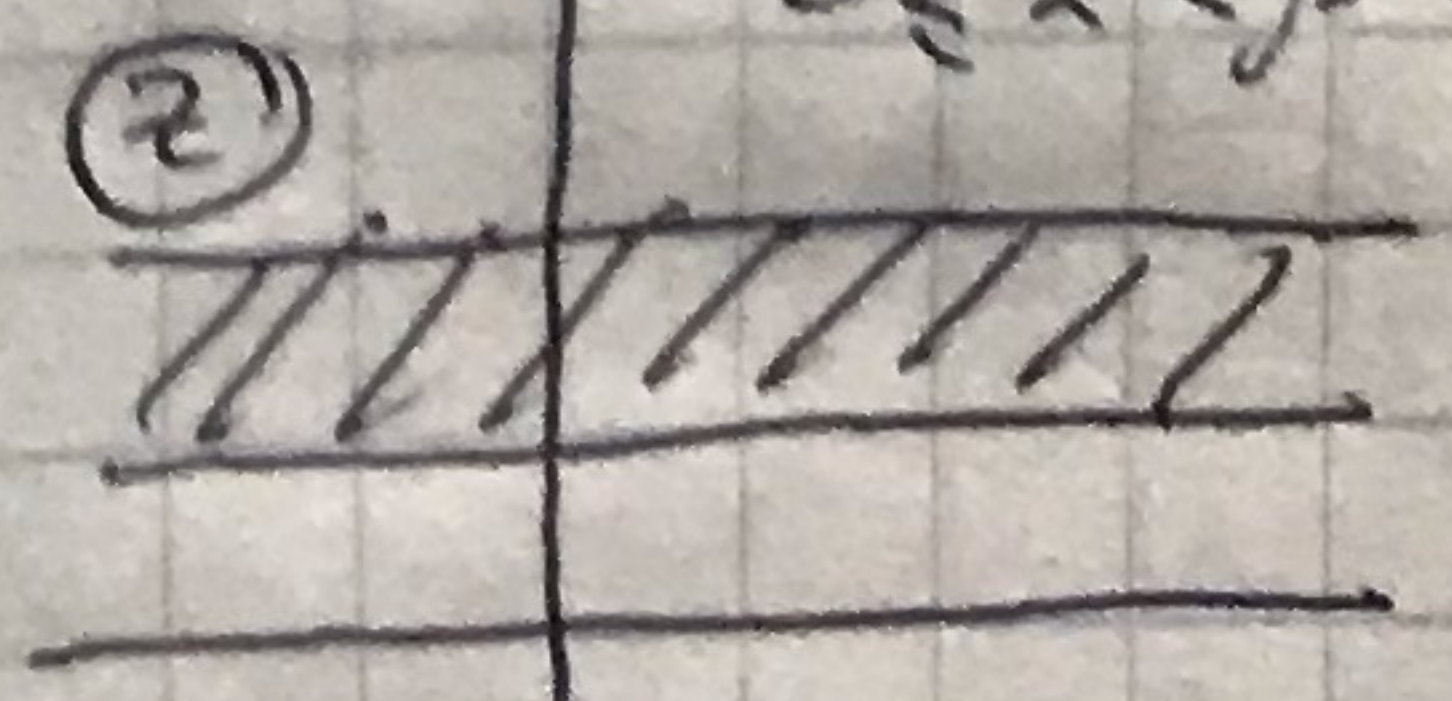
4) смуга між
 $y = x, y = x + 2\pi$



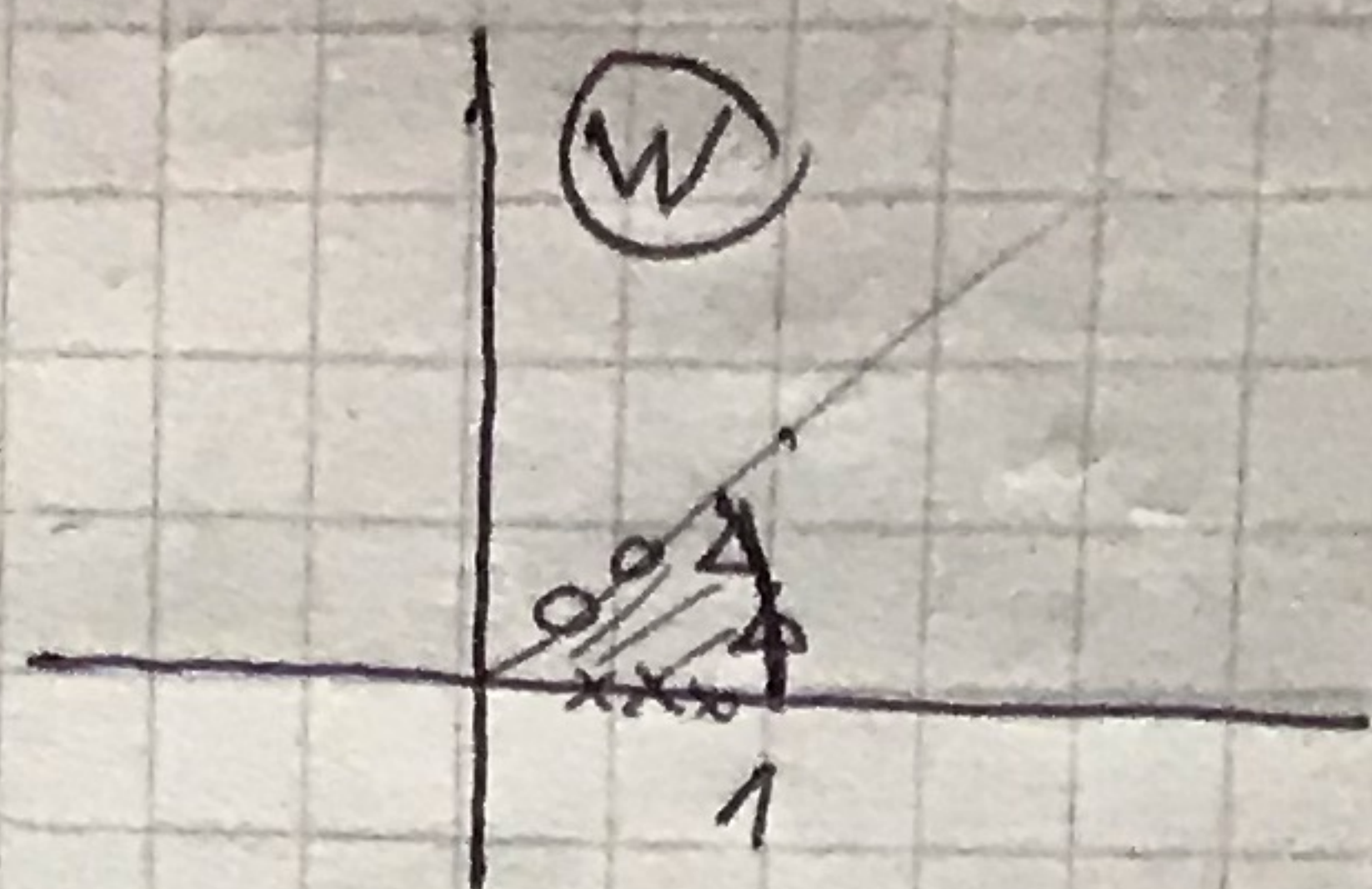
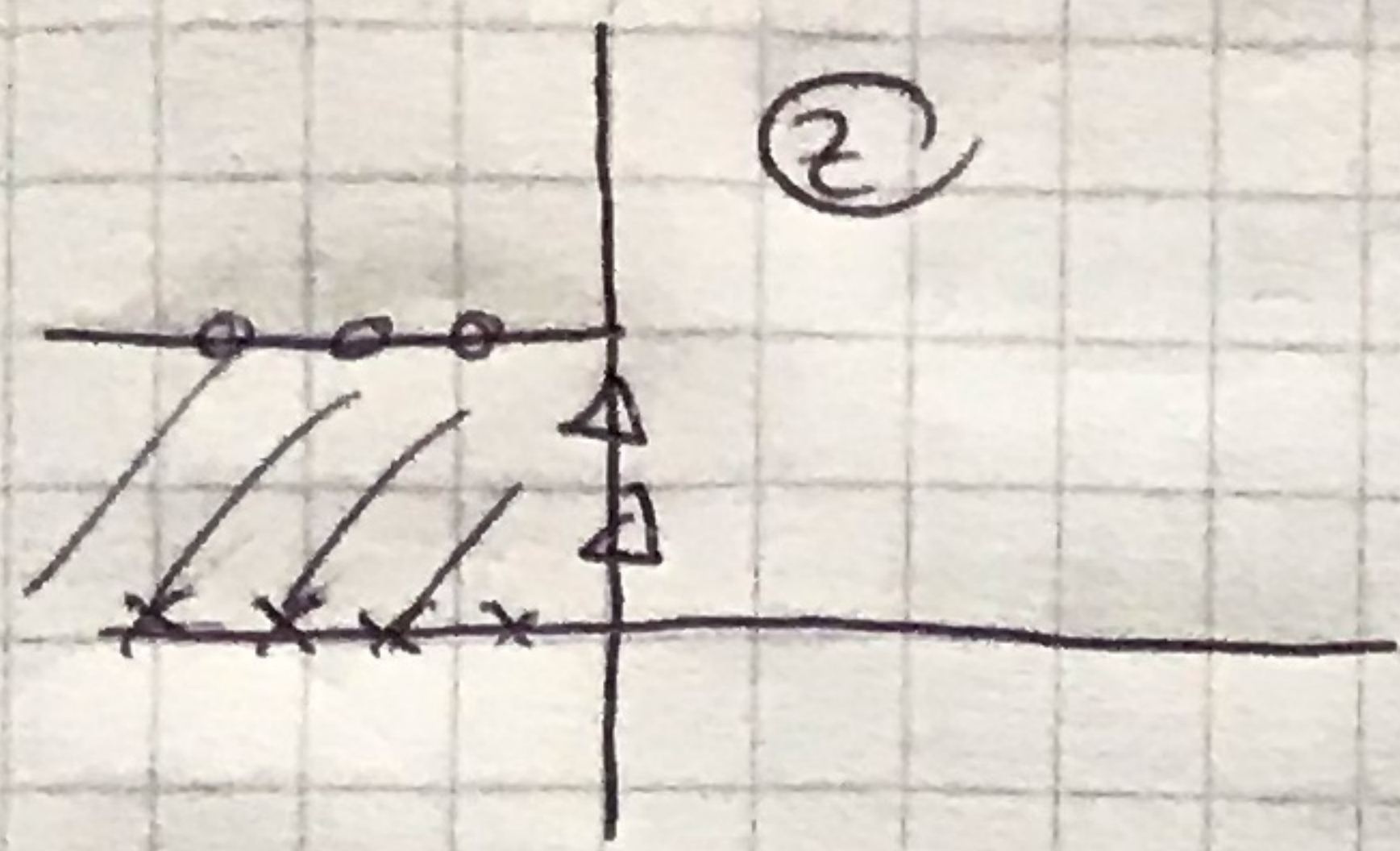
$\Rightarrow \rho = e^\theta$
 $\rho = e^{\theta - 2\pi}$



3) смуга $2 < y < 8,$
 $0 \leq x < \beta \leq 2\pi$



5) повсюду $x < 0$, $0 < y < 2\pi$

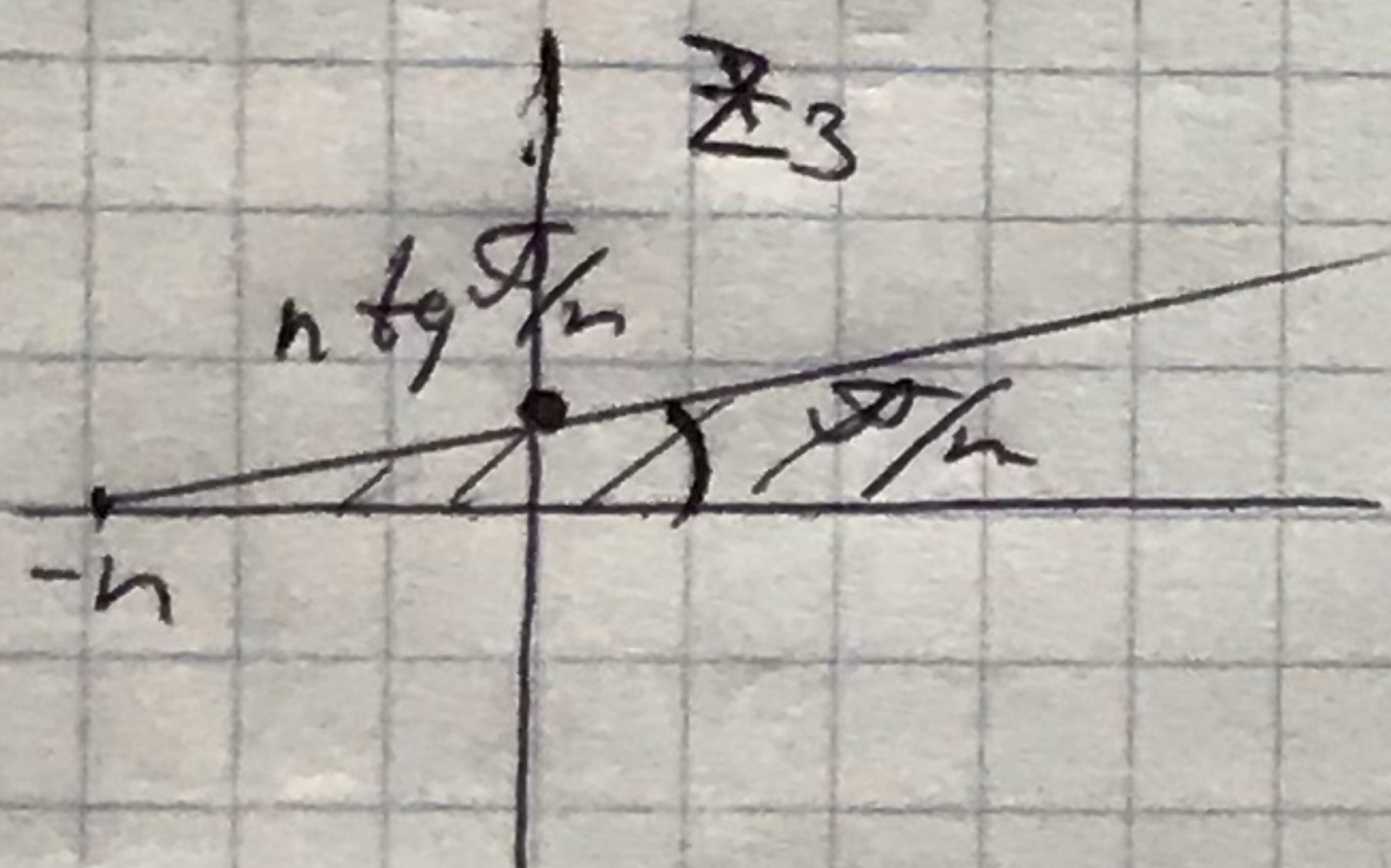
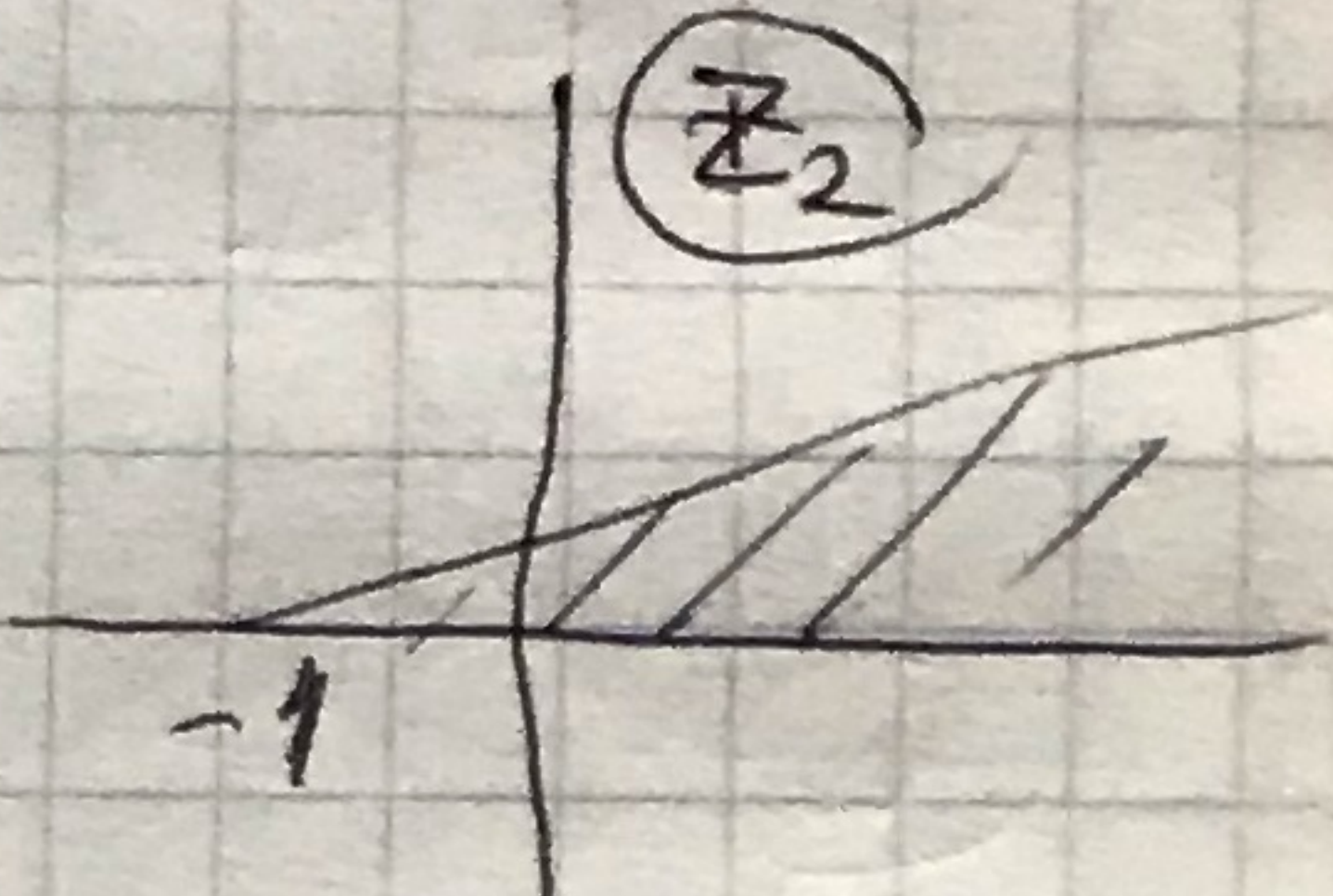
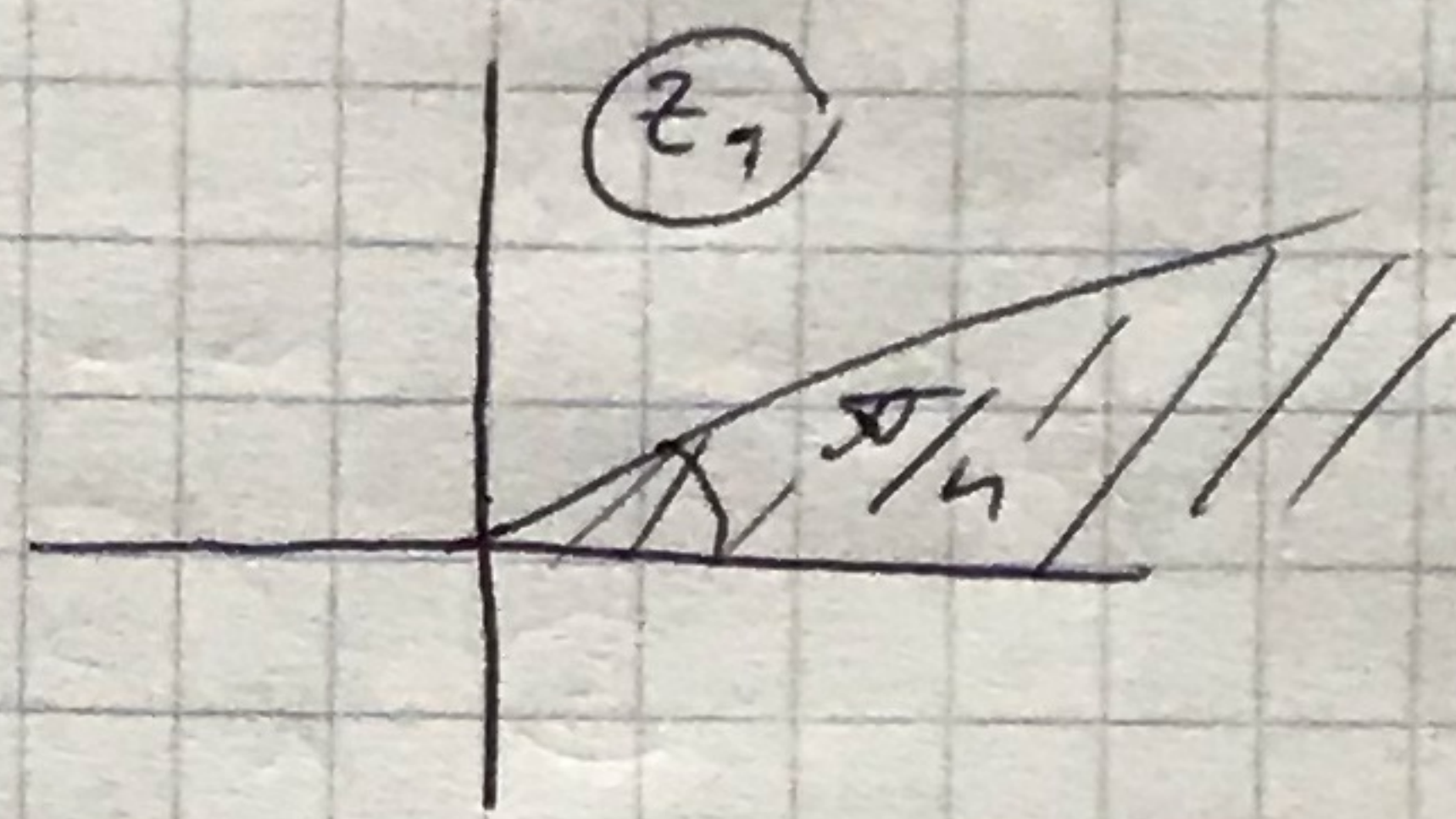
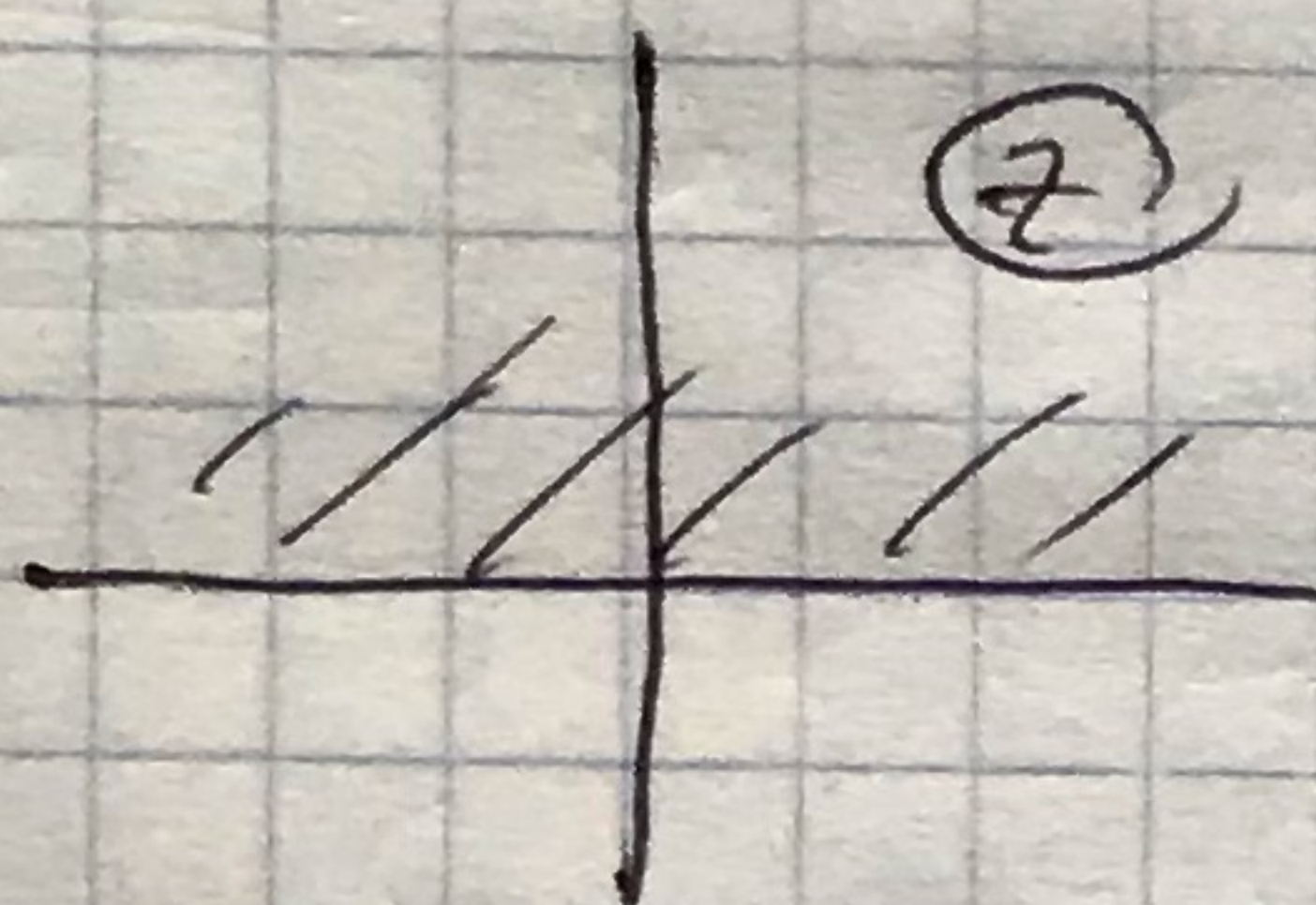


N 2.147 Значит преобраз верхнюю половину плоскости при отображении $w = (1 + \frac{z}{n})^n$?

Значит преобраз верхнюю половину плоскости при ~~уменьшении~~ ~~увеличении~~ $n \rightarrow \infty$.

Розв'язок. $z = n(\sqrt[n]{w} - 1)$

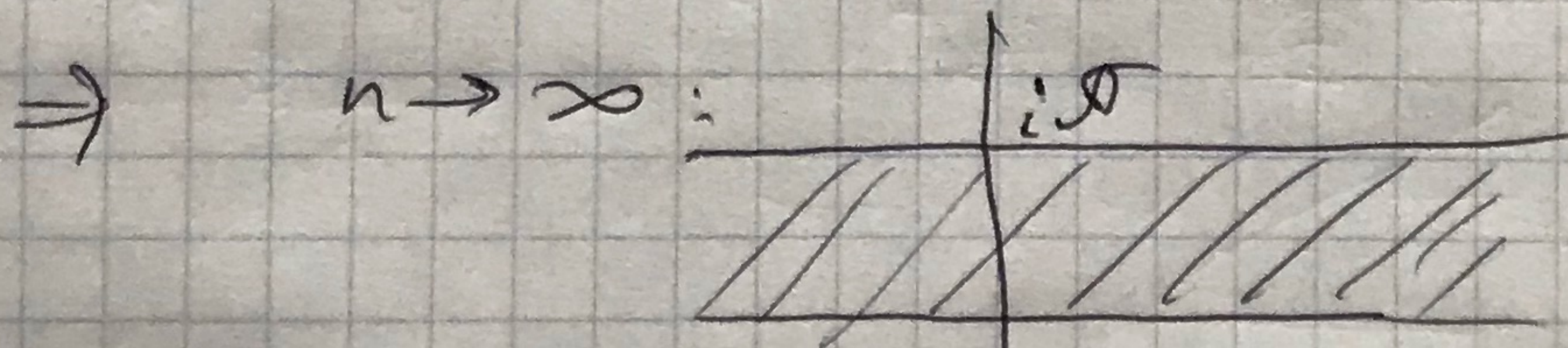
$z_1 = \sqrt[n]{w}$, $z_2 = z_1 - 1$, $z_3 = n z_2$.



$n \rightarrow \infty$:

$\lim_{n \rightarrow \infty} n \operatorname{tg} \frac{\pi}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} = \pi$

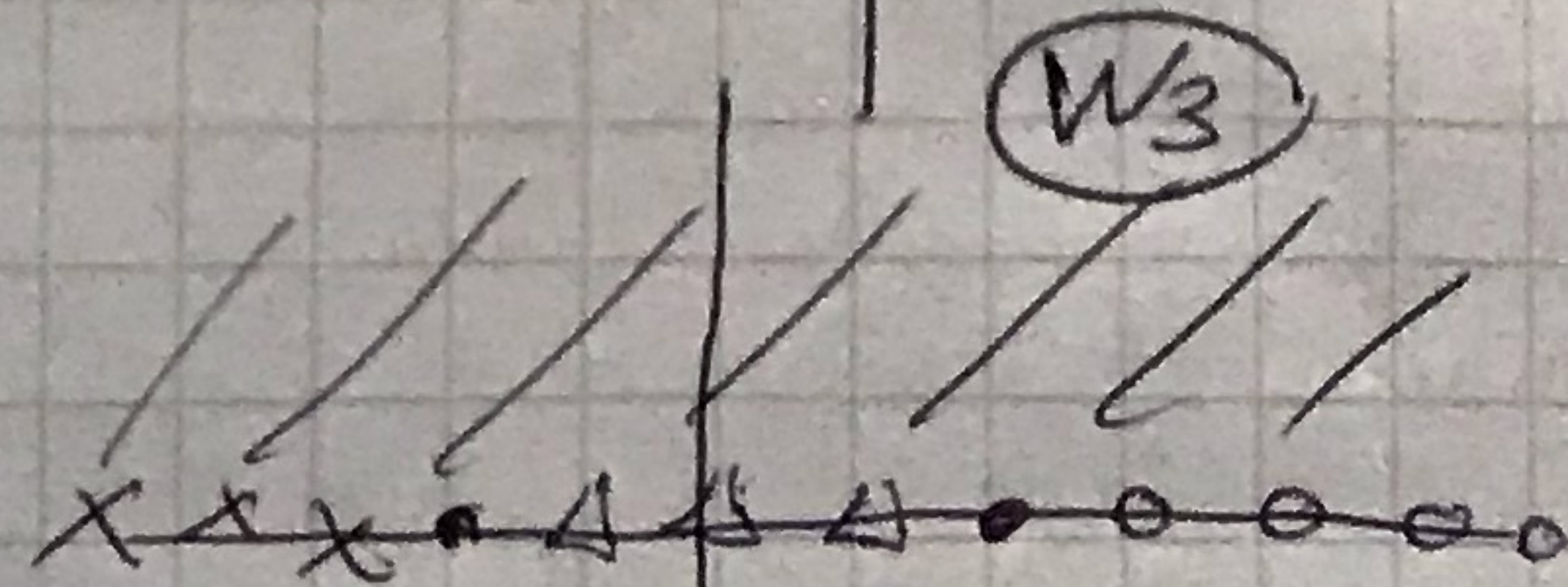
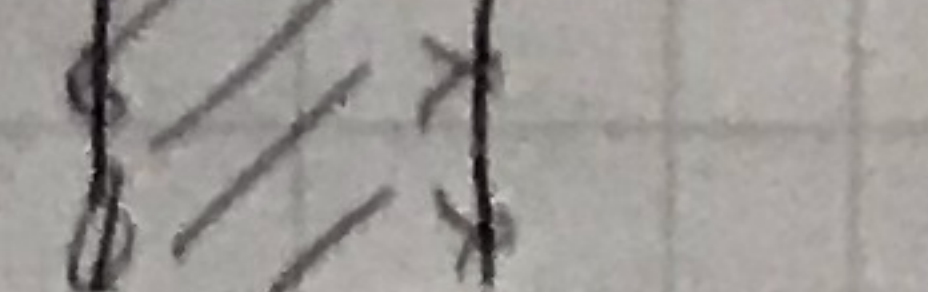
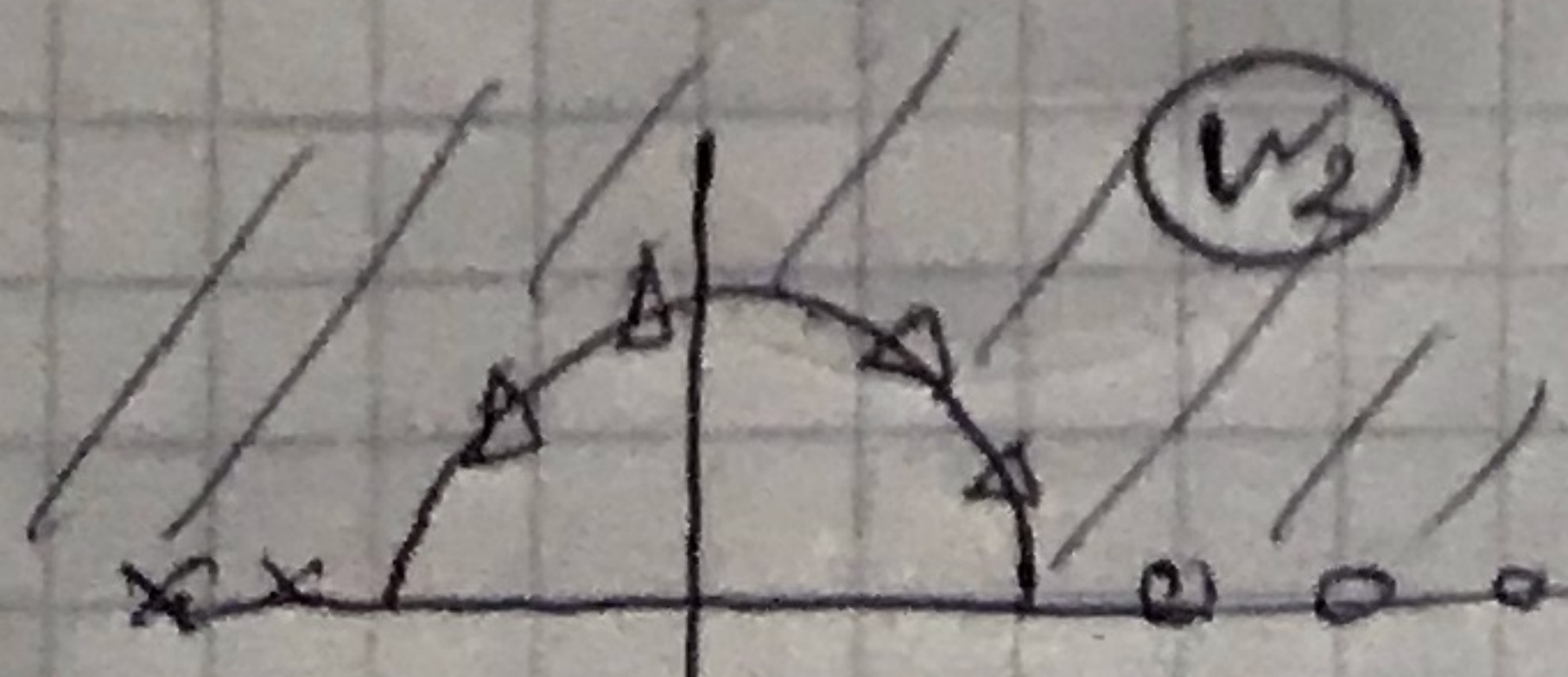
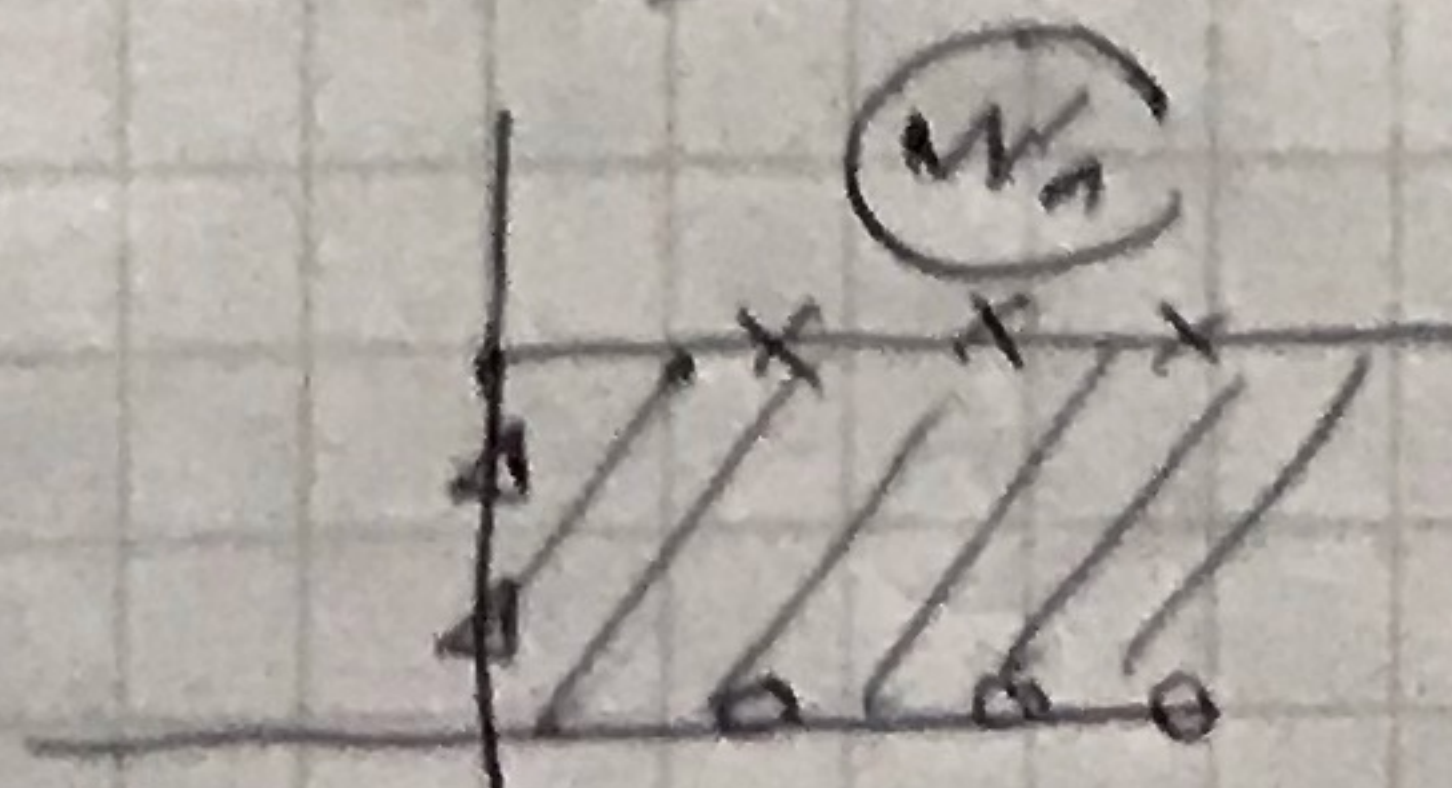
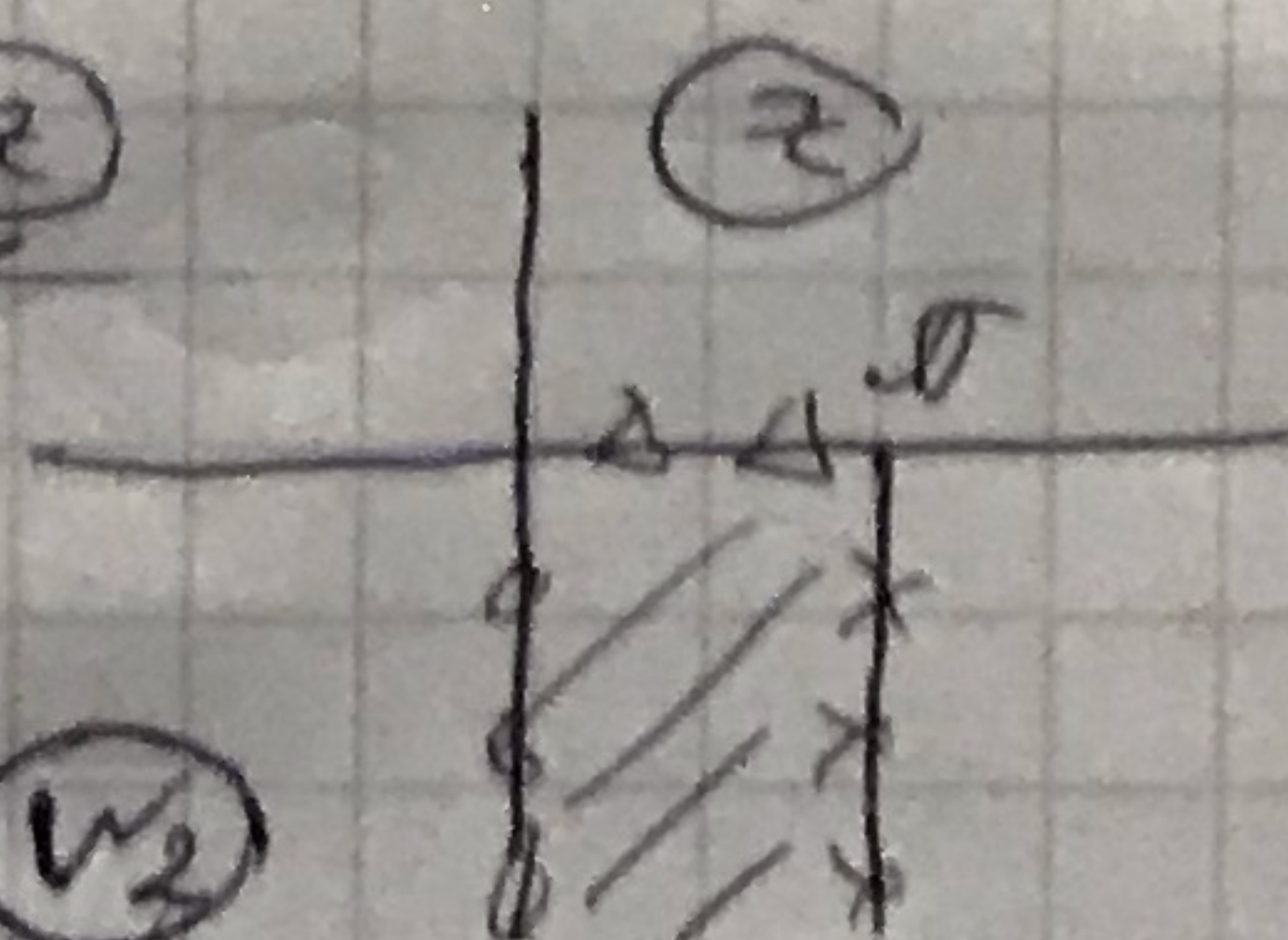
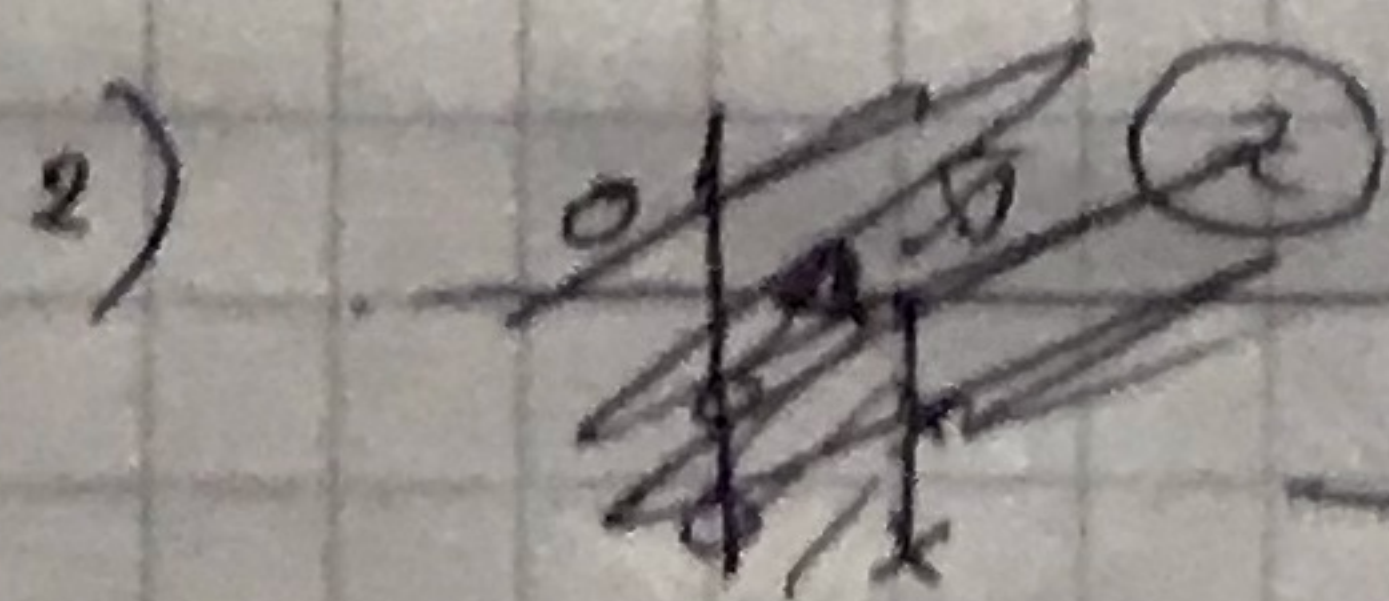
$\operatorname{Re} \frac{\pi}{n} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$



N 2.150 Значит образ заданной области

- при отображении $w = \cos z$
- 2) повсюду $0 < x < \pi, y < 0$
- 4) половине $-\pi/2 < x < \pi/2, y > 0$

Розв'язок. $w = \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \Rightarrow w_1 = e^{iz}, w_2 = e^{-iz}, w_3 = \operatorname{Re}(w_2)$



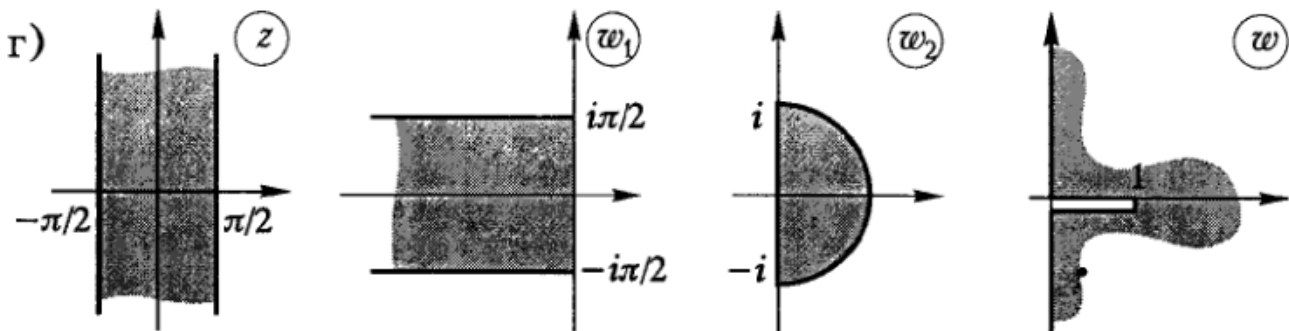
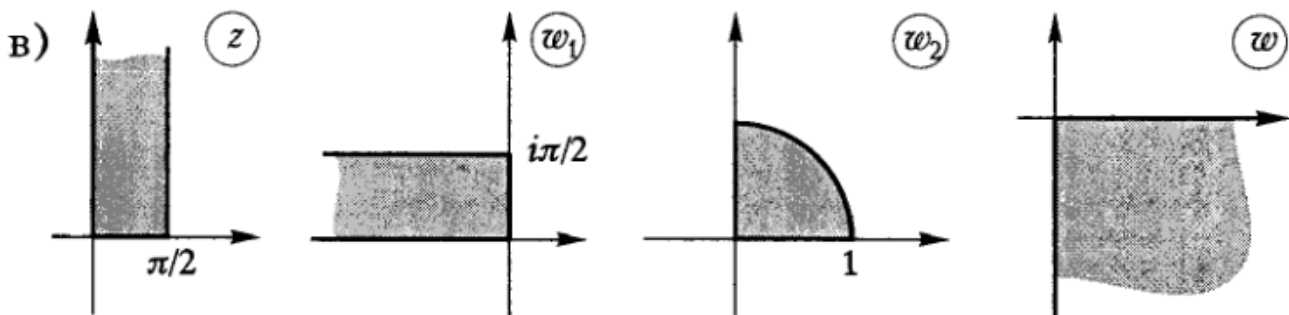
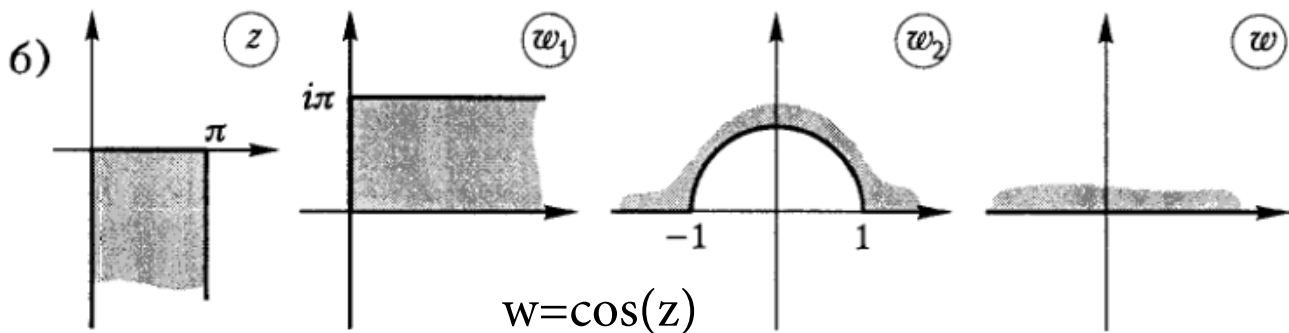
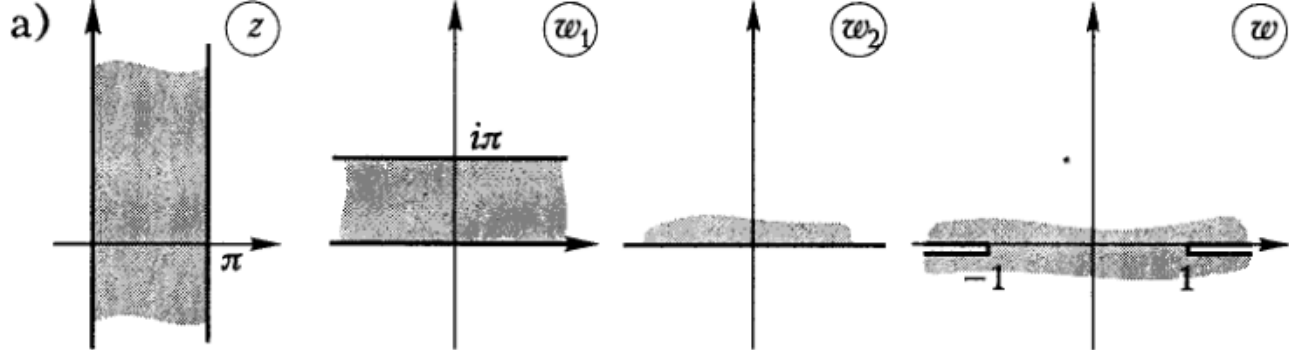


Рис. 36

функцией $w = \operatorname{tg} z$ (см. рис. 38).

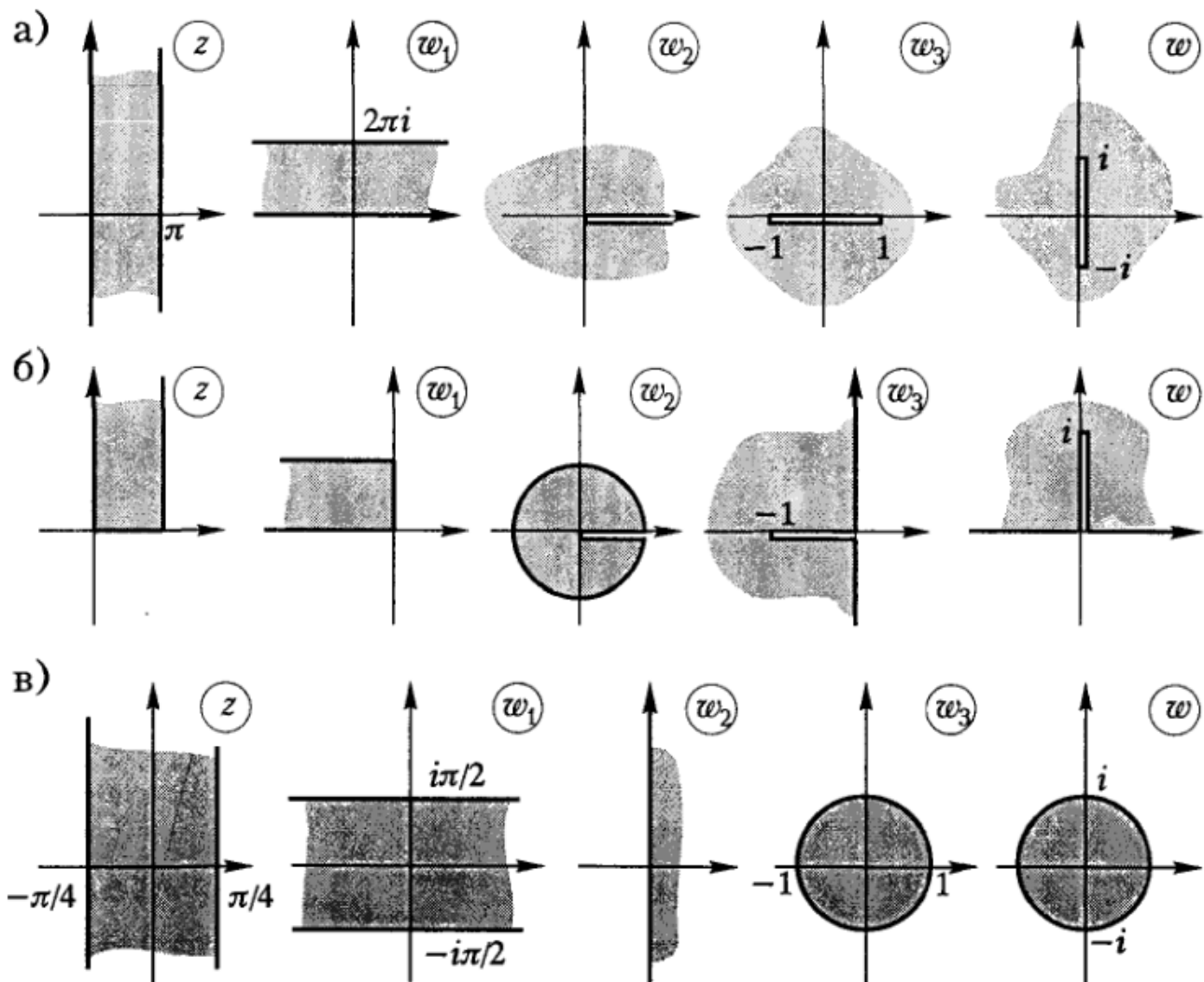


Рис. 38