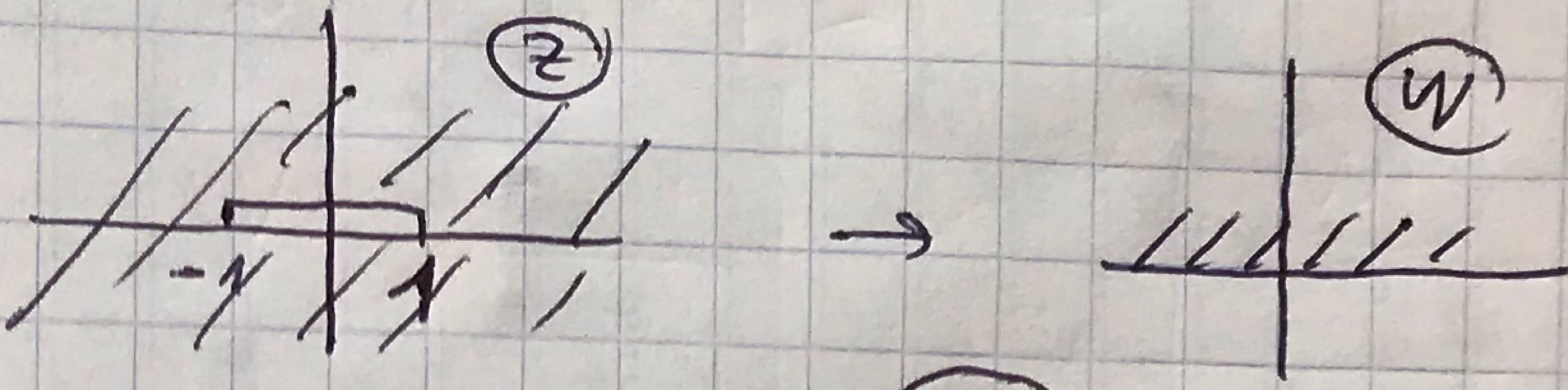
Заняття 13. Конформні відображення

N 2.93 B Відобразити площину з розрізом по відрізку $[-1, 1]$ у верхню півплощину.

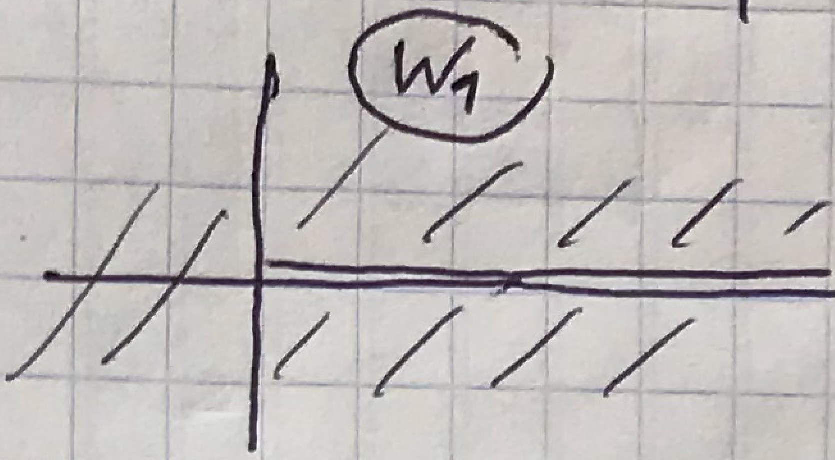
Розв'язок. $\mathbb{C} \setminus [-1, 1] \to \operatorname{Im} w > 0$



w_1: $-1 \to 0$

$1 \to +\infty$

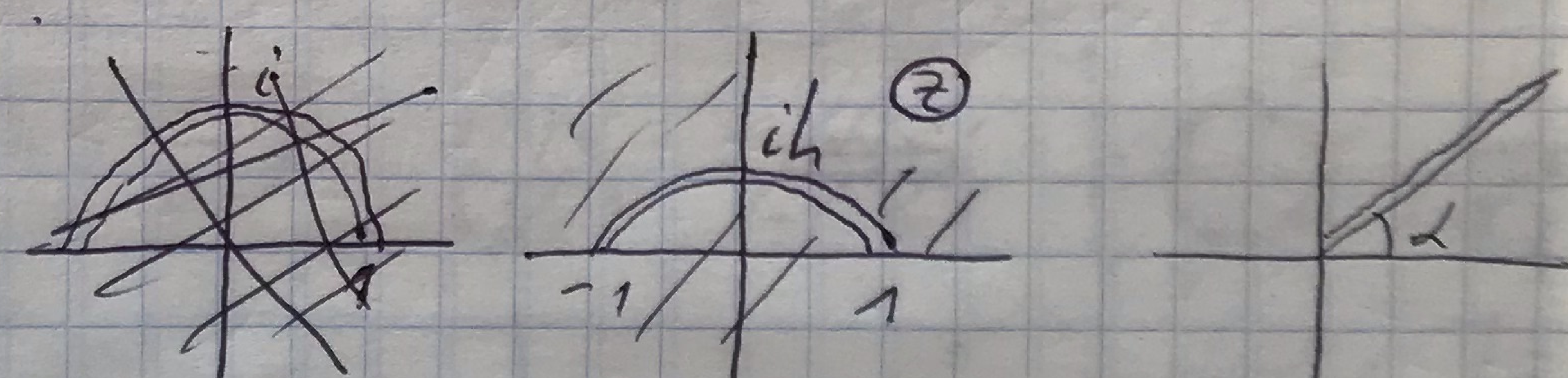
$w_1 = \frac{z+1}{1-z}$ $\qquad w_2 = \sqrt{w_1}$



Відповідь: $w = \sqrt{\frac{z+1}{1-z}}$.

N 2.98 B Відобразити на верхню півплощину площину з розрізом по дузі кола, що з'єднує точки -1 та 1 та проходить через точку ih, де $0<h<1$.

Розв'язок.



$w_1 = \frac{z+1}{1-z}$, $\quad w_1(ih) = \frac{1+ih}{1-ih} = \frac{1-h^2}{1+h^2} + \frac{2ih}{1+h^2}$

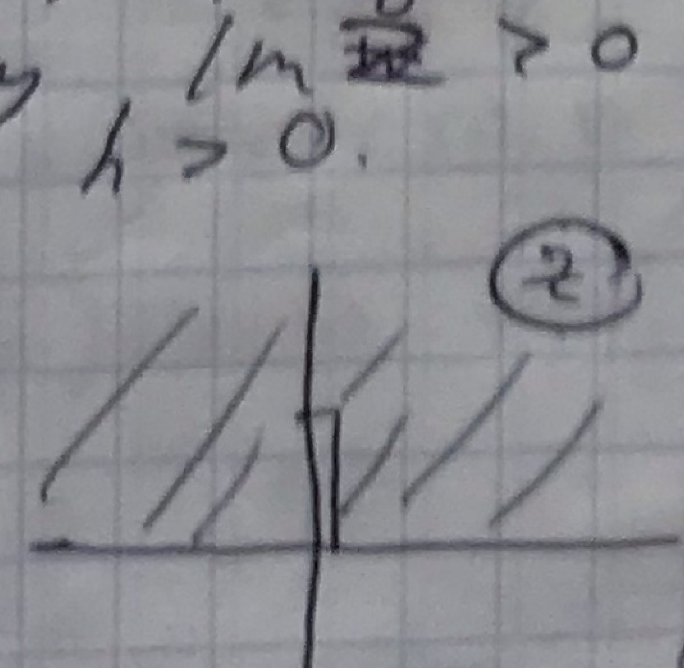
$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2h}{1-h^2} \Rightarrow \alpha = \operatorname{arctg}\frac{2h}{1-h^2}$

$w_2 = e^{-i\alpha} \cdot w_1$, $\quad w_3 = \sqrt{w_2}$.

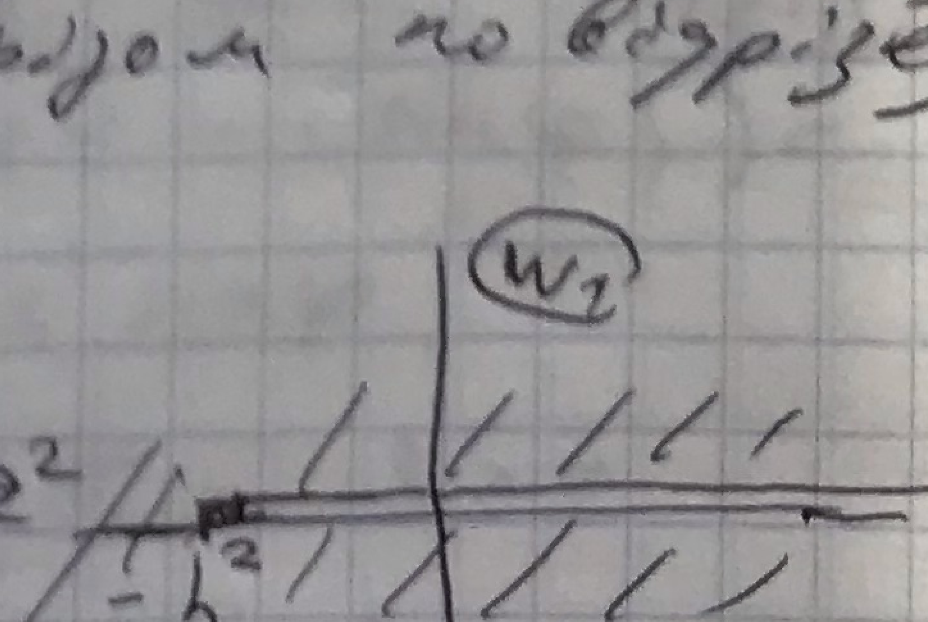
Відповідь: $w = e^{-i\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{z+1}{1-z}}$

N 2.99 B Відобразити на верхню півплощину півплощину $\operatorname{Im} z > 0$ з розрізом по відрізку $[0, ih]$, $h > 0$.

Розв'язок.



$w_1 = z^2$



$-h^2 \to 0$,

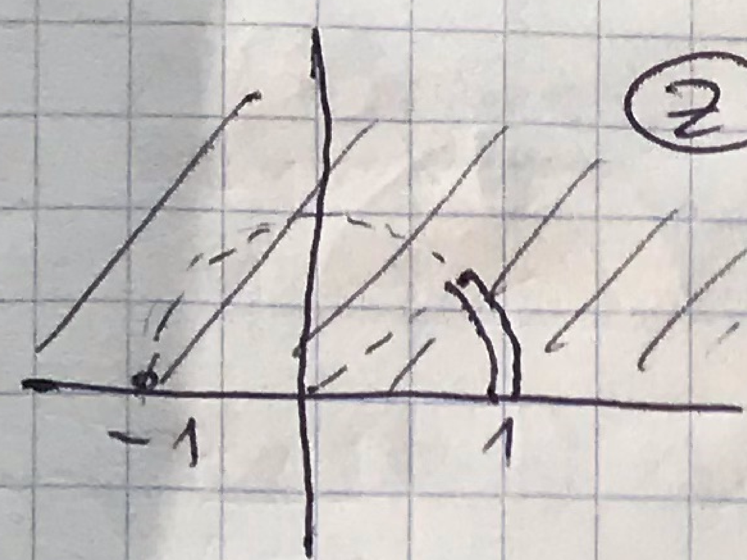
$\infty \to \infty$ $\quad \Rightarrow \quad w_2 = w_1 + h^2$

$w_3 = \sqrt{w_2}$

Відповідь: $w = \sqrt{z^2 + h^2}$.

$\boxed{№ 2.101\text{ В}}$ Відобразити на верхню півплощину півплощину $\operatorname{Im} z > 0$ з розрізом по дузі кола $|z|=1$ від точки $z=1$ до точки $z=e^{i\alpha}$, де $0<\alpha<\pi$.

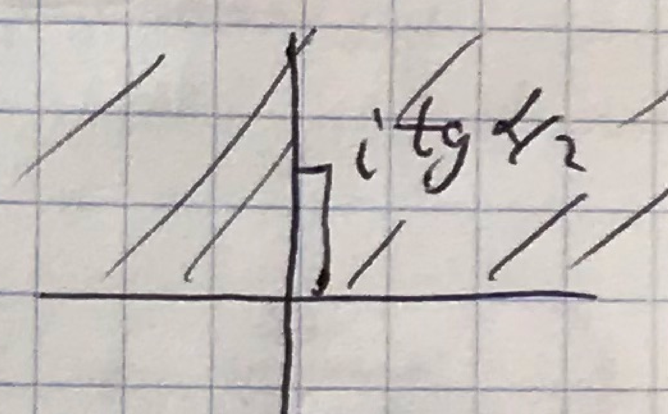
Розв'язок.



w_1: $1 \to 0$, $-1 \to \infty$

$$w_1 = \frac{z-1}{z+1} \qquad w_1(e^{i\alpha}) = \frac{e^{i\alpha}-1}{e^{i\alpha}+1} = \frac{e^{i\alpha/2}-e^{-i\alpha/2}}{e^{i\alpha/2}+e^{-i\alpha/2}} = i\,tg\frac{\alpha}{2}$$

$\Rightarrow$

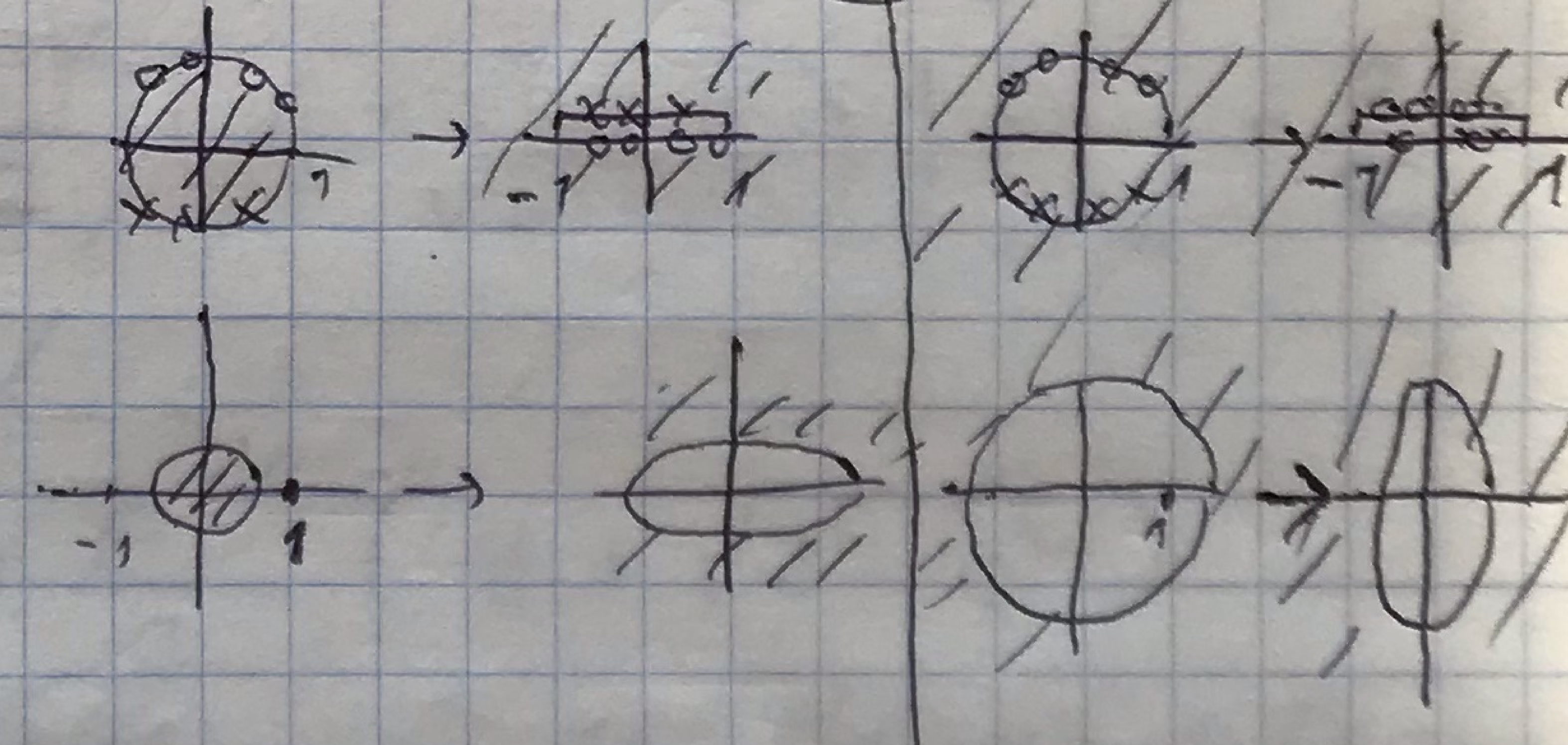


$$\Rightarrow w_2 = \sqrt{w_1^2 + tg^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Відповідь: $w = \sqrt{\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2 + tg^2\frac{\alpha}{2}}$.

Функція Жуковського

$$\mathcal{M}(z) = \frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$$



$\boxed{№ 2.107\text{ В}}$ Знайти області, на які функція Жуковського відображає

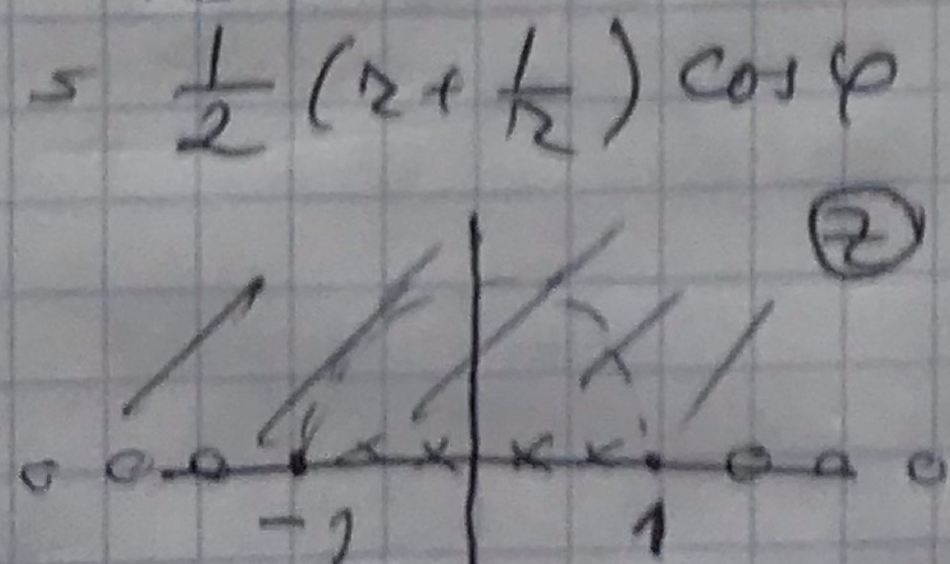
5) півплощину $\operatorname{Im} z > 0$.

$$w = \frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right) = /\ z = re^{i\varphi}\ / = \frac{1}{2}\left(re^{i\varphi} + \frac{1}{re^{i\varphi}}\right) =$$

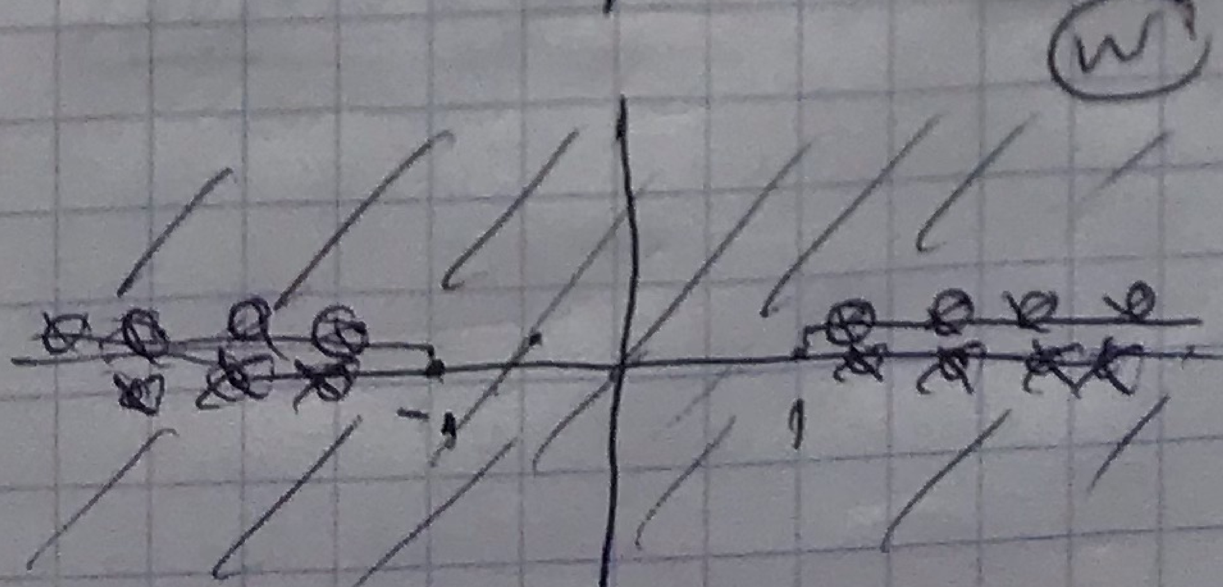
$$= \frac{1}{2}\left(r(\cos\varphi + i\sin\varphi) + \frac{1}{r}(\cos\varphi - i\sin\varphi)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(r+\frac{1}{r}\right)\cos\varphi + \frac{1}{2}\left(r-\frac{1}{r}\right) i\sin\varphi.$$

$0<\varphi<\pi$, $r>0$



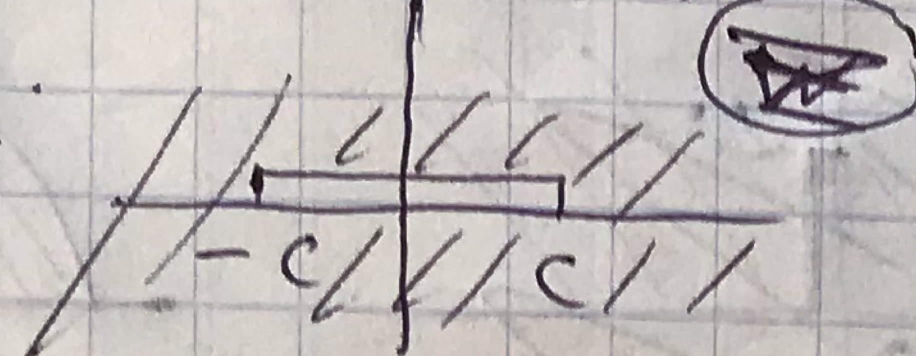
$\operatorname{Im} z = 0 \Rightarrow \operatorname{Im} w = 0$,
$|\operatorname{Re} z| \geqslant 1$



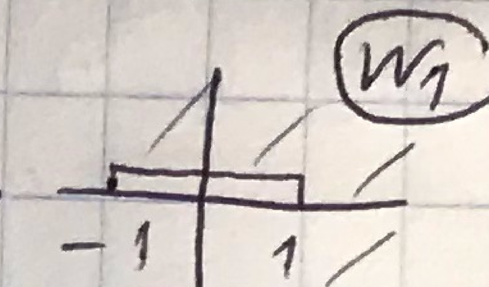
№2.109 В Використовуючи функцію Жуковського відобразити

1) зовнішність відрізка $[-c, c]$ $(c>0)$ на зовнішність одиничного круга при умові, що $w(\infty)=\infty$, $\arg w'(\infty)=\alpha$.

Розв'язок.



$w_1 = \frac{z}{c}$ →



$w_2(w_1) = \mathcal{K}^{-1}(w_1) = w_1 + \sqrt{w_1^2-1}$ — двозначна функція

$w_2(z) = \frac{z}{c} + \sqrt{\frac{z^2}{c^2}-1}$.

$w_2'(z) = \frac{1}{c} + \frac{z}{c^2\sqrt{\frac{z^2}{c^2}-1}} = \frac{1}{c}\left(1+\frac{z}{\sqrt{z^2-c^2}}\right)$

$w_2(\infty)=\infty$

$\arg w_2'(\infty) = \arg\frac{2}{c} = 0 \Rightarrow w_3 = w_2\cdot e^{i\alpha}$

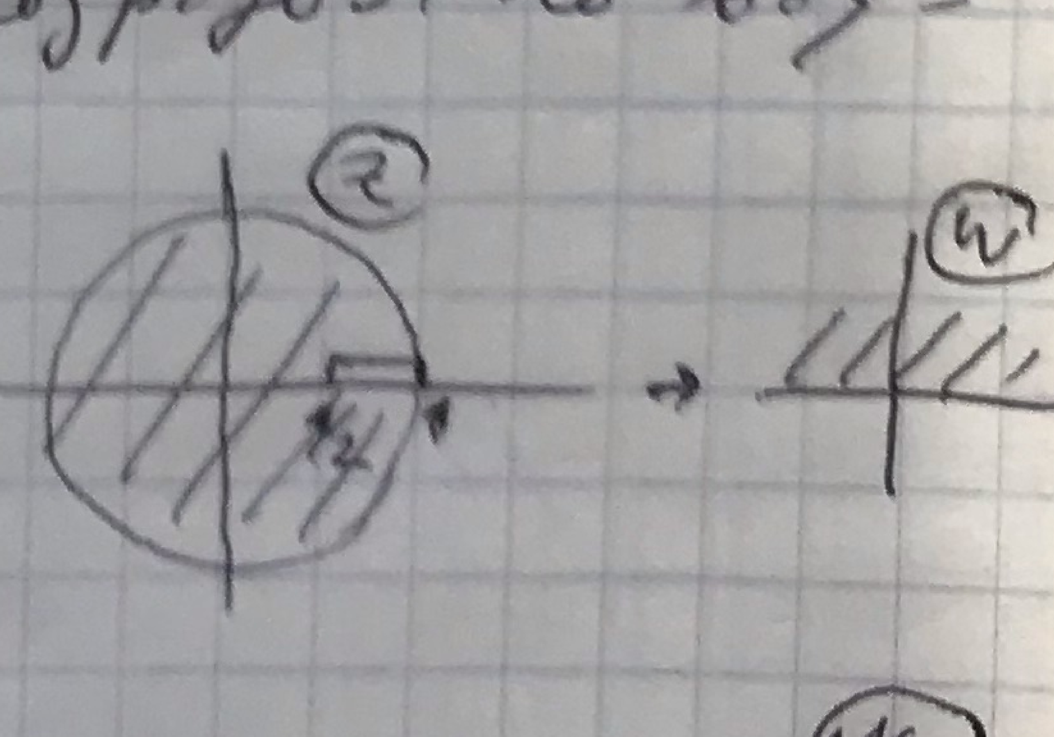
$\Rightarrow w_3'(\infty) = \frac{e^{i\alpha}}{c}\left(1+\frac{z}{\sqrt{z^2-c^2}}\right)\Big|_{z=\infty} = \frac{2}{c}e^{i\alpha}$

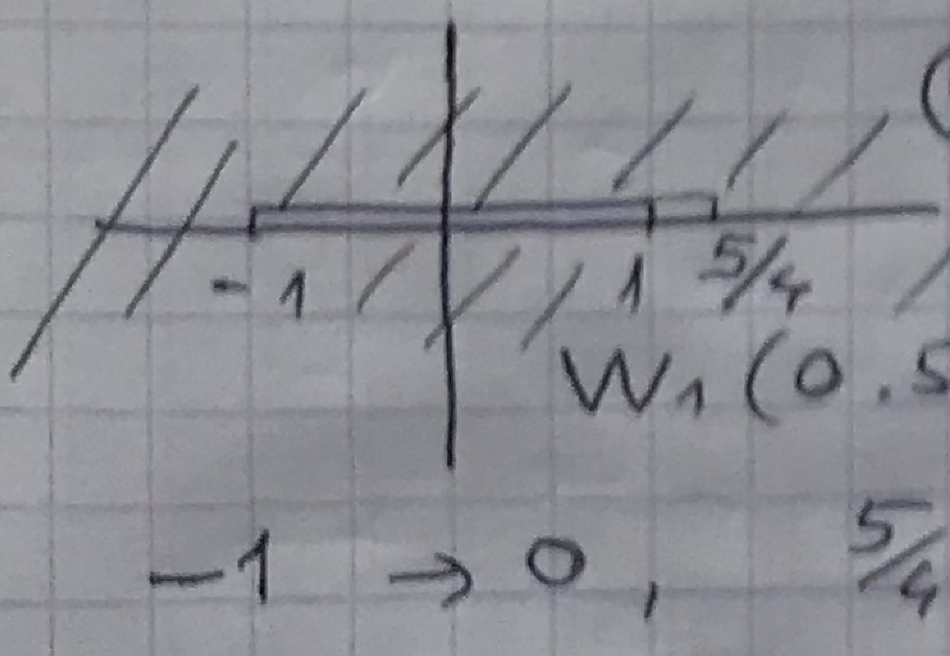
$\Rightarrow \arg w_3'(\infty) = \alpha$.

Відповідь: $w = \frac{e^{i\alpha}}{c}\left(z+\sqrt{z^2-c^2}\right)$

№2.113 В Відобразити на верхню півплощину круг $|z|<1$ з розрізом по відрізку $[0.5, 1]$

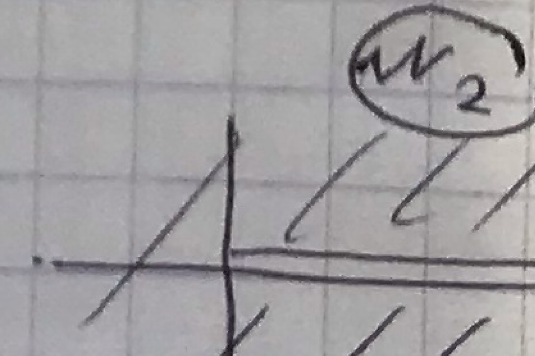
Розв'язок. $w_1 = \frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$





$w_1(0.5) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+2\right) = \frac{5}{4}$

$-1 \to 0,\quad \frac{5}{4} \to \infty \Rightarrow w_2 = \frac{w_1+1}{5/4-w_1}$

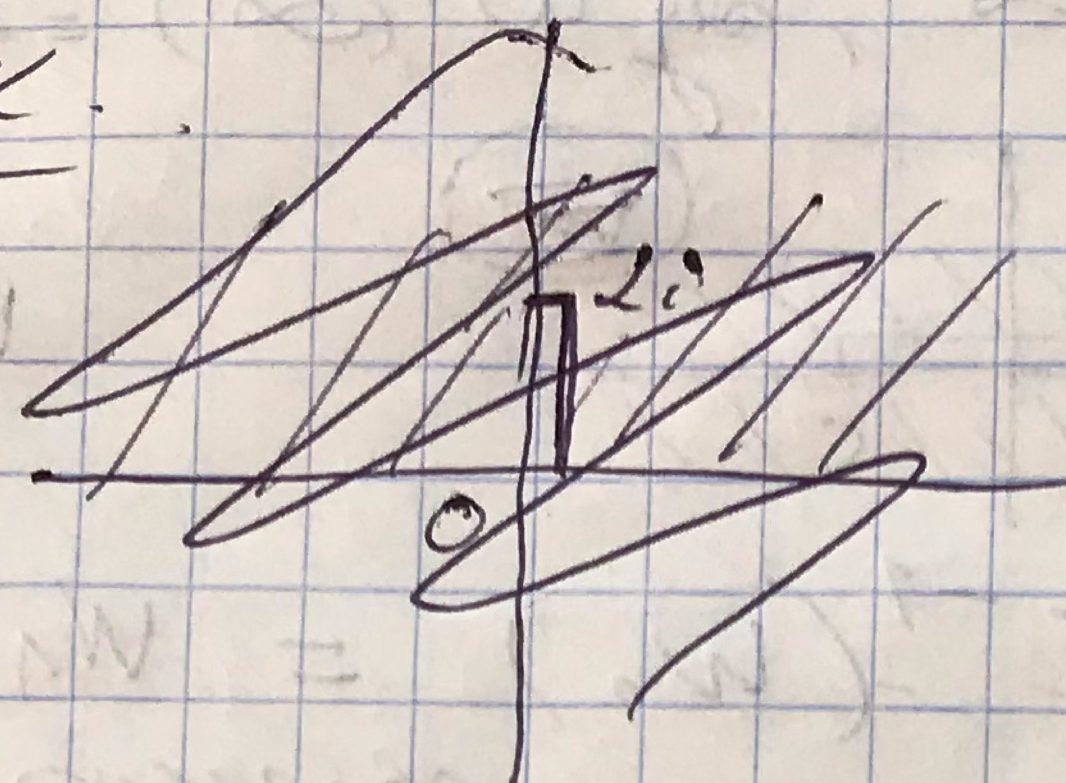


$w_3 = \sqrt{w_2}$. ~~Відповідь: w=~~

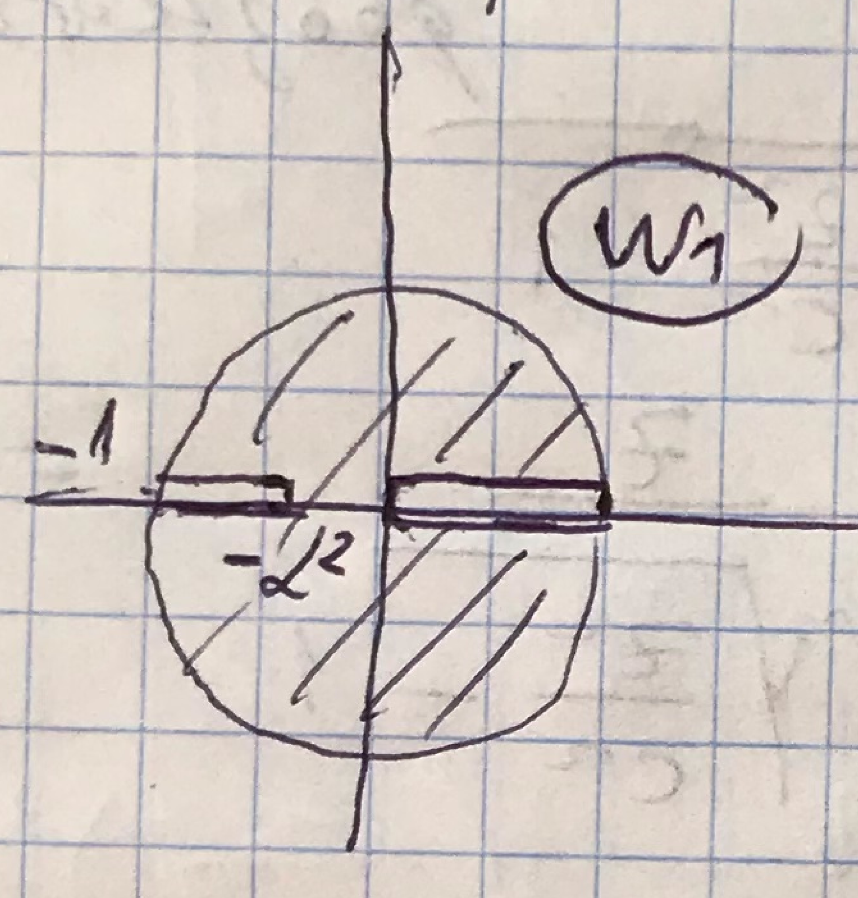
Відповідь: $w = \sqrt{\frac{\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)+1}{5/4-\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)}}$.

№2.117 В Відобразити на верхню півплощину верхню половину круга $|z|<1$ з розрізом по відрізку $[\alpha i, i]$ $(0<\alpha<1)$.

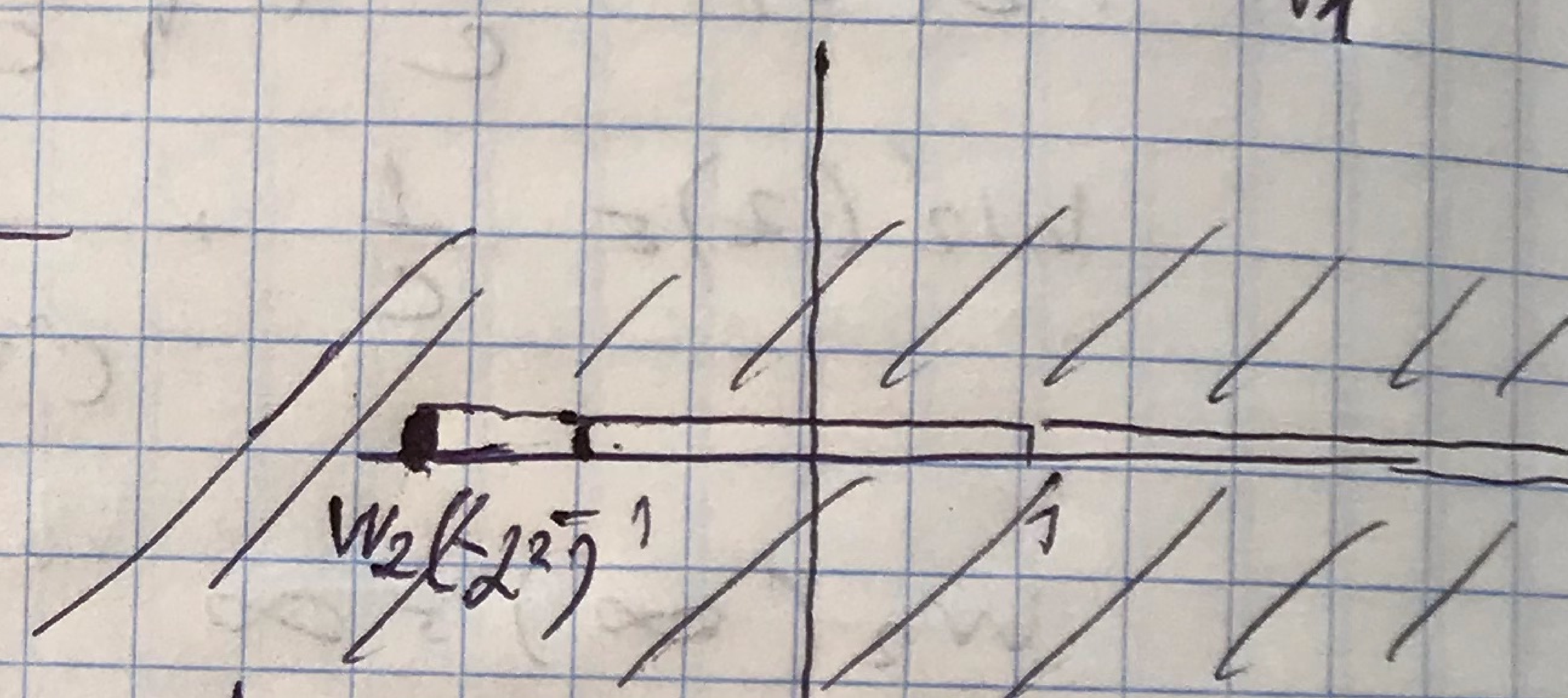
<u>Розв'язок</u>.



$w_1 = z^2$



$w_2 = \frac{1}{2}\left(w_1 + \frac{1}{w_1}\right)$



$\Rightarrow w_3 = \sqrt{w_2 + h}$, де $h = -w_2(-\alpha^2)$.

<u>Відповідь</u>: $W = \sqrt{\frac{1}{2}\left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right) - w_2(-\alpha^2)} =$

$= \sqrt{\frac{1}{2}\left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right) + \frac{1}{2}\left(+\alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2}\right)}$

Д/З. №2.94, 2.96, 2.100, 2.102, 2.103,
№2.107, 2.109, 2.112, 2.116