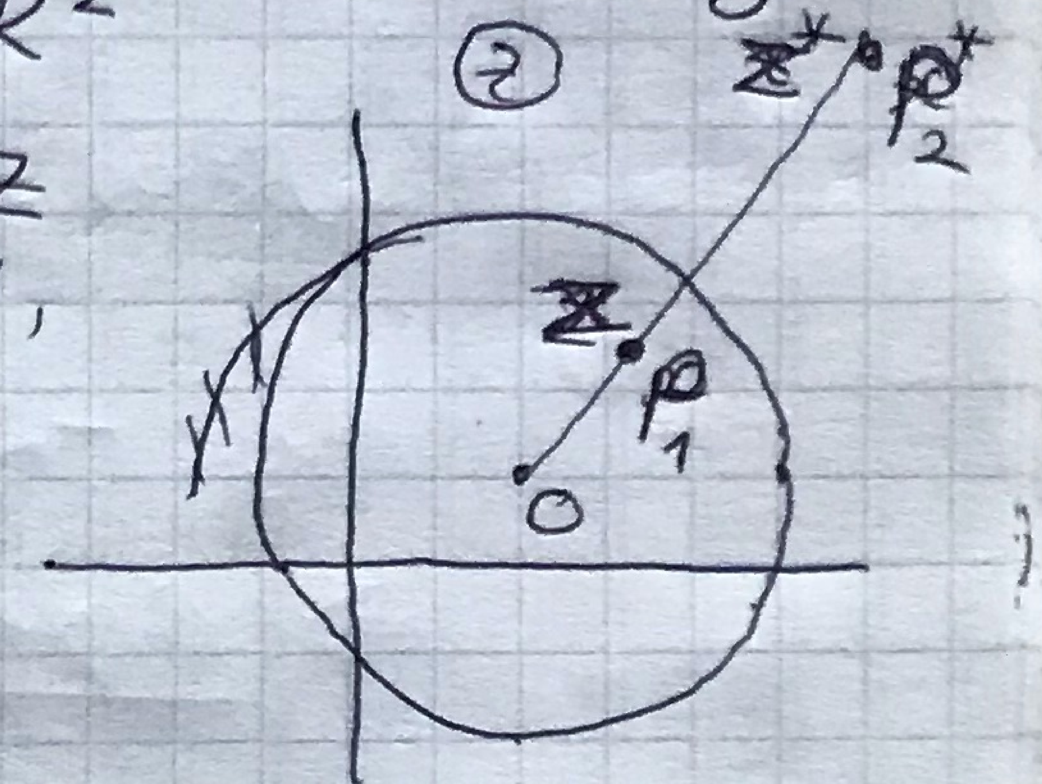
Заняття 12. Конформні відображення

№ 2.25 В Знайти симетричний образ відносно одиничного кола наступних ліній:

1) $|z| = 1/2$; 2) $|z-1| = 1$; 3) $y = 2$

Розв'язок.

Озн. Дві точки P_1 та P_2 наз. симетричними відносно кола K з центром в т. O та радіуса R, якщо вони розташовані на одному промені, що виходить з точки O та $OP_1 \cdot OP_2 = R^2$



Якщо z^* – симетр. до z відносно кола $|z|=1$,

то $z^* = \dfrac{1}{\bar z}$

1) $|z| = 1/2 \Rightarrow |z^*| = \left|\dfrac{1}{\bar z}\right| = \dfrac{1}{|\bar z|} = \dfrac{1}{|z|} = 2 \Rightarrow$

Відповідь: $|z^*| = 2$ або $|w| = 2$ – коло радіуса 2 з центром в т. 0

2) $|z-1| = 1 \Rightarrow z = 1 + e^{i\varphi}$

$$w = z^* = \frac{1}{\bar z} = \frac{1}{1+e^{-i\varphi}} = \frac{1}{1+\cos\varphi - i\sin\varphi} =$$

$$= \frac{1+\cos\varphi}{(1+\cos\varphi)^2+\sin^2\varphi} + \frac{i\sin\varphi}{(1+\cos\varphi)^2+\sin^2\varphi} =$$

$$= \frac{1+\cos\varphi}{2+2\cos\varphi} + \frac{i\sin\varphi}{2+2\cos\varphi} = \frac{1}{2} + \frac{i\cdot 2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}}{4\cos^2\frac{\varphi}{2}}$$

$= \dfrac{1}{2} + \dfrac{i}{2}\,tg(\varphi/2) \Rightarrow$ Відповідь: пряма $x = \dfrac{1}{2}$ або $\text{Re}\,w = \dfrac{1}{2}$.

3) $y = 2 \Rightarrow z = x + 2i$. 1-й спосіб

$$w = z^* = \frac{1}{\bar z} = \frac{1}{x-2i} = \frac{x}{x^2+4} + \frac{2i}{x^2+4}$$

$\text{Re}\,w = \dfrac{x}{x^2+4}$, $\text{Im}\,w = \dfrac{2}{x^2+4}$

$(\text{Re}\,w)^2 + (\text{Im}\,w)^2 = \dfrac{1}{x^2+4} = \dfrac{1}{2}\text{Im}\,w$

$\Rightarrow$ Рівн. в площині W:

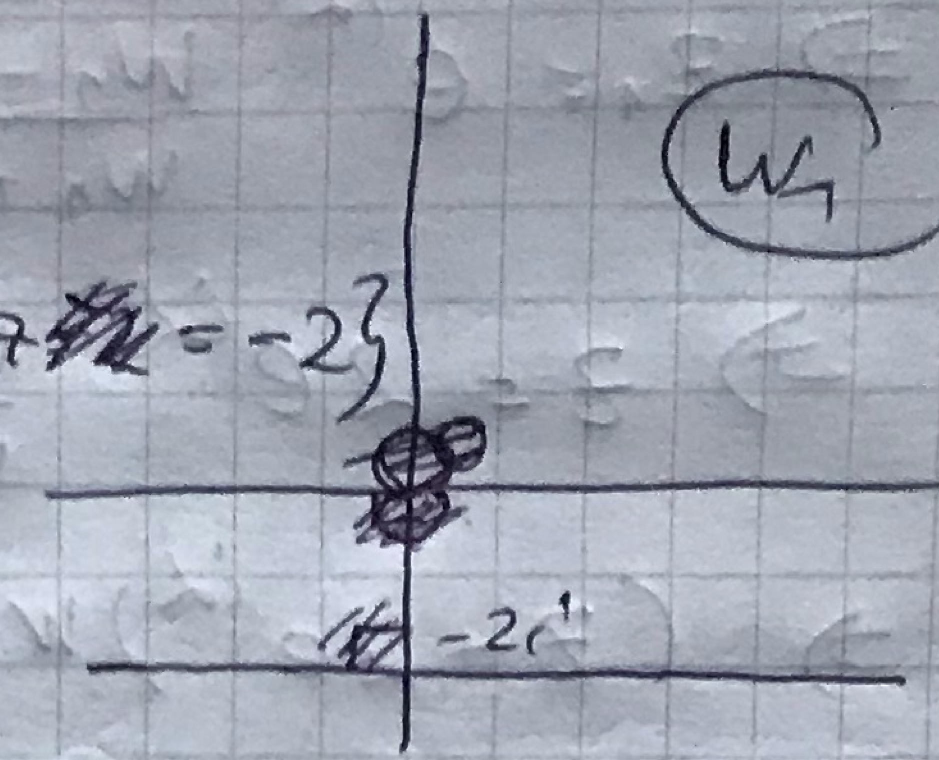
$x^2 + y^2 = \dfrac{1}{2}y \Rightarrow x + \left(y - \dfrac{1}{4}\right)^2 = \dfrac{1}{16}$

Відповідь: коло з центром в т. $(0, \frac{i}{4})$

радіуса $\frac{1}{4}$

2-й спосіб $w_1 = \bar{z}$ – симетр. відобр. відносно вісі Ox

$w_2 = \dfrac{1}{w_1}$ – інверсія



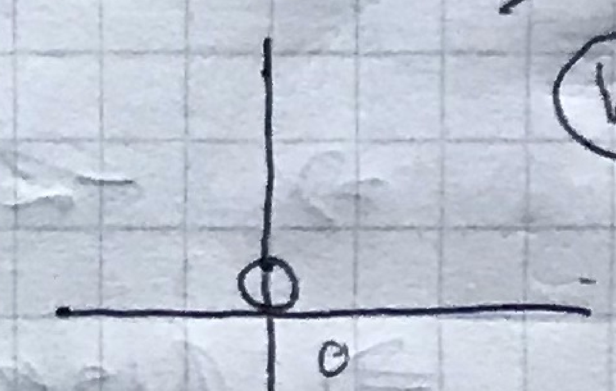
w_2: $0 \to \infty$ $0 \notin \{z \mid \operatorname{Im} z = -2\}$

$-2i \to \dfrac{i}{2}$ $\Rightarrow$ образ коло

$\infty \to 0$

w_2 – конформне $\Rightarrow$ кути зберігаються $\Rightarrow$ коло, що

проходить через $z=0$, $z=\frac{i}{2}$, перпендик прямій Oy, що є образом Ox.



$\Rightarrow |z - \frac{i}{4}| = \frac{1}{4}$

$\boxed{№2.28\ в}$ Відобразити верхню півплощину $\operatorname{Im} z > 0$ на круг ~~$|w - w_0|$~~ $|w| < 1$ так щоб 1) $w(i) = 0$, $\arg w'(i) = -\frac{\pi}{2}$

Розв'язок Загальний вигляд відобр. w, що переводить $\operatorname{Im} z > 0$ на $|w| < 1$:

~~має~~ $w = e^{i\alpha}\dfrac{z-\beta}{z-\bar\beta}$ $(\beta = a + ib,\ b > 0)$

$w(i) = 0 \Rightarrow i - \beta = 0 \Rightarrow \beta = i \Rightarrow$

$w = e^{i\alpha}\dfrac{z-i}{z+i}$ $w'(z) = e^{i\alpha}\dfrac{(z+i)-(z-i)}{(z+i)^2} = e^{i\alpha}\dfrac{2i}{(z+i)^2}$

$w'(i) = e^{i\alpha}\dfrac{1}{2i} = \frac{1}{2}e^{i(\alpha - \frac{\pi}{2})}$

$\Rightarrow \arg w'(i) = \alpha - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha = 0$.

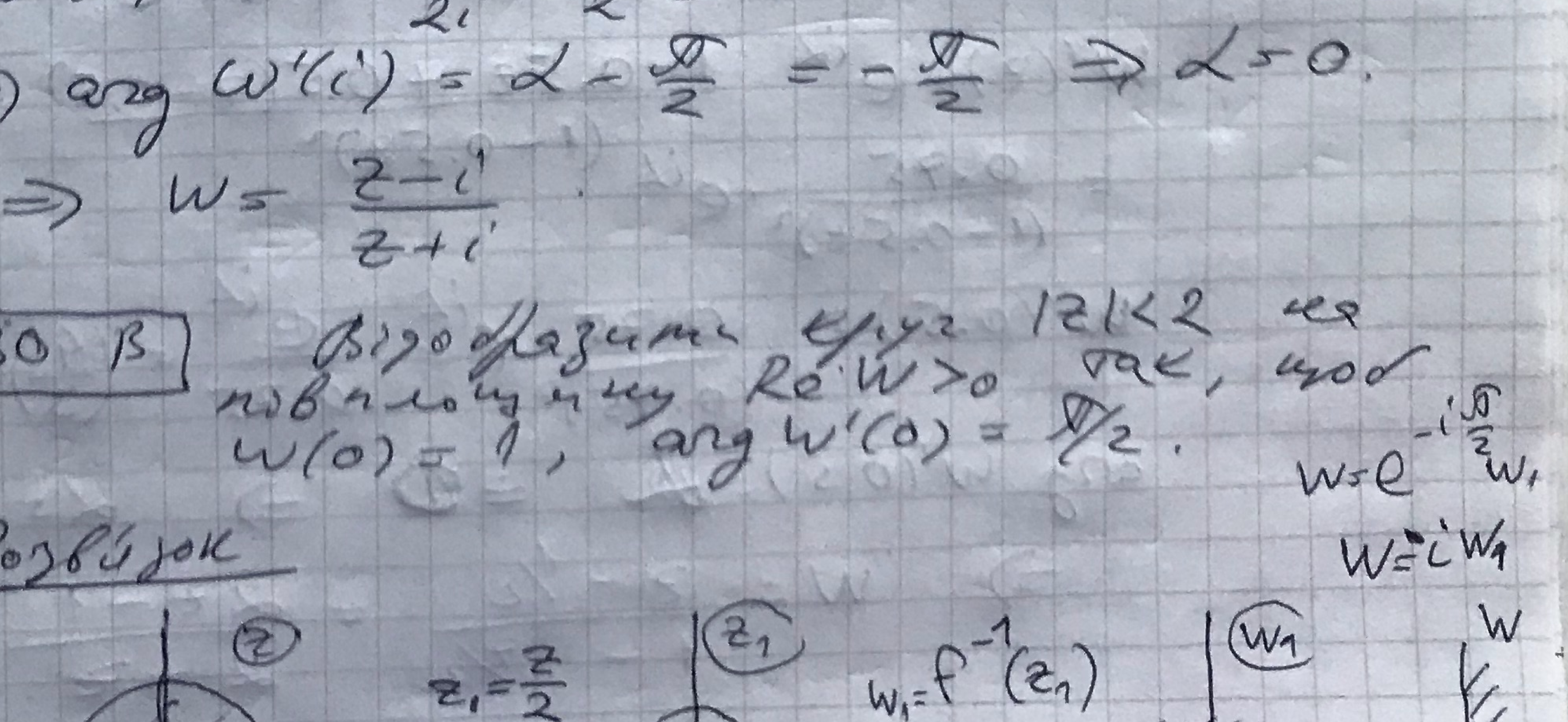
$\Rightarrow w = \dfrac{z-i}{z+i}$

$\boxed{№2.30\ в}$ Відобразити круг $|z| < 2$ на півплощину $\operatorname{Re} w > 0$ так, щоб $w(0) = 1$, $\arg w'(0) = \pi/2$.

$w = e^{-i\frac{\pi}{2}} w_1$

$w = i w_1$

Розв'язок



де $z_1 = e^{i\alpha}\dfrac{w_1 - \beta}{w_1 - \bar\beta}$

$z=0 \to w=1 \Rightarrow z_1=0 \to w_1=i$

$z_1(i)=0 \Rightarrow \beta=i$

$\Rightarrow z_1 = e^{i\alpha}\frac{w_1-i}{w_1+i} \Rightarrow \frac{z}{2} = e^{i\alpha}\frac{iw-i}{iw+i} \Rightarrow$

$\Rightarrow z = 2e^{i\alpha}\frac{w-1}{w+1} \Rightarrow (w+1)z = 2e^{i\alpha}(w-1)$

$\Rightarrow (z-2e^{i\alpha})w = -z-2e^{i\alpha} \Rightarrow w = \frac{2e^{i\alpha}+z}{-z+2e^{i\alpha}}$

$w'(z) = \frac{+(-z+2e^{i\alpha})+(2e^{i\alpha}+z)}{(-z+2e^{i\alpha})^2} = +\frac{4e^{i\alpha}}{(-z+2e^{i\alpha})^2}$

$w'(0) = +\frac{4e^{i\alpha}}{4e^{2i\alpha}} = +e^{-i\alpha} = e^{-i(\alpha)}$

$\Rightarrow \arg w'(0) = -\alpha = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha = -\frac{\pi}{2}$

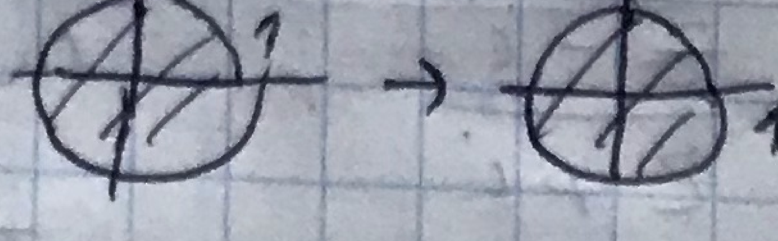
$\Rightarrow$ <u>Відповідь:</u> ~~$w = \frac{-4i}{(-z-2i)^2}$~~

$w = \frac{2e^{-i\frac{\pi}{2}}+z}{2e^{-i\frac{\pi}{2}}-z} = \frac{-2i+z}{-2i-z} = \frac{2i-z}{2i+z}$

$\boxed{№ 2.37\ в}$ Відобразити круг $|z|<1$ на круг $|w|<1$ так, щоб

1) $w(\frac{1}{2})=0$, $\arg w'(\frac{1}{2})=0$.

<u>Розв'язок</u>



$w=e^{i\alpha}\frac{z-a}{1-\bar{a}z}$

$|a|<1$

$w(\frac{1}{2})=0 \Rightarrow a=\frac{1}{2} \Rightarrow w=e^{i\alpha}\frac{z-0.5}{1-0.5z}$

$w'(z)=e^{i\alpha}\frac{1-0.5z+0.5(z-0.5)}{(1-0.5z)^2} = \frac{0.75}{(1-0.5z)^2}\cdot e^{i\alpha}$

$w'(0.5) = \frac{0.75}{(0.75)^2}\cdot e^{i\alpha} = \frac{e^{i\alpha}}{0.75} = \left(\frac{4}{3}\right)\cdot e^{i\alpha}$

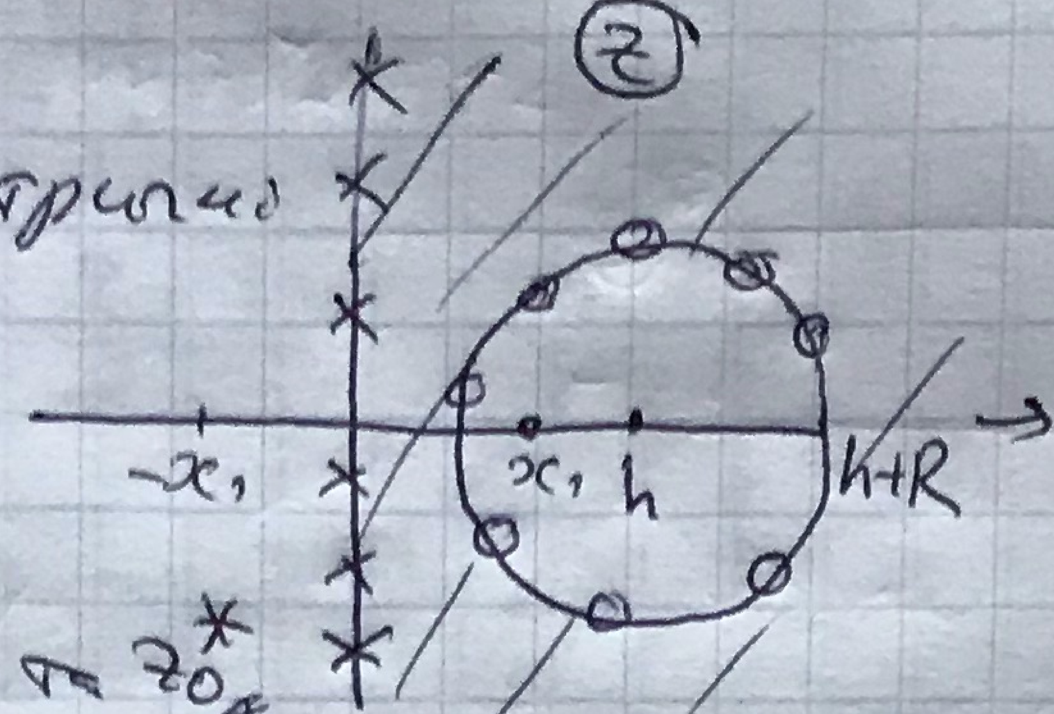
$\arg w'(0.5) = \alpha = 0 \Rightarrow \alpha=0$

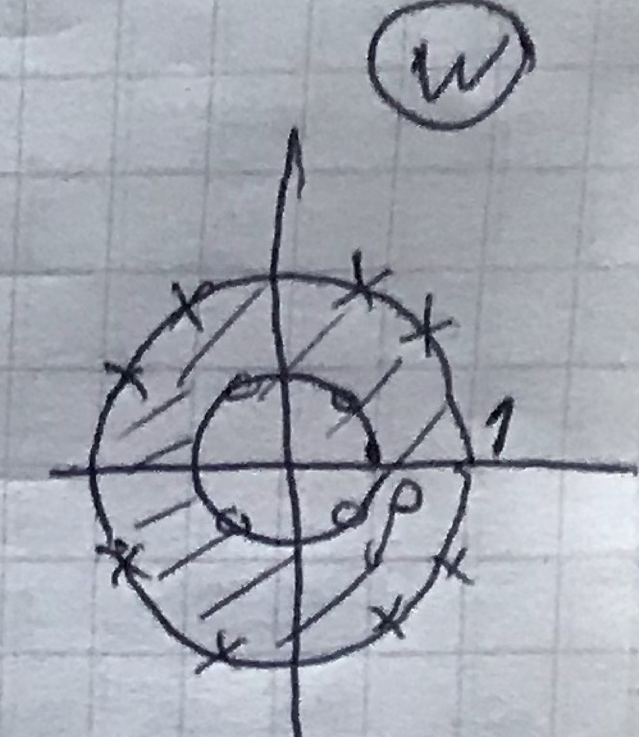
$\Rightarrow w = \frac{z-1/2}{1-z/2} = \frac{2z-1}{2-z}$

Відобр. двозв'язних областей

$\boxed{№ 2.63\ B}$ Півплощину $\mathrm{Re}\, z > 0$ з викинутим колом $|z-h|<R$ $(h>R)$ відобразити на кільце $\rho<|w|<1$ так, щоб уявна вісь перейшла в коло $|w|=1$. Знайти ρ.

Розв'язок.





Точки 0 та ∞ – симетричні одночасно відносно обох кіл $|w|=1$ та $|w|=\rho$.

Визначимо точки z_0 та z_0^* площини (z), які одночасно симетр. і відносно $\mathrm{Re}\, z=0$ $(\times)$, і $|z-h|=R$ $(\circ)$

Враховуючи, що і $\mathrm{Re}\, z=0$, і $|z-h|=R$ симетричні відносно прямої $\mathrm{Im}\, z=0$ $\Rightarrow$
$z_0=x_1$, $z_0^*=-x_1$, $x_1\in\mathbb{R}$, (симетр. відн. $\mathrm{Re}\, z=0$)
$(h-x_1)(h+x_1)=R$ (симетр. відн. кола $|z-h|=R$)
$\Rightarrow z_0=\sqrt{h^2-R^2}$, $z_0^*=-\sqrt{h^2-R^2}$

Одна з цих точок переходить в 0, інша – в ∞:

$$W=k\,\frac{z\pm\sqrt{h^2-R^2}}{z\mp\sqrt{h^2-R^2}},$$

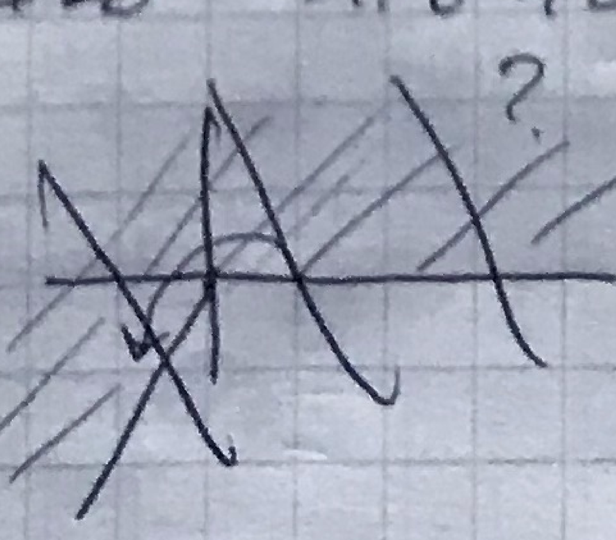
З умови $|w(iy)|=1 \Rightarrow |k|=1 \Rightarrow k=e^{i\varphi}$
Образ точки $z=h-R$ знах. на колі $|w|=\rho$.

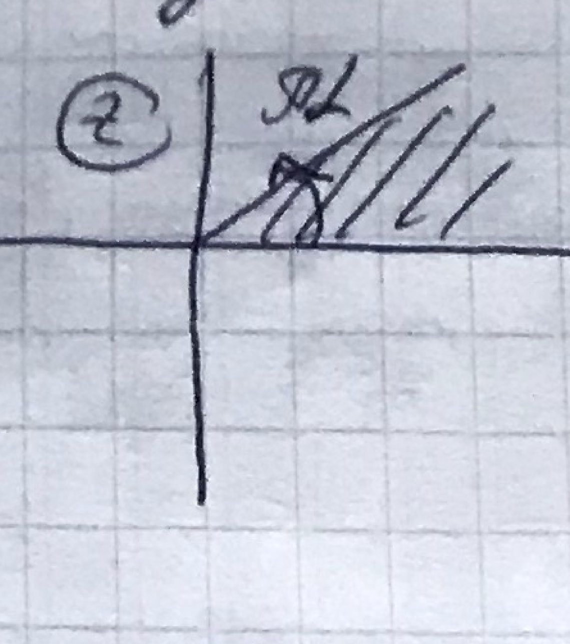
Тоді
$$\rho=\left|\frac{h-R\pm\sqrt{h^2-R^2}}{h-R\mp\sqrt{h^2-R^2}}\right|=\left|\frac{(h-R\pm\sqrt{h^2-R^2})^2}{(h-R)^2-(h^2-R^2)}\right|=$$
$$=\left|\frac{h^2-2Rh+R^2\pm2(h-R)\sqrt{h^2-R^2}+h^2-R^2}{h^2-2Rh+R^2-h^2+R^2}\right|=$$
$$=\left|\frac{2h^2-2Rh\pm2(h-R)\sqrt{h^2-R^2}}{2R^2-2Rh}\right|=\left|\frac{h(h-R)\pm(h-R)\sqrt{h^2-R^2}}{R(R-h)}\right|$$
$$=\left|\frac{\mp\sqrt{h^2-R^2}-h}{R}\right|<1 \Rightarrow \rho=\frac{h-\sqrt{h^2-R^2}}{R}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow W=e^{i\varphi}\,\frac{z-\sqrt{h^2-R^2}}{z+\sqrt{h^2-R^2}}.$$

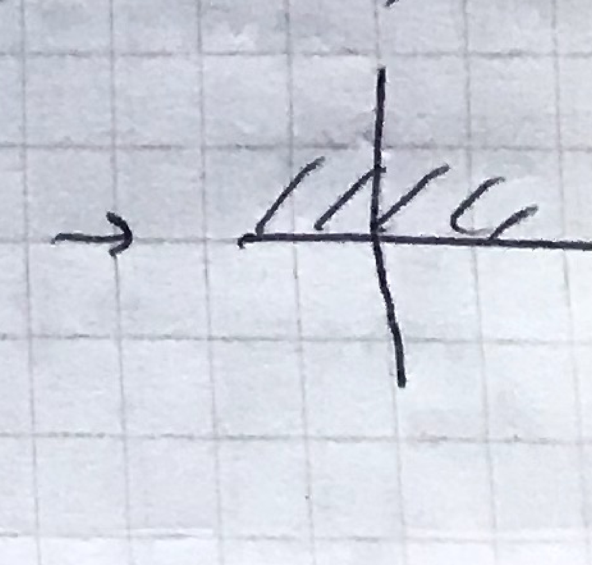
$\boxed{№ 2.86\ B}$ Відображ. кругових луночок та областей з розрізами.

1) Відобразити кут $0<\arg z<\pi\alpha$ ~~$(0<\alpha\le2)$~~ $(0<\alpha\le1)$ на верхню півплощину

Розв'язок.





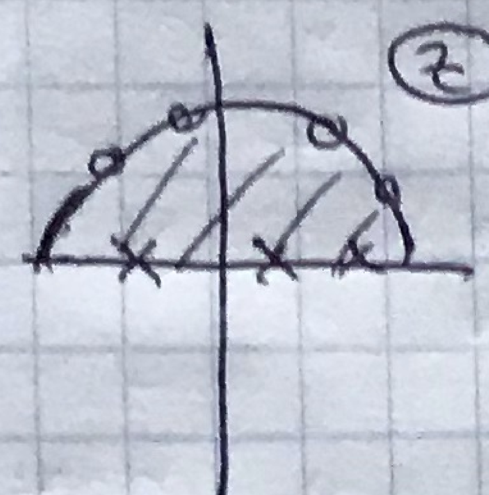


$w=z^{1/2}$

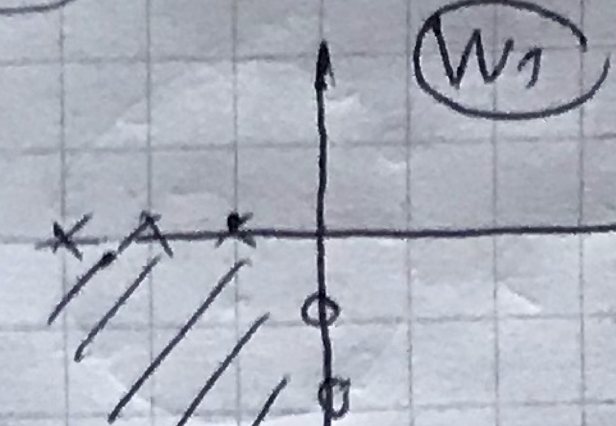
№ 2.87 В Знайти функцію $w(z)$, що відображає півколо $|z|<1$, $\operatorname{Im} z>0$ на верхню півплощину при умовах
1) $w(-1)=0$, $w(0)=1$, $w(1)=\infty$

Розв'язок.

z	-1	0	1
w	0	1	∞

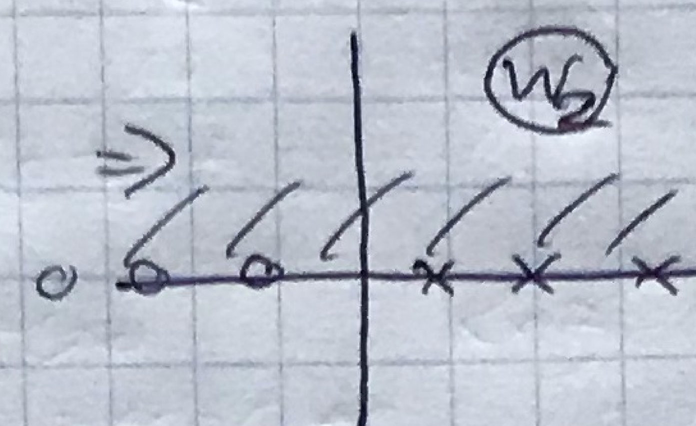


$$W_1=\frac{z+1}{z-1}$$



z	-1	0	1
W_1	0	-1	∞
W_2	0	1	∞

$W_2=(W_1)^2 \Rightarrow$

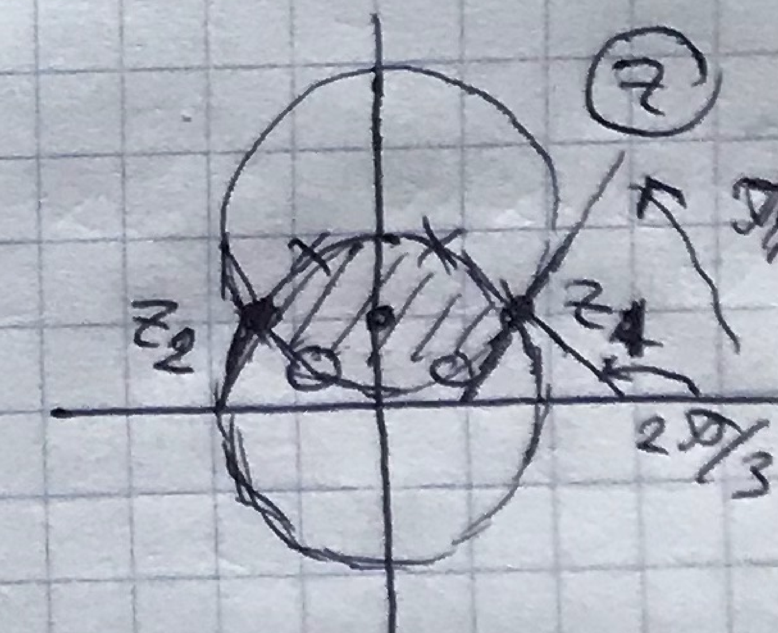


Відповідь: $w=\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2$.

№ 2.91 В Відобразити на верхню півплощину такі кругові лунки:

1) $|z|<1$, $|z-i|<1$

Розв'язок. $\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x^2+(y-1)^2=1 \end{cases}$



$\Rightarrow$ точки перетину

$$z_{1,2}=\pm\frac{\sqrt3}{2}+\frac{i}{2}.$$

Знайдем рівн. дотичної до $|z|=1$ в точці z_2:

$x^2+y^2=1$ $\quad 2x+2y\cdot y'=0 \Rightarrow y'=-x/y$

$\Rightarrow y'\left(\frac{\sqrt3}{2}\right)=-\sqrt3 \Rightarrow \varphi=\operatorname{arctg}(-\sqrt3)=\frac{2\pi}{3}$

$\Rightarrow$ кут між дотичними до кіл в т. z_2 $=\frac{2\pi}{3}$.

Нех. $z_2\to0$, $z_1\to\infty$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow W_1=\dfrac{z+\frac{\sqrt3}{2}-\frac{i}{2}}{z-\frac{\sqrt3}{2}-\frac{i}{2}}$. $\quad \cancel{W_1(0)=\frac{\sqrt3-i}{-\sqrt3-i}}$

$\cancel{=\frac{i-\sqrt3}{i+\sqrt3}=\frac{3-2\sqrt3-1}{4}=\frac12-\frac{\sqrt3}{2}=e^{-i\pi/3}}$

$W_2=(W_1)^{3/2}$ $\Rightarrow$ $\cancel{W_2(e^{-i\pi/3})=e^{-i\pi/2}}=-i$

$z=\frac{i}{2}\to W_1=-1\to W_2=e^{i\frac{3\pi}{2}}=-i$

$\Rightarrow W_3=-W_2 \Rightarrow$ Відповідь: $w=-\left(\dfrac{z+\frac{\sqrt3}{2}-\frac{i}{2}}{z-\frac{\sqrt3}{2}-i/2}\right)^{3/2}$

Д/З Волк
№ 2.31
№ 2.37
№ 2.40
№ 2.63
№ 2.87
№ 2.91