

Заняття 11. Геометр. зміст похідної. Конформні відображення

№ 1. 187 В Знайти кут повороту та коеф. розтягу k для $w = z^2$; $w = z^3$ в точках 2) $z = -\frac{1}{4}$; 3) $z = 1+i$.

Розв'язок. Коефіцієнт розтягу $k(z_0) = |f'(z_0)|$
 кут повороту $\theta(z_0) = \arg f'(z_0)$.

$w = z^2$:
 $z_0 = -\frac{1}{4}$: $k(z_0) = k(-\frac{1}{4}) = |2z|_{z_0 = -\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$

$\theta(z_0) = \arg(2 \cdot (-\frac{1}{2})) = \arg(-1) = \pi$

$z_0 = 1+i$: $k(z_0) = k(1+i) = |2(1+i)| = 2\sqrt{2}$
 $\theta(z_0) = \arg(2(1+i)) = \frac{\pi}{4}$

$w = z^3$:
 $z_0 = -\frac{1}{4}$: $k(z_0) = |3z^2|_{z_0 = -\frac{1}{4}} = \frac{3}{16}$

$\theta(z_0) = \arg(3/16) = 0$

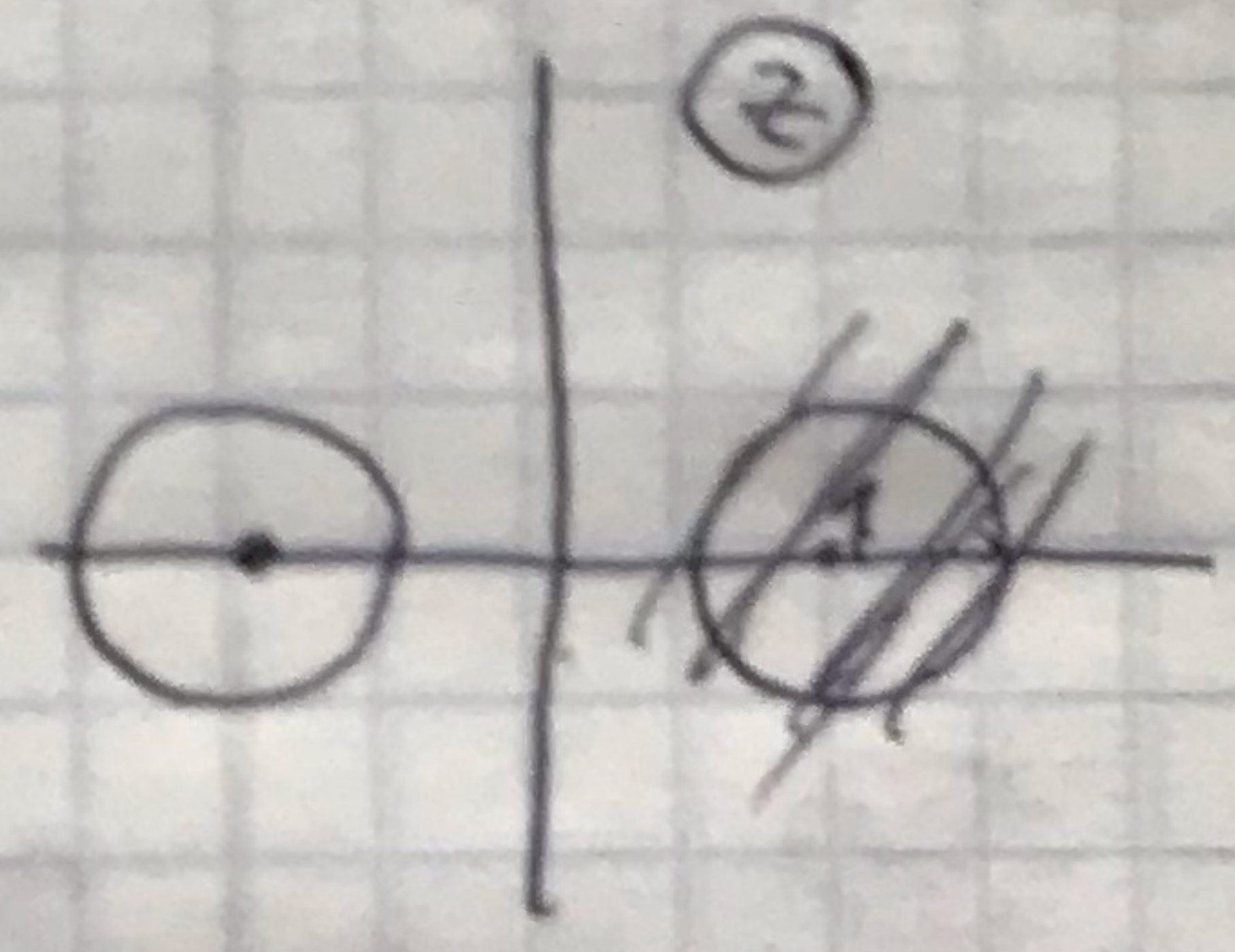
$z_0 = 1+i$: $k(z_0) = |3(1+i)^2| = |6i| = 6$
 $\theta(z_0) = \arg(6i) = \frac{\pi}{2}$

№ 1. 188 В Для частини компл. площини розглянемо, а для смисла функції 2) $w = z^2 + 2z$; 4) $w = e^z$.

Розв'язок 2) $w = z^2 + 2z$. $w'(z) = 2z + 2$

$|2z + 2| = 1$ $|z + 1| = \frac{1}{2}$

Всередині кола — смисла функції, а зовні — розглянемо.



4) $w = e^z$. $w' = e^z$.

$|e^z| = 1 \Rightarrow e^x = 1 \Rightarrow x = 0$

Для $x > 0$ $|w'| > 1$, а для $x < 0$ $|w'| < 1$
 \Rightarrow при $x > 0$ — розглянемо,
 при $x < 0$ — смисла функції.

N 1.189 B

Область D отображается
 за год. функции $f(z)$ конформно и отображено
 однонакло на область D' . Введем
 формулы для элементов площади S области
 D' та границей L дугой на дуге отображе-
 тельное ее-ее дуга $\Gamma \subset D'$.

Решение. $w: D \rightarrow D'$
 ~~$S \rightarrow S'$~~
 $\gamma \rightarrow \Gamma$

$$S(D_1) = \iint_{D_1} dS = \left| \begin{array}{l} |w'| = k \\ dS = k^2 ds = \\ = |f'(z)|^2 ds \end{array} \right| = \iint_D |f'(z)|^2 ds$$

$$|\Gamma| = \int_{\Gamma} dL = \left| \begin{array}{l} dL = k dl = \\ = |f'(z)| dl \end{array} \right| = \int_{\gamma} |f'(z)| dl$$

N 1.190 B

Зная границу L спираль,
 на дуге за помощью функции e^z отобра-
 жается в отрезок $y=x, 0 \leq x \leq 2\pi$.

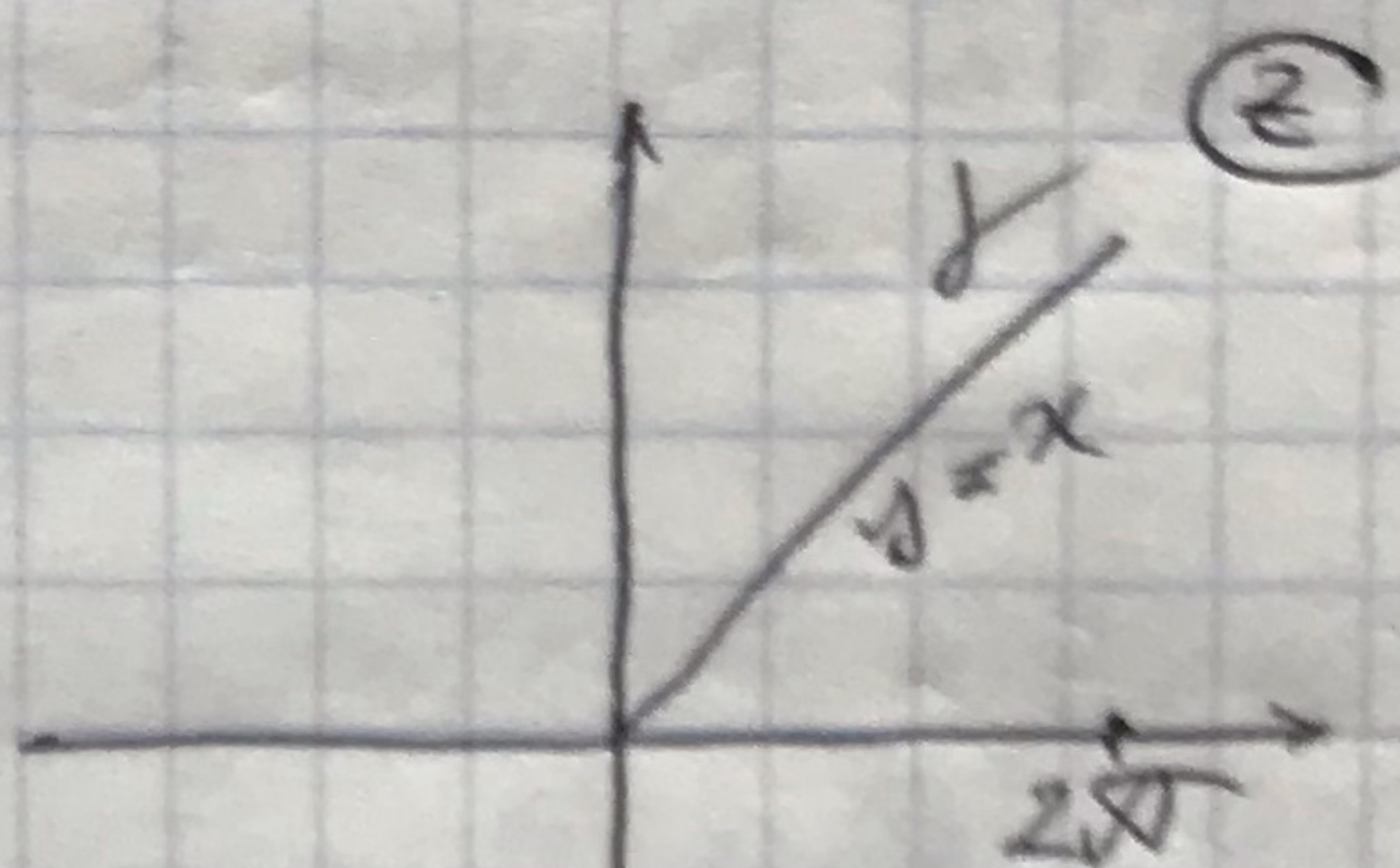
Решение

$$w = e^z = e^x \cdot e^{iy} = w'(z)$$

$$|w'(z)| = e^x$$

$$\rho = e^x, \theta = y, x \leq y \leq 2\pi$$

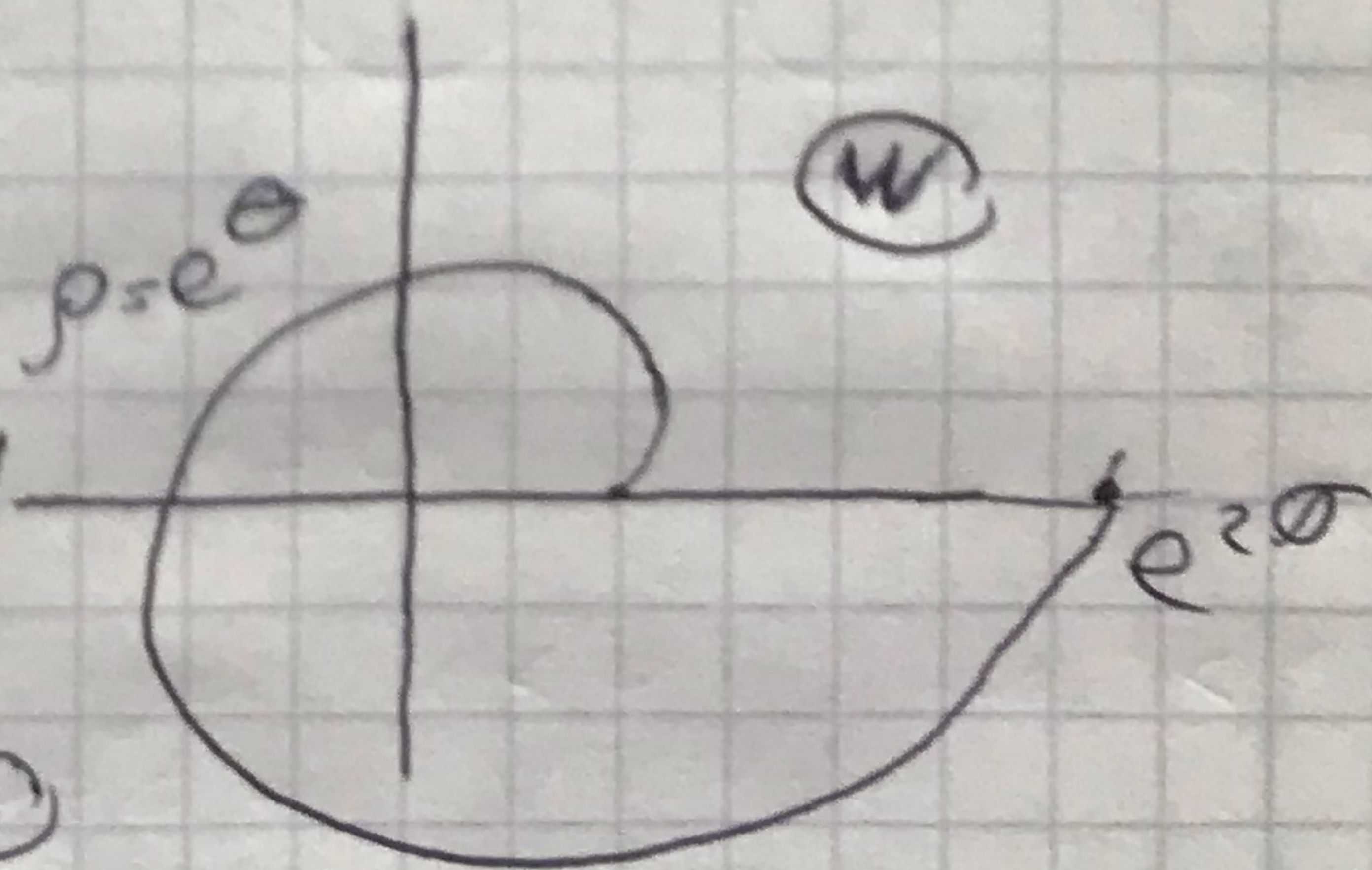
$$\text{риск. кривой } L: \rho = e^\theta$$



$$|L| = \int_{\gamma} |f'(z)| dl =$$

$$= \int_{\gamma} e^x dl = \left| \begin{array}{l} dl = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \\ = \sqrt{1 + (y')^2} dx = \\ = \sqrt{2} dx \end{array} \right|$$

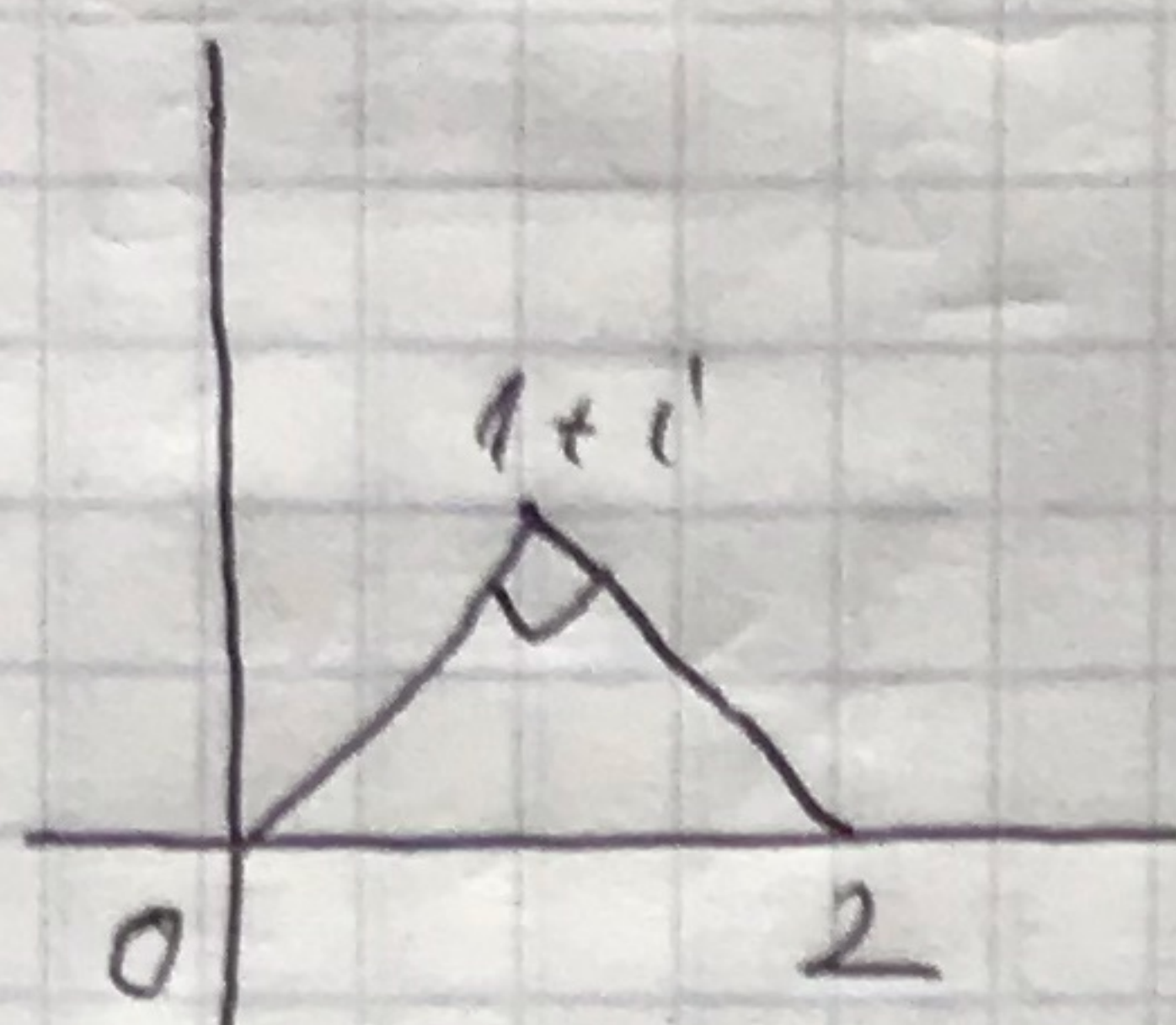
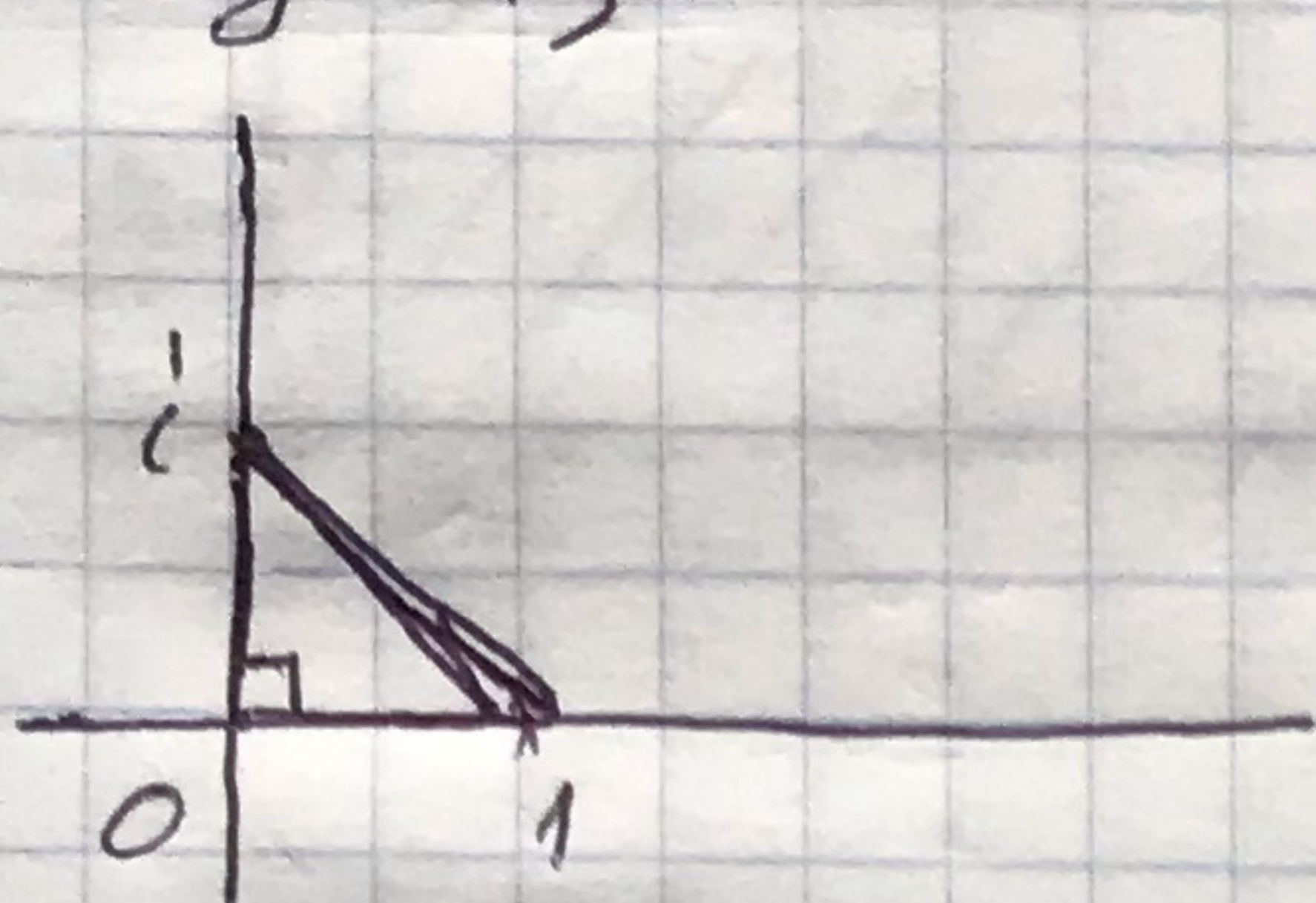
$$\textcircled{5} \int_0^{2\pi} e^x \cdot \sqrt{2} dx = \sqrt{2} (e^{2\pi} - 1)$$



Конформні: Взабрющення.

N 2.1 B Знайти цілу лідіну функцію, яка вобдрютає трикутник з вершинами в точках $0, 1, i$ на подібний йому трикутник з вершинами $0, 2, 1+i$.

Розв'язок.



$0 \rightarrow 1+i$
 $i \rightarrow 2$
 $1 \rightarrow 0$

$w = az + b$

- обертаєння на кут $\varphi = -\frac{3\pi}{4}$.

- розтяг в $\sqrt{2}$ разів.

- парал. перенос на $1+i \Rightarrow$

$\Rightarrow w = \sqrt{2} e^{-\frac{3\pi}{4}i} \cdot z + 1+i$

N 2.4 B 3) Знайти загальний вигляд цілого лінійного перетворення яке переводить верхню півплощину на праву півплощину.

Розв'язок $z \rightarrow w$

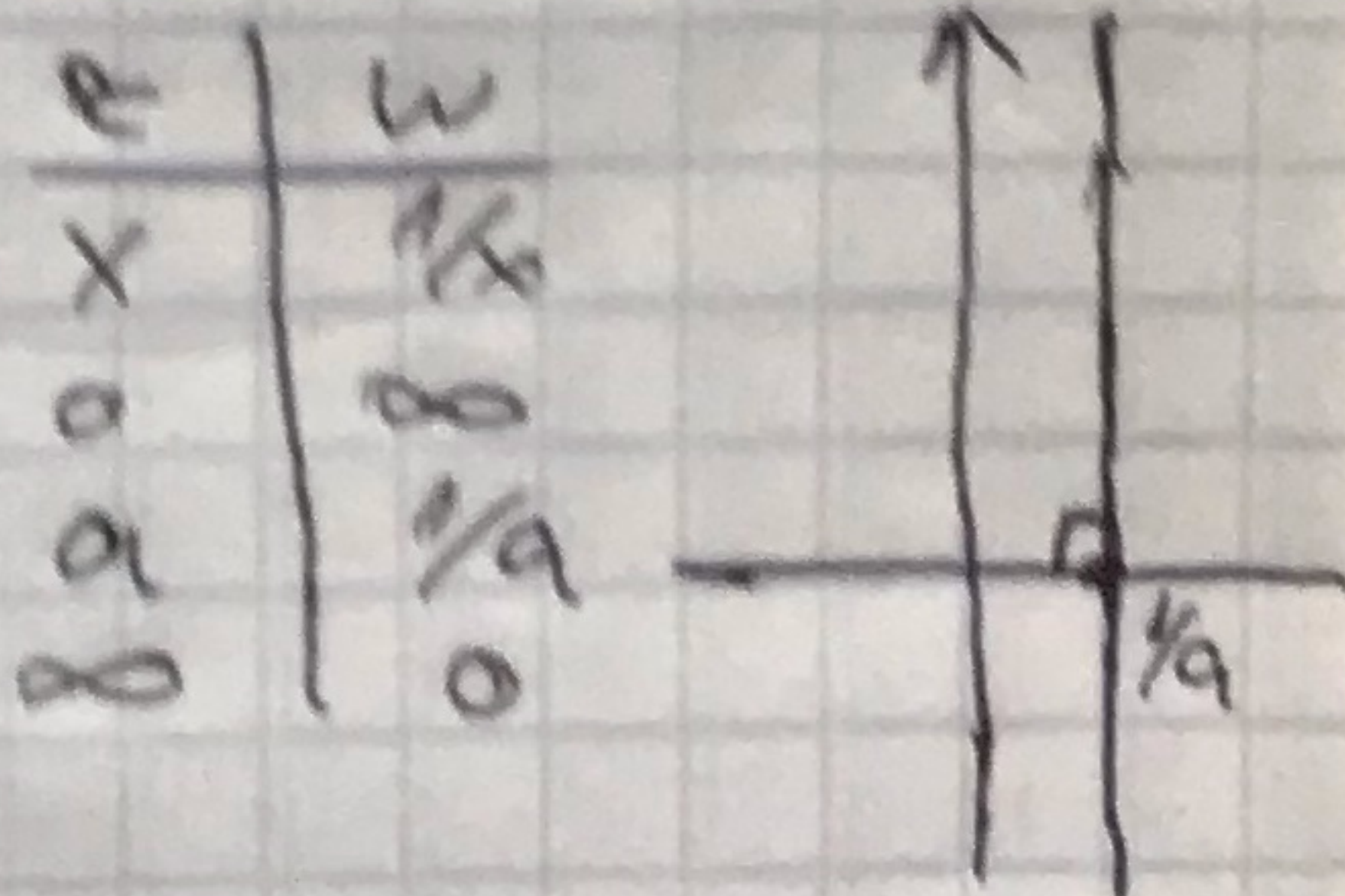
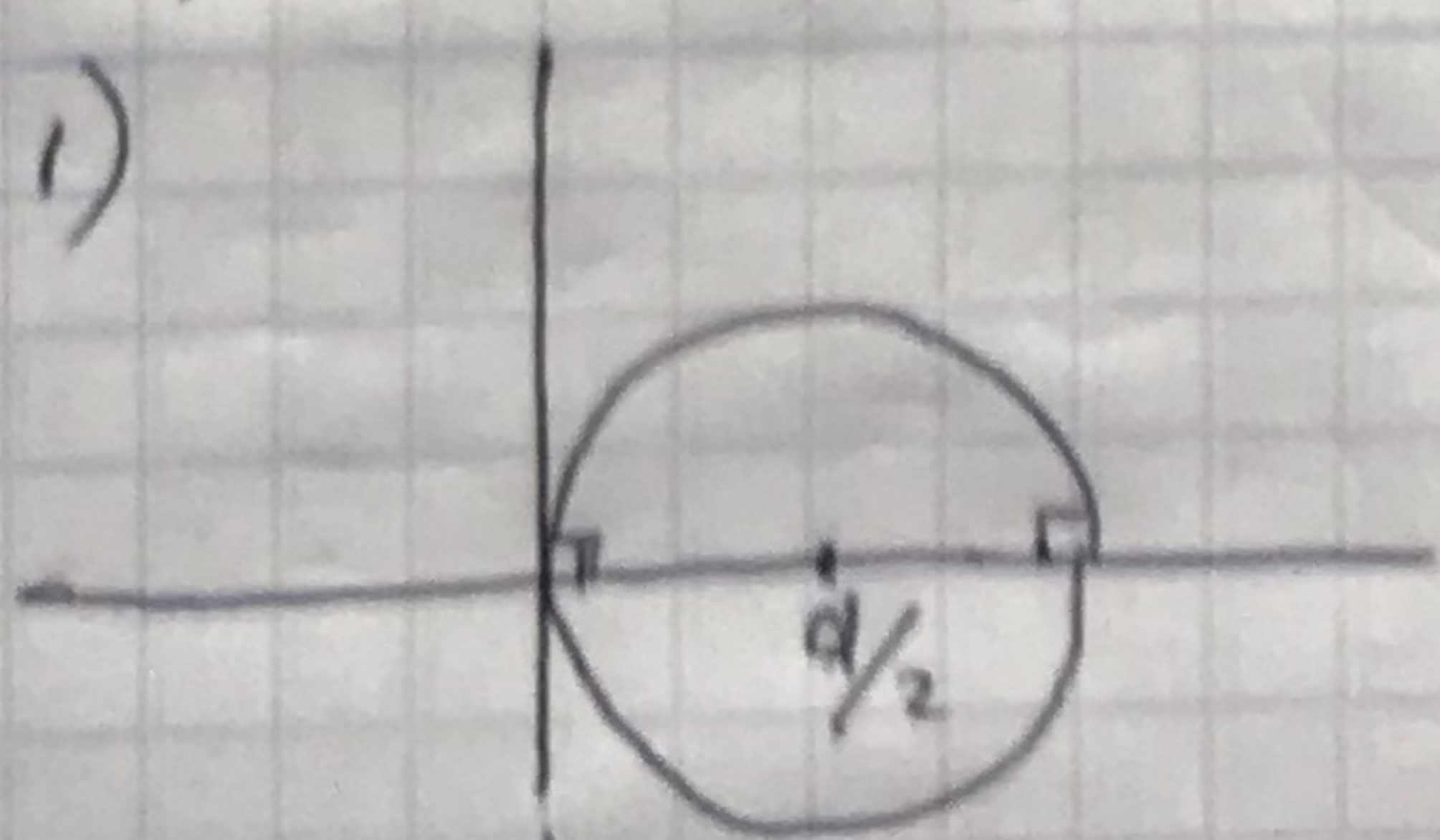
$\varphi = -\frac{\pi}{2}$, Δ коеф. дорівнює Δ перпендикулярно до OX (див. рис.)

$\Rightarrow w = e^{-i\frac{\pi}{2}}(az + b) = -i(az + b)$, $a, b \in \mathbb{R}, a > 0$.

N 2.8 B Для функції $w = \frac{1}{z}$ знайти образ

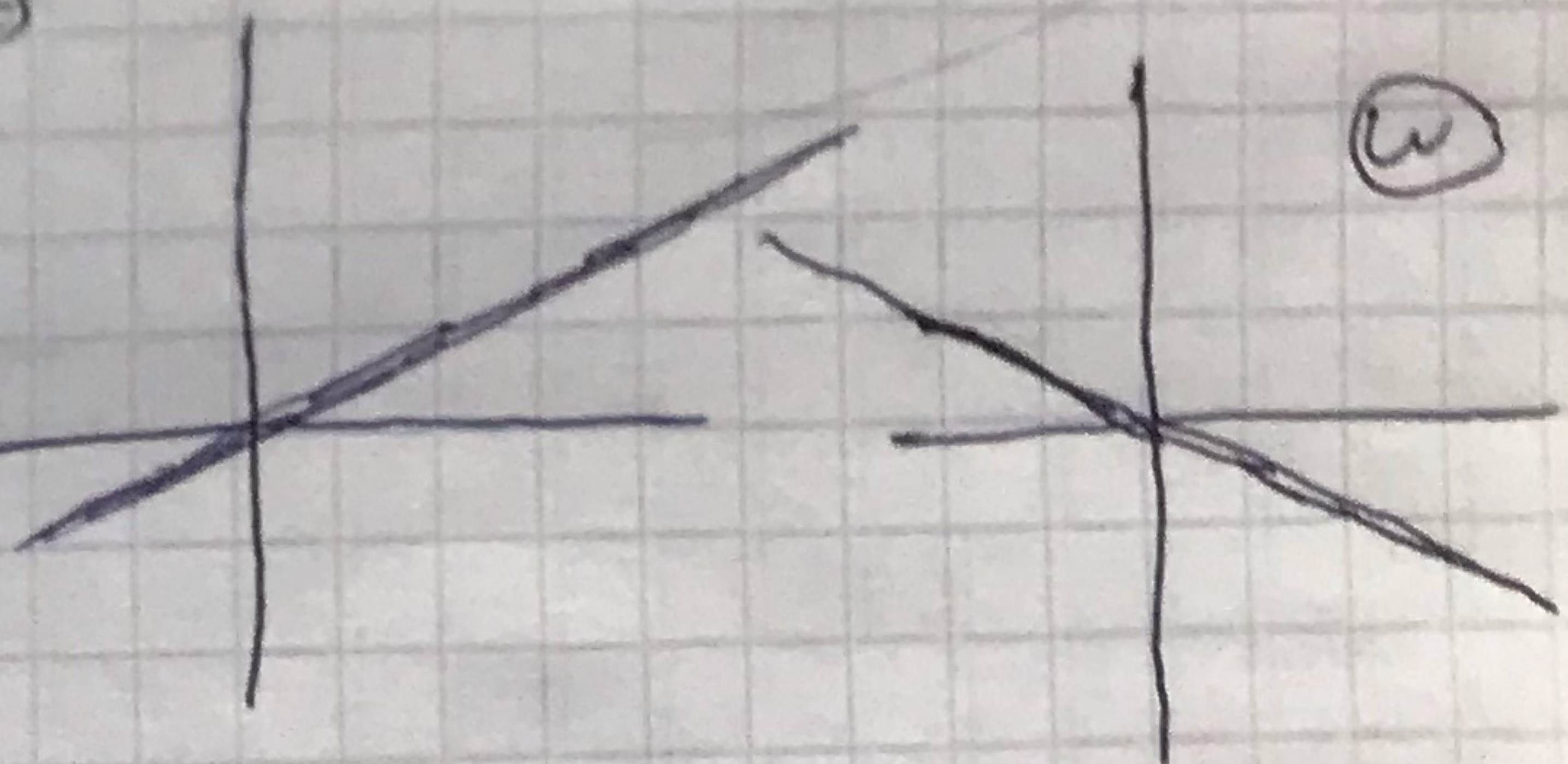
- 1) сім'яства кіл $x^2 + y^2 = ax$;
- 4) лугка прямих $y = kx$.

Розв'язок. 1)



2) $y = kx, z = \rho e^{i\theta} \Rightarrow w = \frac{1}{\rho} e^{-i\theta}$

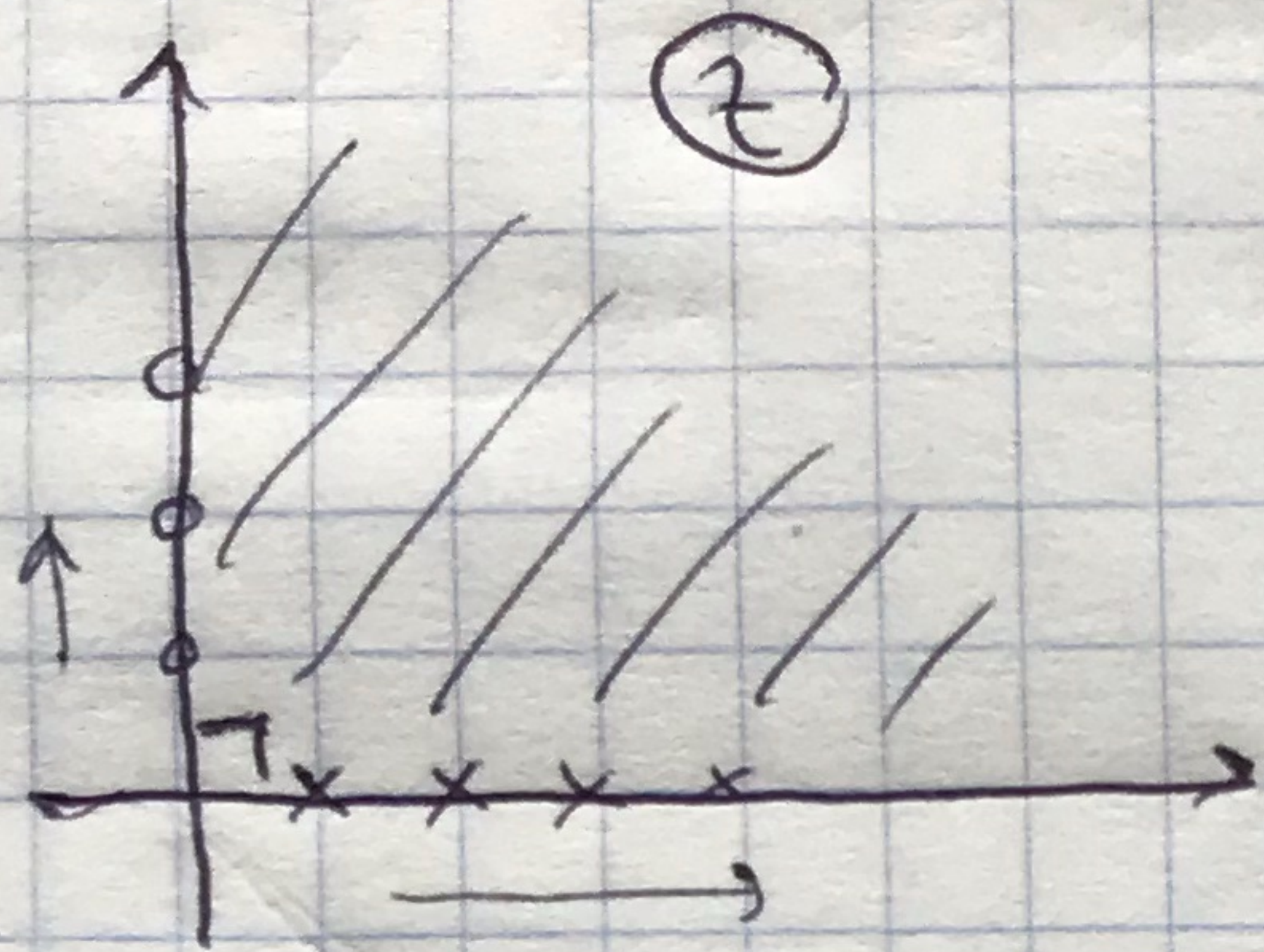
Лугка прямих переходить у лугку прямих, бо $0 \rightarrow \infty$.



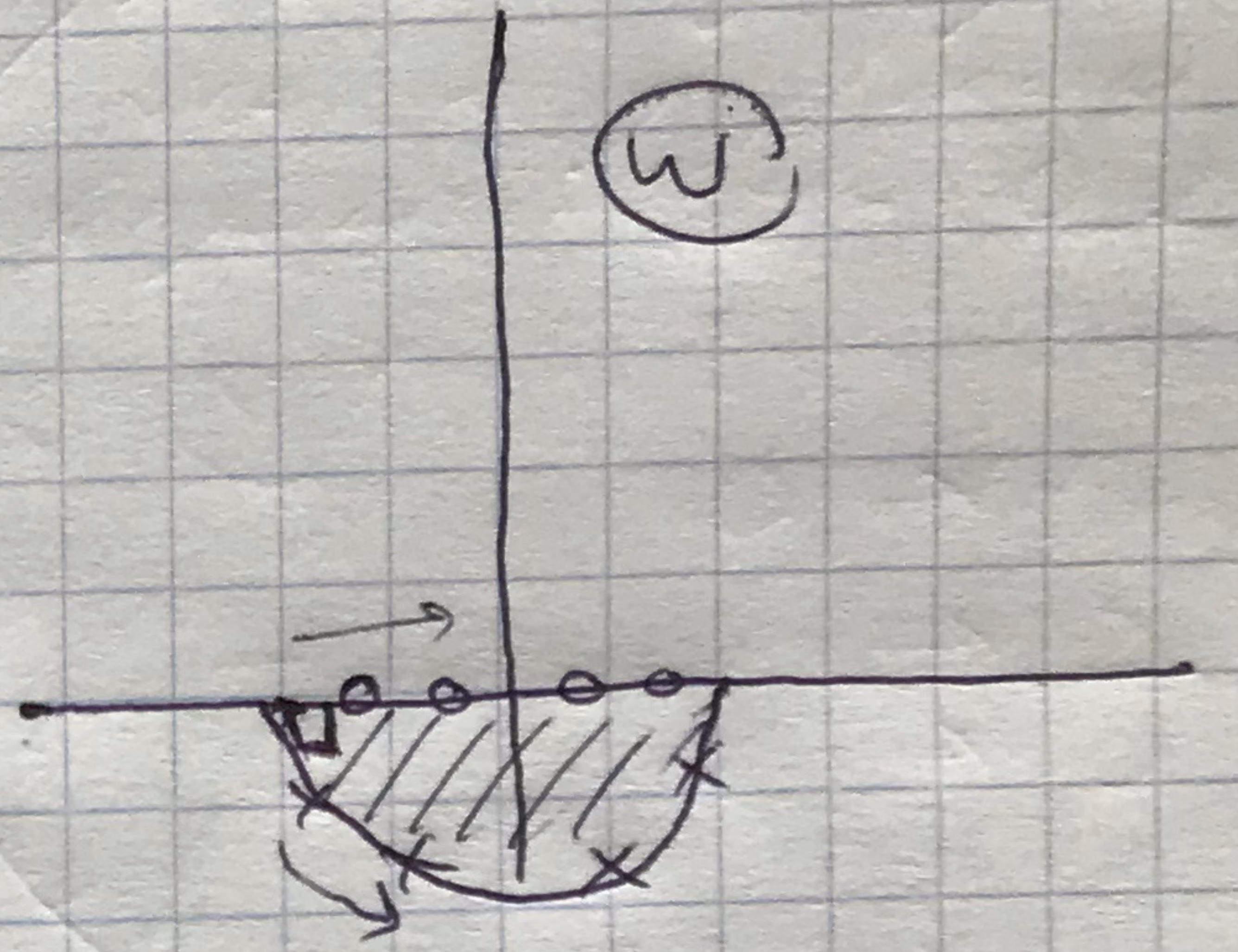
N 2.11 B

Зобразити, у що перетворюється квадрат $x > 0, y > 0$ при $w = \frac{z-i}{z+i}$

Розв'язок.



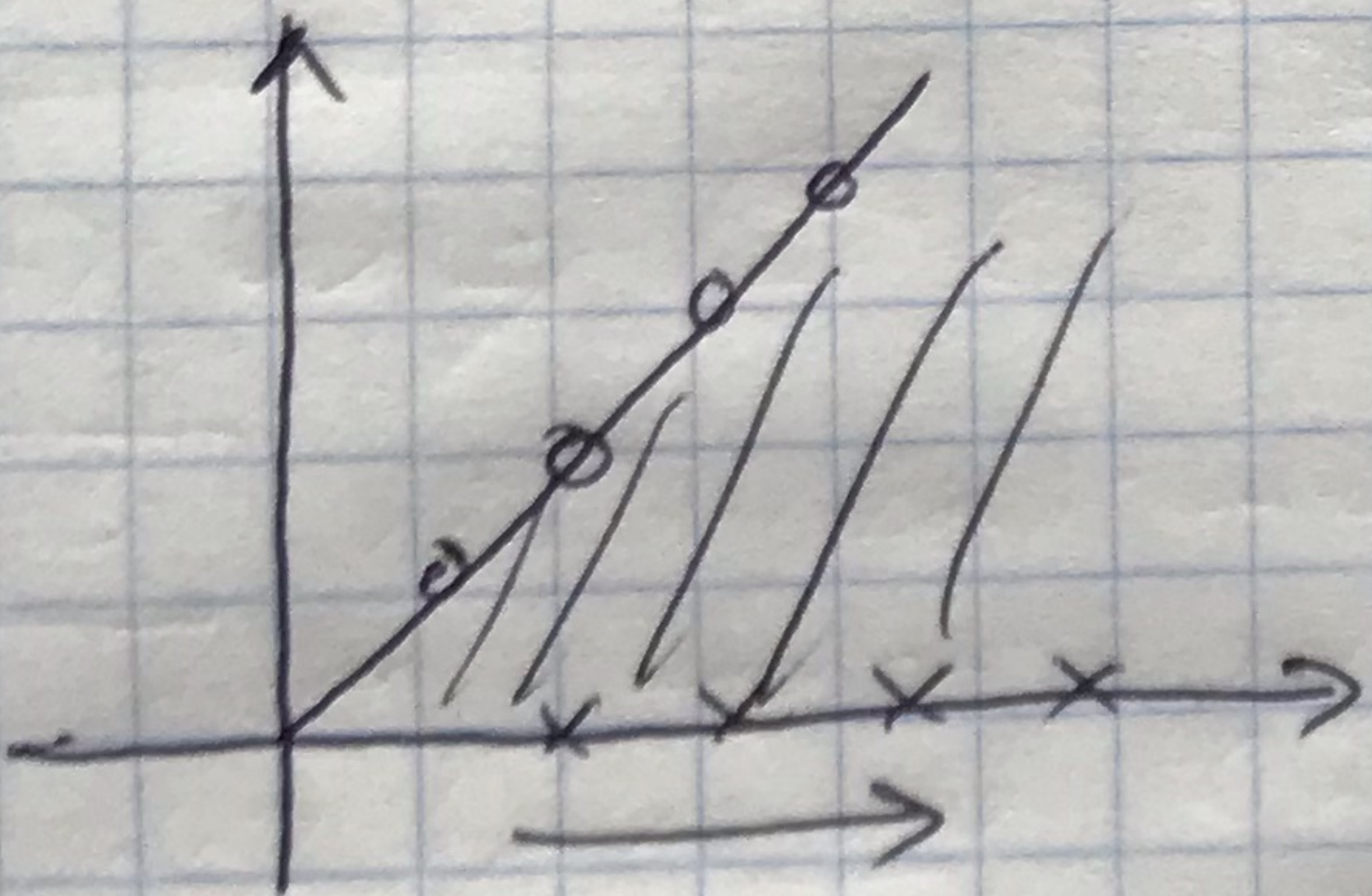
z	w
0	1
i	0
i	∞



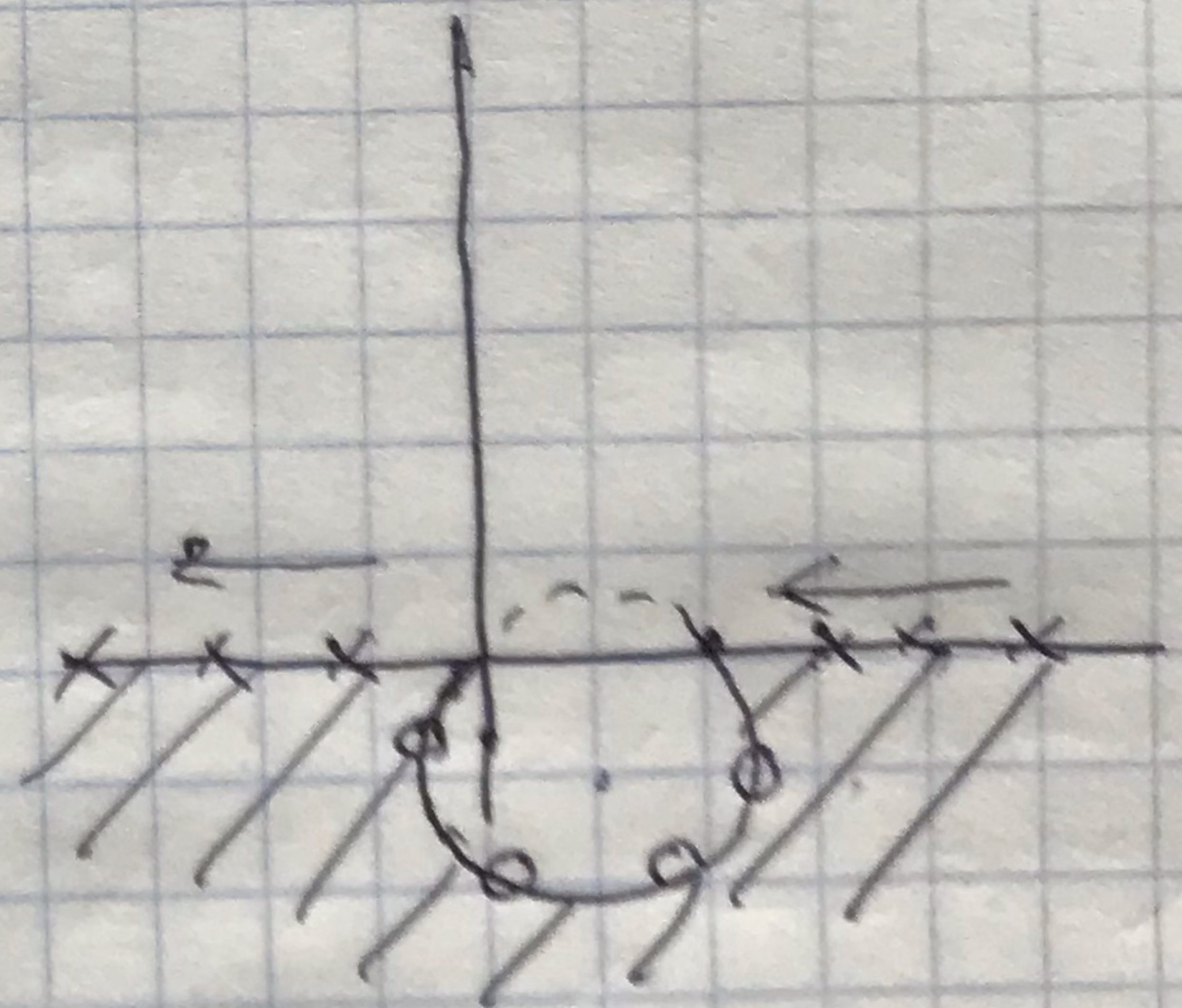
N 2.13 B

Зобразити, у що перетворюється кут $0 < \varphi < \frac{\pi}{4}$ при $w = \frac{z}{z-1}$

Розв'язок.



z	w
0	0
∞	1
i	$\frac{1}{2} - \frac{i}{2}$



Д/З 1.191, 1.192, 2.5, 2.9, 2.12, 2.14, 2.16, 2.22 а)