Заняття 9 Гармонічні функції. Відновлення аналітичної функції.

$\boxed{N 8.15\ Є}$ Нех. ф-я $f(z)$ – диференційовна в обл. D та $A \cdot Re f(z) + B \cdot Im f(z) + C \equiv 0$, де A, B, C – деякі дійсні сталі, серед яких хоча б одна відмінна від нуля. Довести, що $f(z) \equiv const$.

▲ $f(z) = u(x,y) + i v(x,y)$, де $z = x + iy$

$Au + Bv + C \equiv 0$.

$$\begin{cases} A \dfrac{\partial u}{\partial x} = -B \dfrac{\partial v}{\partial x} \\ A \dfrac{\partial u}{\partial y} = -B \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{cases}$$ – однорідна СЛАР відносно A та B

– має нетрив. розвʼязок, якщо

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

Оскільки f – диф. $\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \Rightarrow$

$$\cancel{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 = 0.$$ Враховуючи, що

$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}$ маємо $|f'(z)|^2 = 0$

$\Rightarrow f(z) \equiv const.$ ▼

$\boxed{1.154/\text{Волк}}$ Озн. Ф-я $u(x,y)$ наз. гармонічною в обл. D, якщо вона двічі неперервно диференційовна на D та задов. умові

$$\Delta u \stackrel{def}{\equiv} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Озн. Гармонічні функції u та v наз. спряженими, якщо вони задов. умовам Коші – Рімана

$\boxed{1.154\ \text{Волк}}$ Припускаючи, що аналітична функція нескінченно диференційовна, довести:

1) дійсна та уявні частини аналітичної функції $f(z) = u + iv$ є спряженими гармонічними функціями.

2) ~~Нех. u – гармонічна ф.~~ Похідні (будь-якого порядку) гармонічної функції також є функціями гармонічними

◭ 1). f – диф. $\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}$

$\Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ (мішані похідні співп. бо ф-я f – шидр. диф ∀ кількість разів)

$\Rightarrow u$ – гармонічна функція.

Аналогічно, $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$

$\Rightarrow \Delta v = 0 \quad \Rightarrow v$ – гармонічна

2). Нех. u – гарм. Треба довести, що $\frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m \partial y^n} u$ – гармонічна ф-я.

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

~~$\frac{\partial^2\left(\frac{\partial^{m+n} u}{\partial x^m \partial y^n}\right)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\left(\frac{\partial^{m+n} u}{\partial x^m \partial y^n}\right)}{\partial y^2} = 0$~~

$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^{m+n} u}{\partial x^m \partial y^n}\right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial^{m+n} u}{\partial x^m \partial y^n}\right) \overset{?}{=} 0 \Rightarrow$

$\frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m \partial y^n}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) + \frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m \partial y^n}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \overset{?}{=} 0$

$\Rightarrow \frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m \partial y^n}\left(\underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}_{=0\text{, бо } u\text{ – гарм}}\right) = 0$ ✓ ◮

$\boxed{\text{N 1.152 3)}}$ Волк

Якщо аргументи гармонічної функції $u(x,y)$ замінити за формулами $x = \varphi(\xi, \eta)$, $y = \psi(\xi, \eta)$, де φ та ψ – спряжені гармонічні функції, то перетворена функція також буде гармонічною.

◭ $U(\xi,\eta) = u(x(\xi,\eta), y(\xi,\eta))$ – композиція.

$\frac{\partial U}{\partial \xi} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial \psi}{\partial \xi}$

$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}\right)^2 + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}\frac{\partial \psi}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\cdot\left(\frac{\partial \psi}{\partial \xi}\right)^2 + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2}\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}\frac{\partial \psi}{\partial \xi}$

$\frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \eta}\right)^2 + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial \eta}\frac{\partial \psi}{\partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\cdot\left(\frac{\partial \psi}{\partial \eta}\right)^2 + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2}\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial \eta}\frac{\partial \psi}{\partial \eta}$

$\Rightarrow \Delta U = 0$ ◮

№ 1.164 Волк (На відновлення аналіт. ф-ії)

Чи існує аналітична функція $f(z)=u+iv$, для якої

1) $u=\dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$; 2) $u=\ln(x^2+y^2)-x^2+y^2$.

Розв'язок.

1) $$u'_x=\frac{2x\cdot(x^2+y^2)^2-(x^2-y^2)\cdot 2(x^2+y^2)\cdot 2x}{(x^2+y^2)^4}=$$

$$=\frac{2x\big((x^2+y^2)-2(x^2-y^2)\big)}{(x^2+y^2)^3}=\frac{2x(3y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^3}$$

$$u''_{x^2}=\frac{(6y^2-6x^2)(x^2+y^2)^3-(6xy^2-2x^3)3(x^2+y^2)^2 2x}{(x^2+y^2)^6}=$$

$$=\frac{(6y^2-6x^2)(x^2+y^2)-(6xy^2-2x^3)\cdot 6x}{(x^2+y^2)^4}=\frac{6x^4+6y^4-36x^2y^2}{(x^2+y^2)^4}$$

$$u'_y=\frac{-2y(x^2+y^2)^2-(x^2-y^2)\cdot 2(x^2+y^2)\cdot 2y}{(x^2+y^2)^4}=$$

$$=-\frac{2y(x^2+y^2+2x^2-2y^2)}{(x^2+y^2)^3}=-\frac{2y(3x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^3}=\frac{2y^3-6x^2y}{(x^2+y^2)^3}$$

$$u''_{y^2}=\frac{(6y^2-6x^2)(x^2+y^2)^3-(2y^3-6x^2y)\cdot 2y(x^2+y^2)^2\cdot 3}{(x^2+y^2)^6}=$$

$$=\frac{(6y^2-6x^2)(x^2+y^2)-12y^4+36x^2y^2}{(x^2+y^2)^4}=\frac{-6x^4-6y^4+36x^2y^2}{(x^2+y^2)^4}$$

$$\Rightarrow u''_{x^2}+u''_{y^2}=\frac{12(y^2-x^2)(x^2+y^2)^3+12(x^4-y^4)}{(x^2+y^2)^4}=$$

$$=\frac{12(y^2-x^2)(x^2+y^2)^3+12(x^2-y^2)(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^4}=$$

$$=\frac{12(x^2-y^2)\left(1-(x^2+y^2)^2\right)}{(x^2+y^2)^3}\neq 0$$

не гармо.

$\Rightarrow u''_{x^2}+u''_{y^2}=0 \Rightarrow u$ – гармонічна

2) $u=\ln(x^2+y^2)-x^2+y^2$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{2x}{x^2+y^2}-2x\ ;\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{2(x^2+y^2)-4x^2}{(x^2+y^2)^2}-2$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{2y}{x^2+y^2}+2y\ ;\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{2(x^2+y^2)-4y^2}{(x^2+y^2)^2}+2$$

$\Rightarrow \Delta u=0$ – гарм

$\boxed{\text{N1.159 Волк}}$ Користуючись тим, що в однозв'язній області $\forall$ гарм. ф-я $u(x,y)$ має сімейство спряжених гарм. функцій:

$$v(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} \left(-\frac{\partial u}{\partial y}dx + \frac{\partial u}{\partial x}dy\right) + C,$$

знайти функцію, спряжену із $u(x,y) = x^2 - y^2 + x$.

Розв'язок. $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x+1$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -2y$ $\Rightarrow$

1 спосіб

$$\Rightarrow v(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} (2y\,dx + (2x+1)dy) + C =$$

$$= \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y_0)} 2y_0\,dx + \int_{(x,y_0)}^{(x,y)} (2x+1)\,dy + C =$$

$$= 2xy_0\Big|_{x=x_0}^{x} + (2xy+y)\Big|_{y=y_0}^{y} + C =$$

$$= 2xy_0 - 2x_0y_0 + 2xy + y - 2xy_0 - y_0 + C$$

$$= /\text{Нех. } (x_0,y_0)=(0,0)/ = 2xy + y + C.$$

2-й спосіб (з викорис. умов Коші-Рімана)

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 2x+1 \Rightarrow v(x,y) = \int(2x+1)\,dy =$$

$$= 2xy + y + C_1(x).$$

~~$\frac{\partial v}{\partial x} = 2y \Rightarrow v(x,y) = \int 2y\,dx = 2xy + C_2(y)$~~

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 2y + C_1'(x) = 2y \Rightarrow C_1(x) \equiv const = C$$

$$\Rightarrow v(x,y) = 2xy + y + C$$

$\boxed{\text{N1.173 Волк}}$ Знайти ф-ію, спряжену до $u = \varphi(x^2+y^2)$.

Розв'язок. Нех. $x^2+y^2 = t \Rightarrow u = \varphi(t)$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \varphi'(t)\cdot 2x; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \varphi''(t)\cdot 4x^2 + 2\varphi'(t)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \varphi''(t)\cdot 4y^2 + 2\varphi'(t)$$

$$\Rightarrow 4\varphi''(t)(x^2+y^2) + 4\varphi'(t) = 0$$

$$\varphi''(t)(x^2+y^2) + \varphi'(t) = 0$$

$$t\cdot\varphi''(t) + \varphi'(t) = 0 \qquad \psi(t) = \varphi'(t) \Rightarrow$$

$$t\psi'(t) + \psi(t) = 0 \Rightarrow \frac{d\psi}{\psi} = -\frac{dt}{t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln\psi = -\ln t + \ln c \Rightarrow \psi = \frac{c}{t} = \varphi'(t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi(t) = c\ln t + C_1 \Rightarrow u = C\ln(x^2+y^2) + C_1.$$

$\boxed{\text{№1.177 Волк}}$ Довести існування і знайти аналіт. ф-ію $f(z)$ по заданому модулю $\rho = (x^2+y^2)e^x$.

Розв'язок. $F(z) = Ln\, f(z) = \ln \underbrace{|f(z)|}_{\rho} + i \underbrace{Arg\, f(z)}_{\theta} =$

$= \underbrace{\ln(x^2+y^2) + x}_{U} + \underbrace{i\theta}_{V} = U + iV$

$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{2x}{x^2+y^2} + 1 = \frac{\partial V}{\partial y}$ $\Rightarrow$

$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{2y}{x^2+y^2}$

$\Rightarrow$ $V = \int\left(\frac{2x}{x^2+y^2}+1\right)dy = 2\,\mathrm{arctg}\,\frac{y}{x} + y + c(x)$

$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{2(-y/x^2)}{1+(y/x)^2} + c'(x) = -\frac{2y}{x^2+y^2} \Rightarrow c'(x) = 0$

$\Rightarrow c(x) = const = C \quad \Rightarrow V = 2\,\mathrm{arctg}\,\frac{y}{x} + y$

$\Rightarrow F(z) = \ln(x^2+y^2) + x + i(2\,\mathrm{arctg}\, y/x + y + C) =$

$\Rightarrow f(z) = \exp(\ln(x^2+y^2) + x + i(2\,\mathrm{arctg}\, y/x + y + C)) =$

$= (x^2+y^2)e^x \cdot e^{2iArg z} \cdot e^{iy} \cdot e^{iC} = |z|^2 e^z \cdot e^{i2Arg z} \cdot C_1 =$

$= C_1\, z^2 \cdot e^z$.

ДЗ. 1.160, 1.164, 1.168, 1.174, 1.179, 1.182, 1.184 Волков