Заняття 8. Диференційовність.

$\boxed{\text{№ 8.03 Є}}$ Дов., що $\forall n \in \mathbb{Z}$ $f(z) = z^n$ – дифер. на $\mathbb{C}$ ($\mathbb{C} \setminus \{0\}$, якщо $n<0$) та $f'(z) = nz^{n-1}$.

Доведення Δ $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} \ominus$

1) $n>0$ $\ominus \lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{(z+\Delta z)^n - z^n}{\Delta z} = \lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{z^n + nz^{n-1}\Delta z + O(\Delta z^2) - z^n}{\Delta z} =$

$= \lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{nz^{n-1}\Delta z}{\Delta z} = nz^{n-1} \Rightarrow f$ – диф. на $\mathbb{C}$

2) $n<0$ $\ominus \cancel{\left| \begin{matrix} m=-n, \\ m>0 \end{matrix} \right|} \ominus$ f – розривна в т. $z=0$.

Аналогічно $\lim\limits_{\Delta z} \dfrac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} =$

$= \left| \begin{matrix} m=-n \\ m>0 \end{matrix} \right| = \lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{(z+\Delta z)^{-m} - z^{-m}}{\Delta z} = \lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{-mz^{-m-1}\Delta z}{\Delta z} =$

$= -mz^{-m-1} = nz^{n-1}$. ▼

$\boxed{\text{№ 1.131 Волк}}$ Перевірити виконання умов Коші-Рімана для $f(z) = \cos z$ та $f(z) = e^z$ та довести формули $(e^z)' = e^z$ та $(\cos z)' = -\sin z$.

Δ 1) $e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$, де $z = x+iy$.

Тоді $u = e^x \cos y$, $v = e^x \sin y$

$\dfrac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y$, $\dfrac{\partial v}{\partial y} = e^x \cos y$

$\dfrac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y$, $\dfrac{\partial v}{\partial x} = e^x \sin y$

$\Rightarrow \underbrace{\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}, \quad \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}}_{\text{виконуються!}}$

$f'(z) = \dfrac{\partial u}{\partial x} + i\dfrac{\partial v}{\partial x} = e^x \cos y + ie^x \sin y = e^z \Rightarrow$

$(e^z)' = e^z$.

2) $f(z) = \cos z = \cos(x+iy) = \cos x \cdot \cos(iy) - \sin x \cdot \sin(iy) =$

$= \cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y$

$\dfrac{\partial u}{\partial x} = -\sin x \operatorname{ch} y$, $\dfrac{\partial v}{\partial y} = -\sin x \cdot \operatorname{ch} y$ $\Rightarrow$

$\dfrac{\partial u}{\partial y} = \cos x \operatorname{sh} y$, $\dfrac{\partial v}{\partial x} = -\operatorname{sh} y \cdot \cos x$

Умови Коші-Рімана також виконуються.

$(\cos z)' = \dfrac{\partial u}{\partial x} - i\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\sin x \operatorname{ch} y - i \cos x \operatorname{sh} y =$

$= -\sin(x+iy) = -\sin z$. ▼

$\boxed{№ 1.134 \text{ (Воле)}}$ $f(z) = u + iv = \rho e^{i\theta}$ – аналітична.

Довести, що якщо одна з функцій u, v, ρ, θ тотожно дорівнює константі, то й функція $f(z) \equiv const$.

▲ $z = x + iy$, $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$.

f – аналіт $\Leftrightarrow$ f – диф. та однозначна.

$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$.

1) Нех. $u \equiv const$ $\Rightarrow u'_x = u'_y = 0$ $\Rightarrow v'_y = v'_x = 0$

$\Rightarrow f(z) \equiv const$.

Аналогічно, якщо $v \equiv const \Rightarrow f(z) \equiv const$

2). Нехай $\rho \equiv const$.

а) тривіальний випадок: якщо $\rho \equiv 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow f(z) \equiv 0$.

б) Нех. $\rho \equiv const \neq 0$, $\rho \equiv C > 0$.

$\Rightarrow u^2(x,y) + v^2(x,y) \equiv C^2 \Leftrightarrow \cancel{f(z) \cdot f(z) = C^2}$

$\Leftrightarrow f(z) \cdot \bar{f}(z) = C^2$, де $\bar{f}(z) = u - iv$.

$\Rightarrow f(z) \neq 0$ $\Rightarrow \bar{f}(z) = \frac{C^2}{f(z)}$ – аналітичне

$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = +\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x}$

$\Rightarrow v'_y \equiv 0$, $v'_x \equiv 0 \Rightarrow u'_x \equiv 0$, $u'_y \equiv 0$

$\Rightarrow f \equiv const$.

Випадок, якщо $\theta = const$ – Д/З

▶

$\boxed{№ 1.140 \text{ Воле}}$ Довести твердження:

1) якщо у функції $w = f(z)$ в точці z $\exists \lim\limits_{\Delta z \to 0} \left(Re \frac{\Delta w}{\Delta z}\right)$, то частинні похідні u'_x та v'_y існують та рівні між собою: $(\exists u'_x = v'_y)$.

▲ $w = u + iv$, $\Delta w = \Delta u + i \Delta v$, $\Delta z = \Delta x + i \Delta y$.

$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x + i \Delta y} = \frac{\Delta u \Delta x + \Delta v \Delta y + i(\Delta v \Delta x - \Delta u \Delta y)}{\Delta x^2 + \Delta y^2} =$

$\Rightarrow \exists \lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\Delta u \Delta x + \Delta v \Delta y}{\Delta x^2 + \Delta y^2}$

$\Rightarrow \exists \lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \equiv 0}} \frac{\Delta u \Delta x}{\Delta x^2} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = u'_x = v'_y = \lim\limits_{\substack{\Delta x \equiv 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\Delta v}{\Delta y}$

▶

$\boxed{\text{№143 Волк}}$ Нехай $w = f(z) = u + iv$, $u(x,y)$, та $v(x,y)$ — диференційовні в т. z, та (x,y). Довести, що множина можливих граничних значень відношення $\frac{\Delta w}{\Delta z}$ при $\Delta z \to 0$ є або точка, або коло.

▲ $\Delta w = \Delta u + i\Delta v$.

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + o(\rho) \ \ominus$$

$$\Delta v = \frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y + o(\rho) \ \boxed{\equiv}$$

$$/\ \Delta x = \frac{\Delta z + \overline{\Delta z}}{2}, \quad \Delta y = \frac{\Delta z - \overline{\Delta z}}{2i}\ /$$

$$\ominus\ \frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{\Delta z + \overline{\Delta z}}{2}\right) + \frac{\partial u}{\partial y}\left(\frac{\Delta z - \overline{\Delta z}}{2i}\right)$$

$$\boxed{\equiv}\ \frac{\partial v}{\partial x}\left(\frac{\Delta z + \overline{\Delta z}}{2}\right) + \frac{\partial v}{\partial y}\left(\frac{\Delta z - \overline{\Delta z}}{2i}\right).$$

$$\Delta w = \frac{\Delta z}{2}\underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial y}\right)}_{A} +$$

$$+ \frac{\overline{\Delta z}}{2}\underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - i\frac{\partial v}{\partial y}\right)}_{B} + o(\rho)$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{A}{2} + \frac{B}{2}\cdot\frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z} + o(\rho)$$

Так як $\left|\frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}\right| = 1$, то $\left|\lim\limits_{\Delta z \to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z} - \frac{A}{2}\right| = \left|\frac{B}{2}\right|$

$\Rightarrow$ частинні границі для $\lim\limits_{\Delta z}\frac{\Delta w}{\Delta z}$ належать колу $\left|z - \frac{A}{2}\right| = \left|\frac{B}{2}\right|$. ■

Д/З 1.136, 1.140 – 1.143 (Волков.)

$\boxed{№1.139 \text{ Волк}}$ Довести, що для функції $f(z)=\sqrt{|xy|}$ в точці $z_0=0$ виконуються умови Коші-Рімана, але похідна не існує.

◁ Дослідимо цю функцію на диференційовність в кожній точці z_0

1) Нехай $z_0=x_0+iy_0$, $x_0\neq 0$ та $y_0\neq 0$,

тоді $f(z)=\underbrace{\sqrt{|xy|}}_{u}+i\cdot\underbrace{0}_{v}$

Перевір умови критерію диференційовності ~~виконуються~~:

а) u та v — диференц., як дійсні функції двох змінних

u — дифф., тому що $\exists$ ~~непер.~~ похідні

$$u'_x=\frac{1}{2\sqrt{|xy|}}\,\mathrm{sgn}(xy)\cdot y,\quad u'_y=\frac{1}{2\sqrt{|xy|}}\,\mathrm{sgn}(xy)\cdot x$$

— неперервні в околі $(x_0\neq 0,\ y_0\neq 0)$.

б) ~~викон.~~ умови Коші-Рімана: $u'_x=v'_y$?

$$u'_x(x_0,y_0)=\frac{1}{2\sqrt{|x_0y_0|}}\,\mathrm{sgn}(x_0y_0)\cdot y_0=\frac{1}{2}\sqrt{\left|\frac{y_0}{x_0}\right|}\,\mathrm{sgn}(x_0y_0)\neq 0$$

$\Rightarrow$ умови Коші-Рімана не викон. $\Rightarrow$

$\Rightarrow f$ не дифер. в т. z_0, де $x_0\neq 0$, та $y_0\neq 0$.

2) Нехай $x_0\neq 0$ та $y_0=0$.

$$u'^{(x_0,y_0)}_x=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x_0+\Delta x,y_0)-u(x_0,y_0)}{\Delta x}=$$

$$=\frac{\sqrt{(x_0+\Delta x)\cdot 0}-\sqrt{x_0\cdot 0}}{\Delta x}=0$$

$$u'_y=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{u(x_0,y_0+\Delta y)-u(x_0,y_0)}{\Delta y}=$$

$$=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\sqrt{|x_0\cdot\Delta y|}-\sqrt{x_0\cdot 0}}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\sqrt{\left|\frac{x_0}{\Delta y}\right|}=\infty\ \nexists$$

$\Rightarrow u(x,y)$ — не дифф. в т. $(x_0\neq 0,\ 0)$.

3) $x_0 = 0$ та $y_0 = 0$.

$$u'_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x_0+\Delta x, y_0) - u(x_0, y_0)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(\Delta x_0, 0) - u(0,0)}{\Delta x} = \frac{\sqrt{|\Delta x_0 \cdot 0|} - \sqrt{0 \cdot 0}}{\Delta x} = 0$$

$$u'_y = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{u(0, \Delta y) - u(0,0)}{\Delta y} = 0$$

$u'_x = v'_y \equiv 0 \Rightarrow$ умови К-Р викон.!

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\Delta u - u'_x(0,0)\cdot \Delta x - u'_y(0,0)\cdot \Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} =$$

$$= \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{u(\Delta x, \Delta y) - u(0,0) - 0 - 0}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} =$$

$$= \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\sqrt{|\Delta x \cdot \Delta y|}}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = \Big/ \; \Delta x = \Delta y = \frac{1}{n} \Rightarrow \lim = \frac{1}{\sqrt{2}} \neq 0 \; \Big/ \neq 0$$

$\Rightarrow u$ - не диференц. в т. $(0,0)$

~~$\Rightarrow$ умови критерію диф. не викон.~~

~~Перевір. виконання умов Коші-Рімана~~

$\Rightarrow$ Умови критер. диф. не виконуються!

Докажем, що похідної не існує в т. $z_0 = 0$.

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(\Delta z) - f(0)}{\Delta z} = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\sqrt{|\Delta x \Delta y|}}{\Delta x + i\Delta y} =$$

$$= \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\Delta x \sqrt{|\Delta x \Delta y|}}{(\Delta x^2 + \Delta y^2)} - i \underbrace{\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\Delta y \cdot \sqrt{|\Delta x \Delta y|}}{(\Delta x^2 + \Delta y^2)}}_{L_2}$$

При $\Delta x = \Delta y = 1/n$ $\quad L_1 = 1/2$ та $L_2 = \frac{1}{2}$

А при $\Delta x = 1/n$, $\Delta y = \frac{2}{n}$ $\quad L_1 = \frac{\sqrt{2}}{5}$, та $L_2 = \frac{2\sqrt{2}}{5}$

$\Rightarrow$ границі не існують $\Rightarrow f'(z)$ не існує в т. $z_0 = 0$