Заняття 7. Границя ф-ї. Неперервність. Рівном. неперервність. Диференційовн...

$\boxed{\text{N 1.126 Волк}}$ ~~Ф-ії визначені на~~

Ф-ії $\frac{\operatorname{Re} z}{z}$, $\frac{z}{|z|}$, $\frac{\operatorname{Re}(z^2)}{|z|^2}$, $\frac{z \operatorname{Re} z}{|z|}$ визначені для $z \neq 0$. Які з них можуть бути довизначені неперервним чином в т. $z=0$?

(Озн. f - непер. в т. z_0, якщо $f(z) \to f(z_0)$, $z \to z_0$)

Розв'язок. 1) $f_1(z) = \frac{\operatorname{Re} z}{z}$; $\lim\limits_{z\to 0} f_1(z) =$

$$= \lim_{z\to 0} \frac{\operatorname{Re} z}{z} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x}{x+iy} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x(x-iy)}{x^2+y^2} =$$

$$= \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2}{x^2+y^2} - i\frac{xy}{x^2+y^2}.$$

$$\nexists \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2}{x^2+y^2} \quad \left(\exists \; \begin{array}{l} x_n = y_n = \frac{1}{n} \Rightarrow \lim = \frac{1}{2} \\ x_n' = 1/n,\ y_n = \frac{1}{2n} \Rightarrow \lim = \frac{1}{5} \end{array} \right)$$

$\nexists \lim \frac{xy}{x^2+y^2}$. $\Rightarrow$ Не можна довизн.

2) $f_2(z) = \frac{z}{|z|}$

$$\lim_{z\to 0} f_2(z) = \lim_{z\to 0} \frac{z}{|z|} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x+iy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$\nexists \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\nexists \lim \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ $\Rightarrow$ Не можна довизн.

3) $f_3(z) = \frac{\operatorname{Re}(z^2)}{|z|^2}$

$$\lim_{z\to 0} \frac{\operatorname{Re}(z^2)}{|z|^2} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\operatorname{Re}((x+iy)(x+iy))}{x^2+y^2} =$$

$= \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ $\nexists$ границі! $\Rightarrow$ Не можна довизн.

4) $f_4(x) = \frac{z \operatorname{Re} z}{|z|}$

$$\lim_{z\to 0} \frac{z \operatorname{Re} z}{|z|} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{(x+iy)\cdot x}{\sqrt{x^2+y^2}} =$$

$$= \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} + i\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \;=$$

$$0 \le \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2}{|x|} = 0$$

$$0 \le \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}} \le \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{|xy|}{|x|} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} |y| = 0$$

$=$ 0 $\Rightarrow$ можна довизначити f в т. $z=0$ $f(0)=0$ непер. чином.

$\boxed{\text{№1.127 Волк}}$ Чи будуть функції

1) $f_1(z) = 1/(1-z)$; 2) $f_2(z) = 1/(1+z^2)$

неперервні всередині одиничного кола ($|z|<1$)?

Чи будуть вони рівномірно непер. на ньому?

Розв'язок. 1) $\boxed{f_1(z) = 1/(1-z)}$

Непер. ÷ очевидно викон. (+)

Рівном. непер. Озн. f – рівном. непер. на мн-і $M \subset D_f$, якщо

$\cancel{\forall \varepsilon>0 \ \forall z_1 \in M, z_2 \in M \ \exists \delta>0}$:

$\forall \varepsilon>0 \ \exists \delta>0 : \forall (z_1 \in M, z_2 \in M) : |z_1-z_2|<\delta \Rightarrow |f(z_1)-f(z_2)|<\varepsilon$.

Теор. Кантора. Якщо f – непер. на компакті, то f – рівн. непер. на ньому.

f – не є рівн. непер $\Leftrightarrow$

$\exists \varepsilon>0 : \forall \delta>0 \ \exists z_1 \in M, z_2 \in M : |z_1-z_2|<\delta \Rightarrow |f(z_1)-f(z_2)| \geq \varepsilon$

$z_0=1$ – "погана" точка (знаменник оберт. в 0)

$\Rightarrow$ $\exists$ $z_n' = 1-\frac{1}{n}$, $z_n'' = 1-\frac{1}{2n}$

$|z_n'-z_n''| = |\frac{1}{n}-\frac{1}{2n}| = \frac{1}{2n}$ $\cancel{\to 0}$ $\cancel{<\delta}$ $\xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Але

$|f(z_n')-f(z_n'')| = |n-2n| = n \to \infty$ $(\not\to 0)$

$\Rightarrow$ f – не є рівн. непер. на множині $|z|<1$.

2) $\boxed{f_2(z) = 1/(1+z^2)}$ – неперервна

Дослід. на рівном. непер.

$1+z^2=0 \Rightarrow z=\pm i$ – "погані" точки

$z_n' = \sqrt{1-\frac{1}{n}}\, i$, $z_n'' = \sqrt{1-\frac{2}{n}}\, i$

$|z_n'-z_n''| \to 0$, $n\to\infty$ $\left(\frac{1/n}{\sqrt{\ }+\sqrt{\ }} \to 0\right)$

$|f(z_n')-f(z_n'')| = \left|\frac{1}{1-(1-\frac{1}{n})} - \frac{1}{1-(1-\frac{2}{n})}\right| = |n-\frac{n}{2}| = \frac{n}{2}$

$\not\to 0, n\to\infty$

не є рівн. непер. на $|z|<1$.

№1.128 Волк.) 1) Довести, що $f=e^{-1/|z|}$ — рівн. непер. на крузі $|z|\le R$ з виколотою точкою $z_0=0$.

▲ $M=\{z\in\mathbb{C} \mid 0<|z|\le R\}$.

~~За означ.~~ $\cancel{\left|e^{-\frac{1}{|z_1|}}-e^{-\frac{1}{|z_2|}}\right| = \left|\frac{e^{\frac{1}{|z_1|}-\frac{1}{|z_2|}}}{e^{-1/|z_2|}}-1\right| <}$

$\cancel{< \left|\frac{e^{\frac{\delta}{|z_1||z_2|}}-1}{e^{\frac{1}{|z_2|}}}\right| < \left|e^{-\frac{\delta}{|z_1||z_2|}}-1\right| =}$

$\cancel{= 1-e^{-\frac{\delta}{|z_1||z_2|}} < 1-e^{-\delta/R^2} < \varepsilon \Rightarrow}$

$\cancel{\Rightarrow \exists\, \delta = -R^2\ln(1-\varepsilon) \Rightarrow f}$ ~~— рівн. неп.~~

Або за теор. Кантора:

$\lim\limits_{z\to 0} e^{-1/|z|}=0 \Rightarrow f$ можна довизн. непер. числом $f(0)=0 \Rightarrow$

$f^*(z)=\begin{cases} f(z), & z\ne 0\\ 0, & z=0\end{cases}$ — непер. на компакті $|z|\le R \Rightarrow f$ — рівн. непер. на ньому $\Rightarrow f$ — рівн. непер. на M.

▼

2) Чи буде рівном. непер. на $M=\{0<|z|\le R\}$ ф-я $f(z)=e^{-1/z^2}$?

Розвʼязок. $z_0=0$ — "погана" точка $\Rightarrow$

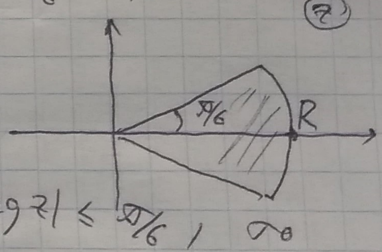
$\exists\, z_n'=\frac{1}{n},\ z_n''=\frac{i}{n}$; $|z_n'-z_n''|\to 0,\ n\to\infty$.

$|f(z_n')-f(z_n'')| = |e^{-n^2}-e^{n^2}| \not\to 0,\ n\to\infty$

$\Rightarrow f$ не є рівн. непер.

3) Чи буде функція $f(z)=e^{-1/z^2}$ рівн. непер. в секторі $0<|z|\le R$, $|\arg z|\le \pi/6$?

7



Розвʼязок. $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$,

$f(z)=e^{-\frac{1}{r^2}(\cos 2\varphi - i\sin 2\varphi)}$

$|f(z)|=e^{-\frac{\cos 2\varphi}{r^2}}$. Оскільки $|\arg z|\le \pi/6$, то

$1/2\le \cos 2\varphi \le 1 \Rightarrow \cos 2\varphi > 0$

$\Rightarrow \exists \lim\limits_{z\to 0} f(z) = \lim\limits_{r\to 0+} e^{-\frac{\cos 2\varphi}{r^2}} = 0$

$\Rightarrow f^*$ можна довизначити непер. числом $f^*(0)=0 \Rightarrow$ за теор. Кантора f^* — рівн. непер. на компакті $\{|z|\le R,\ |\arg z|\le \frac{\pi}{6}\}$.

Диференційовність.

$\boxed{\text{№}8.01 \text{ Євгр.}}$ 4) Знайти всі точки, в яких диференційовна ф-я $f(z)=x^2+iy^2$, $(z=x+iy)$.

Розвʼязок. Озн. f, що визн. в деякому околі точки z_0, наз. диференційовною в цій точці, якщо $\exists$ скінченна границя
$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=f'(z_0).$$

Критерій диференційовності. Нех. $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, де $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, визн. в деякому околі т. $z_0=x_0+iy_0$. Для диференційовності f в т. z_0 необх. і дост., щоб

1) ф-ії $u(x,y)$ та $v(x,y)$ були диференційовними (як ф-ії двох дійсних змінних)
2) викон. умови Коші-Рімана:
$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)=\frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0) \text{ та}$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)=-\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0).$$

За озн.: $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}=$
$$=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{(x_0+\Delta x)^2+i(y_0+\Delta y)^2-x_0^2-iy_0^2}{\Delta x+i\Delta y}=$$
$$=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{2x_0\Delta x+2iy_0\Delta y}{\Delta x+i\Delta y}=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{2x_0(\Delta x)^2+2y_0(\Delta y)^2}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}+$$
$$+\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\left(i\left(\frac{2y_0\Delta x\Delta y-2x_0\Delta x\Delta y}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\right)\right)$$

Обидві границі існують лише при $x_0=y_0$ ~~$x_0=0$ та $y_0=0$~~.

Відповідь: f − диф. лише при $z=0$.

6) $f(z)=2xy-i(x^2-y^2)$.

Розвʼязок. $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}=$
$$=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{2(x_0+\Delta x)(y_0+\Delta y)-i((x_0+\Delta x)^2-(y_0+\Delta y)^2)-2x_0y_0+i(x_0^2-y_0^2)}{\Delta x+i\Delta y}$$
$$=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{2x_0\Delta y+2y_0\Delta x-i(2x_0\Delta x-2y_0\Delta y)}{\Delta x+i\Delta y}=$$
$$=2\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\left(\frac{x_0(\Delta y-i\Delta x)}{\Delta x+i\Delta y}+y_0\right)=2\lim\left(\frac{x_0(\Delta y-i\Delta x)(\Delta x-i\Delta y)}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}+y_0\right)$$
$$=2\lim\left(x_0\frac{(\Delta y)^2+(\Delta x)^2}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}+y_0\right)=x_0+y_0 \quad \exists$$
$\Rightarrow f$ − дифер. на $\mathbb{C}$.

Д/З №1.131, 1.133,
№1.136, 1.137
Волков.