Заняття 6. Послідовності та ряди.

Розв'язки задач взято з

1. Грищенко О.Ю., Ляшко С.І. Теорія функцій комплексної змінної. К.: Вид-во ВПЦ "Київський університет". 2009. – 496с.

Послідовності комплексних чисел

1. Покажемо, що зі збіжності послідовності комплексних чисел $\{z_n\}$ таких, що $\lim\limits_{n\to\infty} z_n \neq 0$, не випливає збіжність послідовності аргументів цих чисел $\{\arg z_n\}$.

◁ Розглянемо послідовність $\{z_n\}$, де $z_n = -1 + i\dfrac{(-1)^n}{n}$. Очевидно, що вона збіжна та $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = -1$. Однак, оскільки для членів послідовності з парними номерами $z_{2n} = -1 + \dfrac{i}{4n^2}$, а з непарними – $z_{2n+1} = -1 - \dfrac{i}{(2n+1)^2}$, то $\arg z_{2n} = \arg\left(-\left(1 - \dfrac{i}{4n^2}\right)\right) = \pi - \operatorname{arctg}\dfrac{1}{4n^2}$,

а $\arg z_{2n+1} = \arg\left(-\left(1 - \dfrac{i}{(2n+1)^2}\right)\right) = -\pi + \operatorname{arctg}\dfrac{1}{(2n+1)^2}$. Звідси виливає, що $\lim\limits_{n\to\infty} \arg z_{2n} = \pi$, а $\lim\limits_{n\to\infty} \arg z_{2n+1} = -\pi$. Отже, послідовність $\{\arg z_n\}$ має дві граничні точки та є розбіжною ▷

2. Знайти границю послідовності $\{z_n\}$, де $z_n = \left(1 + \dfrac{a}{n}\right)^n$, а $a = \alpha + i\beta$.

◁ Покладемо $z_n = x_n + iy_n = r_n(\cos\varphi_n + i\sin\varphi_n)$. Тоді

$$|z_n| = r_n = \left|1 + \frac{a}{n}\right|^n = \left(\left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^2 + \left(\frac{\beta}{n}\right)^2\right)^{\frac{n}{2}} = \left(1 + \frac{2\alpha}{n} + \frac{\alpha^2 + \beta^2}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}},$$

$$\varphi_n = \arg z_n = n \arg\left(1+\frac{a}{n}\right) = n \operatorname{arctg}\left(\frac{\beta}{n} \Big/ \left(1+\frac{\alpha}{n}\right)\right).$$

Оскільки при великих n точка z_n лежить у правій півплощині $\operatorname{Re} z > 0$, то при $n \to \infty$ маємо $1+\frac{2\alpha}{n}+\frac{\alpha^2+\beta^2}{n^2} \sim 1+\frac{2\alpha}{n}$. Отже

$$\varphi_n = n \operatorname{arctg}\left(\frac{\beta}{n} \Big/ \left(1+\frac{\alpha}{n}\right)\right) \sim n \frac{\beta}{n} \frac{n}{n+\alpha} \sim \beta\left(1-\frac{\alpha}{n}\right).$$

Звідси $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = \exp\left(\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2\alpha}{n}\frac{n}{2}\right) = e^{\alpha}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n = \beta$, а

$$\lim_{n\to\infty} z_n = e^{\alpha}(\cos\beta + i\sin\beta) = e^{\alpha+i\beta} \ \triangleright$$

3. Обчислити границю $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+i\frac{n}{n^2-1}\right)^n$.

$\triangleleft$ Оскільки $z_n = \left(1+i\frac{n}{n^2-1}\right)^n$, то маємо $|z_n| = \left(1+\frac{n^2}{\left(n^2-1\right)^2}\right)^{n/2}$, $\arg z_n = n \operatorname{arctg}\frac{n}{n^2-1}$. Легко бачити, що

$$\lim_{n\to\infty} |z_n| = \exp\left(\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2}{(n^2-1)^2}\frac{n}{2}\right)\right) = 1, \ \operatorname{arctg}\frac{n}{n^2-1} \sim \frac{n}{n^2-1},$$

а $\lim\limits_{n\to\infty} n \operatorname{arctg}\frac{n}{n^2-1} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2-1} = 1$. Отже,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+i\frac{n}{n^2-1}\right)^n = \cos 1 + i\sin 1 = e^{i} \ \triangleright$$

4. Знайти границю послідовності частинних сум $\{S_n\}$, де $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n}\frac{(\pi i)^k}{k!}$.

$\triangleleft$ Покажемо, що така послідовність частинних сум є фундаментальною. Нехай $\varepsilon > 0$, $n \in \mathbb{N}$ і $p \in \mathbb{N}$. За ознакою Д'Аламбера числовий ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\pi^k}{k!}$ збігається, отже, для фіксованого $\varepsilon > 0$ при великих n і довільних p маємо, що $\left|S_{n+p} - S_n\right| = \left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} \frac{(\pi i)^k}{k!}\right| \le \sum\limits_{k=n+1}^{n+p} \frac{\pi^k}{k!} < \varepsilon$.

Для обчислення шуканої границі скористаємося тим, що збіжність послідовності комплексних чисел рівносильна збіжності послідовностей, складених з її дійсних та уявних частин. Тому дослідимо окремо збіжність послідовностей дійсних та уявних частин послідовності. Для цього послідовність розіб'ємо на такі підпослідовності дійсних чисел:

$$\operatorname{Re} S_n = 1 - \frac{\pi^2}{2!} + \ldots + (-1)^n \frac{\pi^n}{n!}, \text{ коли } n \text{ парне } (n = 2l);$$

$$\operatorname{Re} S_n = 1 - \frac{\pi^2}{2!} + \ldots + (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{\pi^{n-1}}{(n-1)!} - \text{коли } n \text{ непарне } (n = 2l+1);$$

$$\operatorname{Im} S_n = \pi - \frac{\pi^3}{3!} + \ldots + (-1)^{\frac{n+2}{2}} \frac{\pi^{N-1}}{(n-1)!}, \text{ якщо } n \text{ парне } (n = 2l);$$

$$\operatorname{Im} S_n = \pi - \frac{\pi^3}{3!} + \ldots + (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{\pi^n}{n!} - \text{при непарному } n \ (n = 2l+1).$$

Звідси маємо:

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{Re} S_n = \cos\pi = -1, \ \lim_{n\to\infty} \operatorname{Im} S_n = \sin\pi = 0,$$

отже, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = -1$ $\triangleright$

5. Дослідити збіжність послідовності комплексних чисел $\{z_n\}$, де $z_n = \frac{1}{n}\left(1 + e^{i\varphi} + \ldots + e^{in\varphi}\right)$ при $\varphi \in (0, 2\pi)$.

◁ Оскільки сума в дужках є сумою геометричної прогресії, то загальний її член можна записати так: $z_n = \frac{1}{n}\frac{e^{i\,(n+1)\varphi} - 1}{e^{i\varphi} - 1}$. Отже, $|z_n| = \frac{1}{n}\sqrt{\frac{1-\cos(n+1)\varphi}{1-\cos\varphi}}$. Ураховуючи, що другий співмножник обмежений при $n \to \infty$, маємо, що послідовність збіжна, а $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0$ ▷

Ряди комплексних чисел

1. Дослідити збіжність числових рядів:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{in}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{\frac{\pi i}{n}}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2n}}{(2n)!\ \ i^n}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{in\varphi}$.

◁ а) Оскільки $e^{in} = \cos n + i \sin n$, то дослідимо окремо ряди, складені з дійсних ($\sum\limits_{k=1}^{\infty} \cos n$) та уявних ($\sum\limits_{k=1}^{\infty} \sin n$) частин. Відомо, що послідовності $\{\cos n\}$ та $\{\sin n\}$ при $n \to \infty$ не мають границь. Тому ряди $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \cos n$ та $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \sin n$ розбіжні, а отже, розбіжним є й ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} e^{in}$.

б) Оскільки $\frac{1}{n}\cos\frac{\pi}{n} \sim \frac{1}{n}$ при $n \to \infty$, то дійсна частина досліджуваного ряду розбігається. Отже, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{\frac{\pi i}{n}}$ – теж розбіжний. Оскільки $\frac{1}{n}\sin\frac{\pi}{n} \sim \frac{\pi}{n^2}$, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n}\sin\frac{\pi}{n}$ буде збіжним.

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^{2n}}{(2n)!\quad i^{n}}$

До ряду, складеного з модулів членів досліджуваного ряду, застосуємо ознаку Д'Аламбера

$$a_n = \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \frac{(n+1)^{2n+2}(2n)!}{n^{2n}(2n+2)!} = \frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}.$$

Оскільки $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \dfrac{e^2}{4} > 1$, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{n^{2n}}{(2n)!\,i^{n}}$ розбіжний. Тут використано той факт, що при невиконанні умови збіжності Д'Аламбера не виконується необхідна умова збіжності ряду.

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n} e^{in\varphi}$

До дійсної $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{\cos n\varphi}{n}$ та уявної $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{\sin n\varphi}{n}$ частин ряду застосуємо ознаку Діріхле. Ця ознака дозволяє зробити висновок, що перший з рядів збігається при $\varphi \neq 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$, а другий – для усіх значень φ. Отже, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{n} e^{in\varphi}$ збіжний при $\varphi \neq 2k\pi$. Оскільки $\left|\dfrac{e^{in\varphi}}{n}\right| = \dfrac{1}{n}$, то ряд не абсолютно збіжний ▷

2. Знайти всі значення дійсного параметра α, при яких ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} n^{-\alpha} e^{in}$ буде абсолютно збіжним.

◁ Дослідимо ряд на абсолютну збіжність. Оскільки $\left|e^{in}\right| = 1$ для всіх n, то ряд абсолютно збігається при $\alpha > 1$. Якщо $\alpha \leq 1$, то робимо висновок, що ряд абсолютно не збігається ▷

3. Довести, що ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_n^k$, де $a_n = \dfrac{e^{in\sqrt{2}}}{\ln(1+n)}$ $(n \in \mathbb{N})$, збігається при усіх $k \in \mathbb{N}$, але не збігається абсолютно.

$\lhd$ Нехай $k \in \mathbb{N}$ – довільне фіксоване число. Покладемо $u_n = e^{ink\sqrt{2}}$, $\upsilon_n = \dfrac{1}{\ln^k(1+n)}$ і застосуємо до ряду ознаку Діріхле. Очевидно, що умови цієї ознаки виконуються, тобто ряд збіжний. Ряд, складений з абсолютних величин, має вигляд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\ln^k(1+n)}$. Ураховуючи, що при великих n $e^{\ln(1+n)} = 1+n < e^{\sqrt[k]{n}}$, а отже, вірна оцінка $\ln^k(1+n) < n$, робимо висновок, що ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\ln^k(1+n)}$ мінорується при великих n гармонічним рядом $\dfrac{1}{M} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$, а отже, він розбіжний $\rhd$

4. Нехай ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_n$ збігається та $|\arg a_n| \le \varphi < \dfrac{\pi}{2}$ для всіх $n \in \mathbb{N}$. Довести, що ряд збігається абсолютно.

$\lhd$ Нехай $a_n = \alpha_n + i\beta_n$ для $n \in \mathbb{N}$. Зі збіжності ряду $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_n$ випливає збіжність рядів $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_n$ та $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \beta_n$. Нерівність $|\arg a_n| \le \varphi < \dfrac{\pi}{2}$ приводить до того, що $\alpha_n \ge 0$ і $|\beta_n| \le \alpha_n \mathrm{tg}\varphi$ для всіх $n \in \mathbb{N}$. Отже, ряди збігаються абсолютно, а тому збігається й ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_n$ $\rhd$

Д/З № 1.126-1.128 Волковиський (границя функції, неперервність, рівномірна неперервність)