Домашнє завдання. Заняття 5

N 1.62 (B) 3) 4) Знайти суми $S_1 = \cos x + \cos 3x + \ldots + \cos(2n-1)x$

$S_2 = \sin x + \sin 3x + \ldots + \sin(2n-1)x$

Розв'язок. $S_1 + iS_2 = e^{ix} + e^{3ix} + \ldots + e^{(2n-1)ix} =$

$= \frac{e^{ix}(e^{2inx}-1)}{e^{2ix}-1} =$ /Виділяємо дійсну і уявну частину/ $= \ldots =$

$= \underbrace{\frac{\sin 2nx}{2\sin x}}_{S_1} + i\,\underbrace{\frac{\sin^2 nx}{\sin x}}_{S_2}$

N 1.64 (B) 2) Довести $\sin z = \cos(\frac{\pi}{2} - z)$

◁ $\cos(\frac{\pi}{2}-z) = \frac{e^{i(\frac{\pi}{2}-z)} + e^{-i(\frac{\pi}{2}-z)}}{2} =$ $/z = x+iy/$

$= \frac{e^{+y+i(\frac{\pi}{2}-x)} + e^{-y-i(\frac{\pi}{2}-x)}}{2} = \ldots = \sin z$ ▷

6) $\operatorname{ch}(z_1+z_2) = \operatorname{ch} z_1 \operatorname{ch} z_2 + \operatorname{sh} z_1 \operatorname{sh} z_2$

◁ $\operatorname{ch} z_1 \operatorname{ch} z_2 + \operatorname{sh} z_1 \operatorname{sh} z_2 = \frac{1}{4}\left[(e^{z_1}+e^{-z_1})(e^{z_2}+e^{-z_2}) + \right.$

$\left. + (e^{z_1}-e^{-z_1})(e^{z_2}-e^{-z_2})\right] = \ldots = \operatorname{ch}(z_1+z_2)$ ▷

N 1.65 (B) $\cos(z+w) = \cos z \quad \forall z \Rightarrow w = 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$

◁ $\cancel{\frac{e^{i(z+w)} + e^{-i(z+w)}}{2} = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}}$

$\cancel{\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} \cdot e^{iw}}$

$\frac{e^{i(z+w)} + e^{-i(z+w)}}{2} = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$

$e^{iz}\cdot e^{iw} + e^{-iz}\cdot e^{iw} = e^{iz} + e^{-iz}$

$e^{iz}(e^{iw}-1) + e^{-iz}(e^{iw}-1) = 0$

$(e^{iw}-1)(e^{iz}+e^{-iz}) = 0$

$(e^{iw}-1)\cdot\cos z = 0$

$\Rightarrow e^{iw} = 1 \quad \Rightarrow w = 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$

▷

№ 1.67 (В) 1) Виразити через тригонометр. та гіперб. ф-ції дійсного аргументу $\operatorname{Re} w$ та $\operatorname{Im} w$

$w = \sin z$

$z = x + iy$

Розв'язок. $w = \sin z = \dfrac{e^{ix-y} - e^{-ix+y}}{2i} =$

$= \dfrac{e^{-y}(\cos x + i\sin x) - e^{y}(\cos x - i\sin x)}{2i} \Rightarrow$

$\operatorname{Re} w = \dfrac{e^{-y}\sin x + e^{y}\sin x}{2} = \dfrac{\sin x}{2}(e^{-y} + e^{y}) = \sin x \operatorname{ch} y$

$\operatorname{Im} w = \cos x \cdot \dfrac{e^{-y} - e^{y}}{2i} = \cos x \cdot \operatorname{sh} y.$

2), 3), 4), 5), 6) — аналогічно.

№ 1.70 (В) 1) Знайти всі значення z, для яких $|\operatorname{tg} z| = 1$

Розв'язок. Згідно задачі 1.67 3)

$\operatorname{tg} z = \dfrac{\sin 2x}{\cos 2x + \operatorname{ch} 2y} + i\dfrac{\operatorname{sh} 2y}{\cos 2x + \operatorname{ch} 2y}$

$|\operatorname{tg} z| = \dfrac{\sqrt{\sin^2 2x + \operatorname{sh}^2 2y}}{\cos 2x + \operatorname{ch} 2y} = 1$

$\sin^2 2x + \operatorname{sh}^2 2y = \cos^2 2x + \operatorname{ch}^2 2y + 2\cos 2x \operatorname{ch} 2y$

$\cos 4x + 2\cos 2x \operatorname{ch} 2y + 1 = 0$

$2\cos 2x\,(\underbrace{\cos 2x + \operatorname{ch} 2y}_{\neq 0}) = 0$ (знаменник в виразі $\operatorname{tg} z$)

$\Rightarrow \cos 2x = 0 \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi k}{2},\ k \in \mathbb{Z}$

2) — аналогічно.

№ 1.73 (В) Початкове значення $\operatorname{Im} f(z) = 0$ при $z = 2$. Точка z робить повне обертання навколо 0 проти годин. стрілки. Вказати $\operatorname{Im} f(z)$ після обертання в т. $z=2$, якщо 1) $f(z) = 2 \operatorname{Ln} z$.

Розв'язок. $z = 2 = 2(\cos 0 + i \sin 0)$.

$f(z) = 2 \operatorname{Ln} z = 2(\ln 2 + 2\pi i k) \Rightarrow \operatorname{Im} f(z) = 4\pi i k$, $k \in \mathbb{Z}$

Нехай z' – значення z після обертання =

$z' = 2 = 2(\cos 2\pi + i \sin 2\pi)$

$f(z') = 2 \operatorname{Ln} z' = 2(\ln 2 + 2\pi i + 2\pi i k)$, $k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow \operatorname{Im} f(z') = 4\pi + 4\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$

$[\operatorname{Im} f(z)]_\gamma = 4\pi$ (приріст при обході 0 проти годин. стрілки по контуру γ (коло радіуса 2))

2) $f(z) = \operatorname{Ln} \frac{1}{z}$

$f(2) = \operatorname{Ln} \frac{1}{2(\cos 0 + i \sin 0)} = \operatorname{Ln} \frac{1}{2}(\cos 0 + i \sin 0) =$

$= \ln 2 + 2\pi i k$, $k \in \mathbb{Z}$

$f(z') = \operatorname{Ln} \frac{1}{2(\cos 2\pi + i \sin 2\pi)} = \operatorname{Ln} \frac{1}{2}(\cos(-2\pi) + i \sin(-2\pi))$

$= \ln 2 - 2\pi i + 2\pi i k \Rightarrow$

$\operatorname{Im} f(z') = -2\pi + 2\pi i k$

$\Rightarrow [\operatorname{Im} f(z)]_\gamma = -2\pi$.

3) $f(z) = \operatorname{Ln} z - \operatorname{Ln}(z+1)$

$[\operatorname{Im} f(z)]_\gamma = 0$ аналог.

4) $f(z) = \operatorname{Ln} z + \operatorname{Ln}(z+1)$

$[\operatorname{Im} f(z)]_\gamma = 4\pi$ аналог.

N 1.74 (В) 7) Знайти всі значення

$$(3-4i)^{1+i}$$

Розв'язок. $(3-4i)^{1+i} = \Big/\ z_1^{z_2} = e^{z_2 \cdot \operatorname{Ln} z_1} \Big/ =$

$= e^{(1+i)\operatorname{Ln}(3-4i)} = e^{(1+i)(\ln 5 - i\,\operatorname{arctg}4/3 + 2\pi i k)} =$

$= e^{\ln 5 + \operatorname{arctg}4/3 - 2\pi k + i(\ln 5 - \operatorname{arctg}4/3 + 2\pi k)} =$

$= e^{\ln 5 + \operatorname{arctg}4/3 - 2\pi k} \cdot \left(\cos(\ln 5 - \operatorname{arctg}\tfrac{4}{3}) + i \sin(\ln 5 - \operatorname{arctg}\tfrac{4}{3})\right)$

N 1.77 (В) 1) Довести $\operatorname{Arccos} z = -i\operatorname{Ln}(z+\sqrt{z^2-1})$

Доведення. $\operatorname{Arccos} z = w \Leftrightarrow \cos w = z$

$\Leftrightarrow \dfrac{e^{iw}+e^{-iw}}{2} = z \Leftrightarrow e^{2iw} - 2ze^{iw} + 1 = 0$

нехай $e^{iw} = a$, тоді $a^2 - 2za + 1 = 0$

$D = 4z^2 - 4$, $a_{1,2} = \dfrac{2z \pm \sqrt{4z^2-4}}{2} = z \pm \sqrt{z^2-1}$

тоді $e^{iw} = z \pm \sqrt{z^2-1}$

$iw = \operatorname{Ln}(z \pm \sqrt{z^2-1})$, $w = \dfrac{1}{i}\operatorname{Ln}(z \pm \sqrt{z^2-1})$,

$w = -i\operatorname{Ln}(z \pm \sqrt{z^2-1})$.

$z - \sqrt{z^2-1} = \dfrac{(z-\sqrt{z^2-1})\cdot(z+\sqrt{z^2-1})}{z+\sqrt{z^2-1}} = \dfrac{1}{z+\sqrt{z^2-1}} \Rightarrow$

$\operatorname{Ln}(z-\sqrt{z^2-1}) = -\operatorname{Ln}(z+\sqrt{z^2-1})$

Корінь квадр. повертає два значення, які відрізн. тільки аргументом на π, тобто знаком. $\Rightarrow$ "мінус" писати не треба.

Послідовності комплексних чисел

N 2.05 (Є) $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = A \neq \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} \zeta_n = B \neq \infty$

Довести, що 1) $\lim\limits_{n\to\infty}(z_n+\zeta_n) = A+B$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}(z_n\cdot\zeta_n)=A\cdot B$

◁ 1) $\forall\varepsilon>0\ \exists N_1: \forall n>N_1\quad |z_n-A|<\varepsilon/2$

$\forall \varepsilon>0\ \exists N_2:\forall n>N_2\quad |\zeta_n - B|<\varepsilon/2$

$|(z_n+\zeta_n)-(A+B)| \le |z_n-A|+|\zeta_n-B| = \varepsilon$ (*)

Вибираємо $\exists N = \max\{N_1,N_2\}: \forall n>N$ (*) – викон.

2) $|z_n\cdot\zeta_n - A\cdot B| = |(z_n-A)\cdot(\zeta_n-B)+z_n\cdot B+\zeta_n\cdot A - AB|$

$=|(z_n-A)(\zeta_n-B)+A(\zeta_n-B)+B(z_n-A)| \le$

$\le \frac{\varepsilon^2}{4}+|A|\varepsilon+|B|\varepsilon = \varepsilon(\varepsilon/4+|A|+|B|)=M\varepsilon=\varepsilon'$ (**)

Оскільки $A\neq\infty$ та $B\neq\infty$, то M – скінчен.

$\Rightarrow \forall \varepsilon'>0\ \exists N\in\mathbb{N}: \forall n>N$ (**) викон.

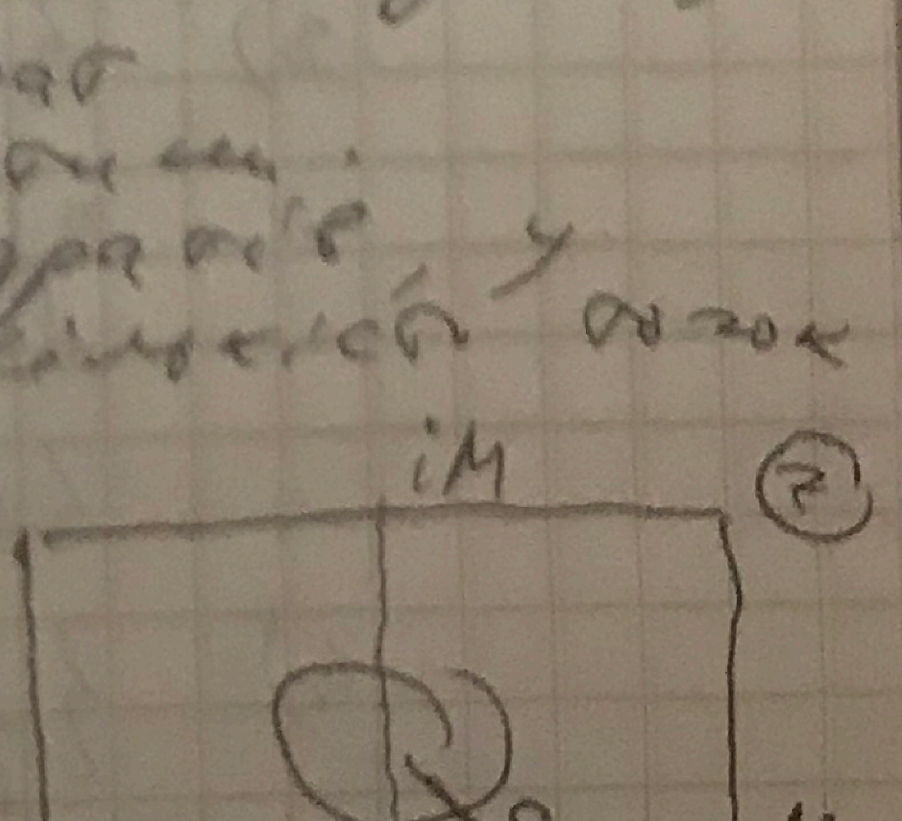
▷

N 2.08 (Є) Довести, що якщо $|z_n|\le M<\infty$ при $n>n_0$, то з послідовності $\{z_n\}$ можна обрати підпослідовність, що зб. до скінченного значення.

◁ $|z_n|\le M$ – замкн. скінч. круг, в який потрапляє нескінч. число точок послідовності $\Rightarrow \exists Q_0=\{(x,y): -M\le x\le M$ та $-M\le y\le M\}$ – квадрат

Розіб'ємо Q_0 на чотири частини. Далі обираємо Q_1 один з квадратів, у який потрапляє нескінч. кількість точок із z_n.

І так далі. Отримаємо послідовність множин $\{Q_n\}$



$Q_0\supset Q_1\supset\ldots\supset Q_n$

Діагональ $Q_n\to 0$ при $n\to\infty$.

$\Rightarrow \bigcap\limits_{n=0}^{\infty} Q_n = z^*$ – одна точка

▷

$\Rightarrow z_{n_k}\to z^*,\ k\to\infty.$

N 2.09 (E) З'ясувати, при яких $a\in\mathbb{C}$ збігаються послідовності

1) $\{a^n\}$; 2) $\{\frac{a^n}{n}\}$; 3) $\{na^n\}$; 4) $\{\frac{a^n}{1+a^n}\}$

Розв'язок. $\forall \varepsilon>0\ \exists N(\varepsilon)\in\mathbb{N}: \forall n>n_0\ |a^n-A|<\varepsilon$

а) $|a|<1 \Rightarrow |a|^n\to 0,\ n\to\infty \Rightarrow a^n\to 0,\ n\to\infty$

б) $|a|>1 \Rightarrow |a|^n\to\infty,\ n\to\infty \Rightarrow a^n\to\infty,\ n\to\infty$

в) $|a|=1 \Rightarrow a^n = |a=\cos\varphi+i\sin\varphi| = \cos n\varphi + i\sin n\varphi$

Від супрот. Припуст., що $a^n\to z_0=\alpha+i\beta$,

$\cos n\varphi\to\alpha \Rightarrow \overset{\cos 2n\varphi}{2\cos^2 n\varphi-1}\to 2\alpha^2-1=\alpha$

$\Rightarrow \alpha=1;\ -1/2.$

$\cos 3n\varphi = 4\cos^3 n\varphi - 3\cos n\varphi \Rightarrow \alpha=4\alpha^3-3\alpha$

$\alpha=1$ — підходить, ~~$a^n=1\to 1,\ n\to\infty$~~ | $\alpha=-1/2$ і $-1/2\neq -4/8+3/2$ — не підходить

$\sin n\varphi\to\sqrt{1-1^2}=0$

$\Rightarrow a=1$ $\quad a^n\equiv 1\to 1,\ n\to\infty$

Відповідь $\{a^n\}$ — зб. при $|a|\leq 1$ та $a=1$

2) $\{\frac{a^n}{n}\}$

а) $|a|<1$ — зб. $\to 0$

б) $|a|=1$ — зб. $\to 0$

в) $|a|>1$ нех. $|a|=1+B,\ B>0$

$$\left|\frac{a^n}{n}\right| = \frac{|a|^n}{n} = \frac{(1+B)^n}{n} = \frac{1+nB+\frac{n(n-1)}{2}B^2+\ldots}{n} >$$

$$> \frac{n-1}{2}B^2\to\infty$$

Відповідь: зб. при всіх a

3) $\{na^n\}$

а) $|a|\geq 1 \Rightarrow n|a|^n\to\infty$

б) $|a|<1 \Rightarrow a=\frac{1}{b} \Rightarrow |b|>1$

$\{na^n\}=\{\frac{n}{b^n}\}=\{(\frac{b^n}{n})^{-1}\}\xrightarrow[n\to\infty]{(2)\ в)} 0,$

4) $\{\frac{a^n}{1+a^n}\}=\{z_n\}$

а) $|a|>1 \Rightarrow \frac{1}{1/a^n+1}\to 1,\ n\to\infty$

б) $|a|<1 \Rightarrow z_n\to 0,\ n\to\infty$

в) $|a|=1 \Rightarrow z_n=1-\frac{1}{a^n+1}\to\frac{1}{2}$, якщо $a=1$ (1) в)

інакше розб.

№ 2.14 (Є) Довести збіжність послідовності

$$\left\{ \frac{1}{n+1} \left(n+1 + nz + (n-1)z^2 + \ldots + z^n \right) \right\} \quad (|z| \le 1,\ z \ne 1)$$

$\triangleleft$ $z_n = \frac{1}{n+1}\left(n+1+nz+(n-1)z^2+\ldots+z^n\right) \frac{(1-z)}{1-z} =$

$= \frac{n+1-z-z^2-\ldots-z^n-z^{n+1}}{(n+1)(1-z)} = \frac{n+1-z\cdot\frac{1-z^{n+1}}{1-z}}{(n+1)(1-z)} =$

$= \frac{1}{1-z} - \underbrace{\frac{z(1-z^{n+1})}{(n+1)(1-z)^2}}_{\to 0,\ n\to\infty} \to \frac{1}{1-z}$ $\triangleright$

№ 1.105 (В) Знайти граничні точки множини

2) $E = \left\{ \frac{1}{m} + \frac{i}{n};\ m \text{ та } n \text{ — цілі} \right\}$

0 — гран. точка (при m та $n \to \infty$ $\frac{1}{m} + \frac{i}{n} \to 0$)

Нех. m — фікс, $n \to \infty \Rightarrow \frac{1}{m} + \frac{i}{n} \to \frac{1}{m}$.

Нех. n — фікс., $m \to \infty \Rightarrow \frac{1}{m} + \frac{i}{n} \to \frac{i}{n}$

3) $E = \left\{ \frac{p}{m} + i\frac{q}{n} \mid p, q \in \mathbb{Z},\ m, n \in \mathbb{N} \right\}$

$\overline{E} = \overline{\mathbb{C}}$

Д/З Євграфов: № 2.07, 2.10, 2.14

Волковиський: № 1.107, № 1.108,

№ 110–113, ~~№126, №127, №128~~