1.43 Є   **Домашнє завдання**   **Заняття 4**

При яких значеннях параметру a кола на $\mathbb{C}$ відповідають великим колам на сфері Рімана?

$a \in \mathbb{R}$ 2) $|z + \frac{a}{2}| = a$,   3) $|z - i| = a$;   4) $|z - 2ai| = a$

Розв'язок. 2) $(x + \frac{a}{2})^2 + y^2 = a^2$

$$x^2 + y^2 + ax = \frac{3a^2}{4}$$

$$\frac{\xi^2 + \eta^2}{(1-\zeta)^2} + \frac{a\xi}{1-\zeta} = \frac{3a^2}{4}$$

/Рівн. сфери Рімана: $\xi^2 + \eta^2 = (1-\zeta)\zeta$ / $\Rightarrow$

$$\frac{\zeta}{1-\zeta} + \frac{a\xi}{1-\zeta} = \frac{3a^2}{4}$$

$\zeta + a\xi = \frac{3a^2}{4}(1-\zeta)$ — рівн. площини

Підст. точку $(\xi, \eta, \zeta) = (0, 0, 1/2)$

$$1/2 + a \cdot 0 = \frac{3a^2}{4}(1 - 1/2) \Rightarrow \frac{3a^2}{4} = 1 \Rightarrow a = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

3) $|z - i| = a \Rightarrow x^2 + (y-1)^2 = a^2$

$$x^2 + y^2 - 2y = a^2 - 1$$

Аналогічно $\Rightarrow a = \sqrt{2}$.

4) $|z - 2ai| = a \Rightarrow x^2 + (y - 2a)^2 = a^2$

$\Rightarrow 1/2 + \frac{3}{2}a^2 = 0 \Rightarrow a^2 = -1/3$ — немає розв'язків.

1.24 Є Довести, що при будь-якому $k > 0$, $k \neq 1$ рівняння $\left|\frac{z - z_1}{z - z_2}\right| = k$ є рівнянням кола, а також знайти центр та R.

Доведення. Нех. $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$

тоді $(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = k^2((x - x_2)^2 + (y - y_2)^2)$

$$(1-k^2)x^2 - 2x(x_1 - k^2x_2) + x_1^2 - k^2x_2^2 +$$
$$+ (1-k^2)y^2 - 2y(y_1 - k^2y_2) + y_1^2 - k^2y_2^2 = 0$$

$$\left(\sqrt{1-k^2}\,x - \frac{x_1 - k^2x_2}{\sqrt{1-k^2}}\right)^2 + \left(\sqrt{1-k^2}\,y - \frac{y_1 - k^2y_2}{\sqrt{1-k^2}}\right)^2$$
$$= \frac{(x_1 - k^2x_2)^2}{1-k^2} + \frac{(y_1 - k^2y_2)^2}{1-k^2} - x_1^2 + k^2x_2^2 - y_1^2 + k^2y_2^2$$

Центр: $\left(\frac{x_1 - k^2x_2}{1-k^2}, \frac{y_1 - k^2y_2}{1-k^2}\right)$.

Радіус: $R^2 = \frac{|z_1|^2 + k^4|z_2|^2}{1-k^2} - |z_1|^2 + k^2|z_2|^2 - \frac{2k^2}{1-k^2}(x_1x_2 + y_1y_2$

$$= \cancel{(1-k^2)|z_1|}^2 \quad \frac{k^2(|z_1|^2+|z_2|^2) - 2k^2(x_1x_2+y_1y_2)}{1-k^2}$$

$$= \frac{k^2}{1-k^2}\left((x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2\right) = \frac{k^2}{1-k^2}|z_1-z_2|^2$$

тоді радіус $R = \frac{k}{\sqrt{1-k^2}}|z_1-z_2|$.

1.25 Є 1) Знайти всі розвʼязки системи

$$\begin{cases} \left|\frac{z-12}{z-8i}\right| = \frac{5}{3} \\ \left|\frac{z-4}{z-8}\right| = 1 \end{cases}$$

Відповідь: $6+8i$, $6+17i$

1.45 Є Дати геометричний опис множини точок на $\mathbb{C}$.

1) $k(z,0) < R$, $0<R<1$

тут $k(z_1,z_2) = \frac{|z_1-z_2|}{\sqrt{1+|z_1|^2}\cdot\sqrt{1+|z_2|^2}}$ $(z_1\neq\infty,\ z_2\neq\infty)$

– відстань між точками $M(z_1)$ та $M(z_2)$

$$k(z,0) = \frac{|z|}{\sqrt{1+|z|^2}} < R$$

$$\frac{|z|}{\sqrt{1+|z|^2}} < R \Rightarrow |z|^2 < (1+|z|^2)R^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1-R^2)|z|^2 < R^2 \Rightarrow |z| < \frac{R}{\sqrt{1-R^2}}$$

– круг радіуса $\frac{R}{\sqrt{1-R^2}}$

2) $k(z,\infty) < R$, $0<R<1$

$$k(z,\infty) = \frac{1}{\sqrt{1+|z|^2}} < R \Rightarrow$$

$$|z| > \frac{\sqrt{1-R^2}}{R}.$$

1.8.2. Властивість збереження кутів

Кутом між кривими γ_1 та γ_2 у площині будемо вважати кут, який утворюють дотичні до цих кривих у точці їх перетину. Аналогічно визначимо кут між кривими на сфері Рімана (рис. 1.25).

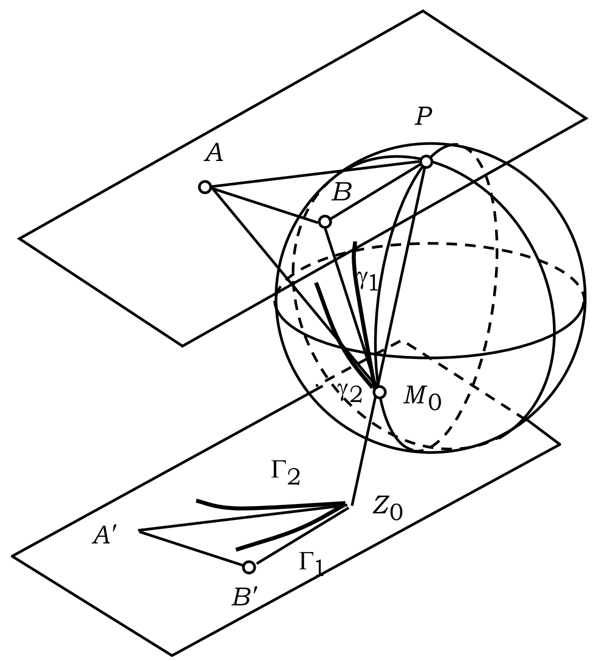

Рис. 1.25

Теорема. При стереографічній проекції кути між кривими на сфері дорівнюють відповідним кутам між їх образами на площині.

$\triangleleft$ Нехай $M_0(\xi_0,\eta_0,\varsigma_0)$ – довільна, відмінна від полюса P точка на сфері, а γ_1 та γ_2 – неперервні криві на сфері, які проходять через точку M_0 і мають у ній дотичні. Нехай кут, утворений дотичними, дорівнює α. Оскільки γ_1 та γ_2 – криві з дотичними, то це означає, що вони можуть бути задані параметрично за допомогою функцій $\xi_k=\varphi_k(t)$, $\eta_k=\phi_k(t)$, $\varsigma_k=\chi_k(t)$ $(k=1,2)$, які задовольняють рівняння сфери $\left(\varphi_k(t)\right)^2+\left(\phi_k(t)\right)^2+\left(\chi_k(t)\right)^2=1$, диференційовані в точці $t=t_0$, а також $\left(\varphi_k'(t)\right)^2+\left(\phi_k'(t)\right)^2+\left(\chi_k'(t)\right)^2\neq 0$.

Скористаємося стереографічним відображенням. Позначимо через $Z_0(x_0, y_0, 0)$ точку площини, яка є образом точки M_0 на сфері, а через Γ_1 та Γ_2 – образи кривих γ_1 та γ_2. Тоді координати кривих Γ_1 і Γ_2 можна задати рівняннями

$$x_k = \frac{\xi_k}{1-\varsigma_k} = \frac{\varphi_k(t)}{1-\chi_k(t)},\ y_k = \frac{\eta_k}{1-\varsigma_k} = \frac{\phi_k(t)}{1-\chi_k(t)},\ k = 1,2\,.$$

Оскільки $M_0 \neq P$, то $1-\chi(t_0) \neq 0$, отже, можна зробити висновок, що криві з дотичними γ_1 та γ_2 при стереографічному відображенні переходять у криві з дотичними Γ_1 та Γ_2, а числа $x_k'(t_0)$ та $y_k'(t_0)$, які характеризують напрямки дотичних до Γ_1 та Γ_2 у точці Z_0, визначаються за формулами

$$x_k'(t_0) = \frac{\xi_k'(t_0)(1-\varsigma_k(t_0)) + \varsigma_k'(t_0)\xi_k(t_0)}{\left(1-\varsigma_k(t_0)\right)^2},$$

$$y_k'(t_0) = \frac{\eta_k'(t_0)(1-\varsigma_k(t_0)) + \varsigma_k'(t_0)\eta_k(t_0)}{\left(1-\varsigma_k(t_0)\right)^2}.$$

Позначимо через β кут між дотичними до Γ_1 та Γ_2 у точці Z_0. Покажемо, що він дорівнює α. Для цього продовжимо дотичні до сферичних кривих до перетину їх з дотичною площиною до сфери в точці P (див. рис. 1.25). Розглянемо трикутники ΔAPB та ΔAMB. Оскільки AB – спільна сторона обох трикутників, $AP = AM$ та $BP = BM$ як дотичні до кола, що виходять з однієї точки, то трикутники ΔAPB та ΔAMB рівні між собою. Отже, $\angle APB = \angle AMD = \alpha$. Разом з тим, дотичні до проекцій кривих паралельні прямим AP та BP, оскільки ці дотичні є прямими, утвореними перетином площин PAM і PBM із площиною проекцій. Отже, кут між ними дорівнює $\angle APB = \alpha$, тобто $\beta = \alpha$ ▷

Таким чином, стереографічна проекція є неперервним взаємно однозначним відображенням комплексної площини на сферу Рімана. При цьому відображенні кола на площині відображаються в кола на сфері й навпаки, а кути між довільними кривими, які мають дотичні, та їх образами зберігаються.

Відкриту площину $\mathbb{C}$ можна ототожнити з поверхнею сфери Рімана S без полюса, тобто $S\setminus\{P\}$, а розширену комплексну площину $\overline{\mathbb{C}}$ – з усією сферою Рімана S.

Елементарні трансцедентні функції

№1.58 (В) Використовуючи означення e^z довести, що

1) $e^{z_1}\cdot e^{z_2}=e^{z_1+z_2}$; 2) $e^{z+2\pi i}=e^z$;

3) якщо $e^{z+w}=e^z$ $\forall z$, то $w=2\pi k i$, $k\in\mathbb{Z}$

Доведення. Озн. $\exp(z)=/z=x+iy/=e^x(\cos y+i\sin y)$.

1) $z_1=x_1+iy_1$, $z_2=x_2+iy_2$

$e^{z_1}\cdot e^{z_2}=e^{x_1}(\cos y_1+i\sin y_1)\cdot e^{x_2}(\cos y_2+i\sin y_2)=$

$=e^{x_1+x_2}((\cos y_1\cdot\cos y_2-\sin y_1\sin y_2)+i(\cos y_1\sin y_2+$

$+\sin y_1\cos y_2))=e^{x_1+x_2}(\cos(y_1+y_2)+i\sin(y_1+y_2))=$

$=e^{z_1+z_2}$, оскільки $z_1+z_2=x_1+x_2+i(y_1+y_2)$.

2) $e^{z+2\pi i}=e^z\cdot e^{2\pi i}=e^z(\cos 2\pi+i\sin 2\pi)=e^z\cdot$

$\cdot(1+i\cdot 0)=e^z$.

3) $e^w=1\Rightarrow e^w=\cos 2\pi k+i\sin 2\pi k\Rightarrow$

$e^{\mathrm{Re}\,w}\cdot(\cos \mathrm{Im}\,w+i\sin \mathrm{Im}\,w)=\cos 2\pi k+i\sin 2\pi k$

$\Rightarrow$ ~~$|w|=1$, $\mathrm{Arg}\,w=2\pi k$~~ З означення e^z

$\Rightarrow \mathrm{Re}\,w=0$, $\mathrm{Im}\,w=2\pi k\Rightarrow w=2\pi k i$.

№1.61 (В) Знайти модулі та головні значення аргументів комплексних чисел

2) e^{2-3i}, 4) e^{-3-4i} 7) $e^{i\alpha}-e^{i\beta}$ $(0\le\beta<\alpha<2\pi)$

Розв'язок. 2) $z_1=e^{2-3i}=e^2(\cos(-3)+i\sin(-3))$

$\Rightarrow |z_1|=e^2$, $\arg z_1=-3$.

4) $z_2=e^{-3}\cdot(\cos(-4)+i\sin(-4))$

$\Rightarrow |z_2|=e^{-3}$, $\arg z_2=-4+2\pi$ $(-\pi<\arg z\le\pi)$

7) $z_3 = e^{i\alpha} - e^{i\beta} =$ $\boxed{0 \le \beta < \alpha \le 2\pi}$

$$= e^{i\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}\left(e^{i\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)} - e^{-i\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}\right) =$$

$$= \Big/ \text{Озн. } \cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} \Big/ =$$

$$= e^{i\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)} \sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \cdot 2i = 2e^{i\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\pi}{2}\right)} \sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right).$$

$$\Rightarrow |z_3| = \left|2\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\right| = 2\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right).$$

$$\arg z_3 = \begin{cases} \frac{\alpha+\beta+\pi}{2}, & \alpha+\beta \le \pi \\ \frac{\alpha+\beta+\pi}{2} - 2\pi, & \alpha+\beta > \pi \end{cases}$$

N 1.62 (В) 1), 2). Знайти суми

$S_1 = 1 + \cos\varphi + \cos 2\varphi + \ldots + \cos n\varphi$

$S_2 = \sin\varphi + \sin 2\varphi + \ldots + \sin n\varphi$

Розвʼязок. $S_1 + iS_2 = 1 + (\cos\varphi + i\sin\varphi) +$

$$+ (\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi) + \ldots + (\cos n\varphi + i\sin n\varphi) =$$

$$= e^0 + e^{i\varphi} + e^{i2\varphi} + \ldots + e^{in\varphi} = \frac{1-e^{i(n+1)\varphi}}{1-e^{i\varphi}} =$$

$$= \frac{1-\cos((n+1)\varphi) - i\sin((n+1)\varphi)}{1-\cos\varphi - i\sin\varphi} =$$

$$= \frac{(1-\cos((n+1)\varphi) - i\sin((n+1)\varphi))(1-\cos\varphi + i\sin\varphi)}{(1-\cos\varphi)^2 + \sin^2\varphi} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_1 = \frac{(1-\cos((n+1)\varphi))(1-\cos\varphi) + \sin((n+1)\varphi)\sin\varphi}{(1-\cos\varphi)^2 + \sin^2\varphi}$$

$$S_2 = \frac{(1-\cos((n+1)\varphi))\sin\varphi - \sin((n+1)\varphi)(1-\cos\varphi)}{(1-\cos\varphi)^2 + \sin^2\varphi}$$

N 1.64 (В) Довести, що

1) $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$; 3) $\sin(z_1+z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2$

4) $\cos(z_1+z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2$

5) $\operatorname{tg} 2z = \frac{2\operatorname{tg} z}{1-\operatorname{tg}^2 z}$

Доведення. 1) $\left(\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\right)^2 + \left(\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}\right)^2 \overset{?}{=} 1$

$(e^{iz}+e^{-iz})^2 - (e^{iz}-e^{-iz})^2 \overset{?}{=} 4$

$2+2=4$ ✓

3) $\dfrac{e^{iz_1}-e^{-iz_1}}{2i}\cdot\dfrac{e^{iz_2}+e^{-iz_2}}{2}+\dfrac{e^{iz_1}+e^{-iz_1}}{2}\cdot\dfrac{e^{iz_2}-e^{-iz_2}}{2i}=$

$=\frac{1}{4i}\left(e^{i(z_1+z_2)}-e^{-i(z_1+z_2)}+e^{i(z_1+z_2)}-e^{-i(z_1+z_2)}\right)=$

$=\dfrac{e^{i(z_1+z_2)}-e^{-i(z_1+z_2)}}{2i}=\sin(z_1+z_2)$.

3) аналог.

4) $\operatorname{tg}2z=\dfrac{\sin 2z}{\cos 2z}=\dfrac{2\sin z\cos z}{\cos^2 z-\sin^2 z}=\dfrac{2\frac{\sin z}{\cos z}}{\frac{\cos^2 z}{\cos^2 z}-\frac{\sin^2 z}{\cos^2 z}}=$

$=\dfrac{2\operatorname{tg}z}{1-\operatorname{tg}^2 z}$.

N 1.66 (В) Довести, що

1) $\sin iz = i\operatorname{sh} z$; 2) $\cos iz=\operatorname{ch} z$.

Доведення. Озн. $\operatorname{sh} z=\dfrac{e^z-e^{-z}}{2}$, $\operatorname{ch} z=\dfrac{e^z+e^{-z}}{2}$

1) $\sin iz=\dfrac{e^{iiz}-e^{-iiz}}{2i}=\dfrac{e^{-z}-e^{z}}{2i}=i\left(\dfrac{e^z-e^{-z}}{2}\right)=$

$=i\operatorname{sh} z$

2) $\cos iz=\dfrac{e^{iiz}+e^{-iiz}}{2}=\dfrac{e^{-z}+e^{z}}{2}=\operatorname{ch} z$.

N 1.68 (В) Знайти $\operatorname{Re} z$ та $\operatorname{Im} z$, якщо

1) $z=\cos(2+i)$.

Розв'язок. Озн. або 1.64

$z=\cos 2\cos i-\sin 2\cdot\sin i=/1.66/=$

$=\cos 2\cdot\operatorname{ch}1-\sin 2\cdot i\cdot\operatorname{sh}1 \Rightarrow$

$\operatorname{Re} z=\cos 2\cdot\operatorname{ch}1$, $\operatorname{Im} z=-\sin 2\cdot\operatorname{sh}1$

N 1.71 (В) Обчислити 2) $\operatorname{Ln} i$, $\ln i$

4) $\operatorname{Ln}(2-3i)$, $\operatorname{Ln}(-2+3i)$.

Розв'язок. Озн. $\operatorname{Ln} z=\left/\begin{matrix} r=|z|,\\ \varphi=\arg z\end{matrix}\right/=\ln r+i\varphi+2\pi i k$, $k\in\mathbb{Z}$

$\ln z=\ln r+i\varphi$ – головне значення величини $\operatorname{Ln} z$.

$\operatorname{Ln} i=i\frac{\pi}{2}+2\pi i k$, $\ln i=i\frac{\pi}{2}$

$\operatorname{Ln}(2-3i)=\frac{1}{2}\ln 13+i\left(-\operatorname{arctg}\frac{3}{2}+2\pi k\right)$

$\operatorname{Ln}(-2+3i)=\frac{1}{2}\ln 13+i\left(\pi-\operatorname{arctg}\frac{3}{2}+2\pi k\right)$, $k\in\mathbb{Z}$

Д/З

Волковиський

№1.62 3),4);

№1.64 2),6);

№1.65;

№1.67 1),2),3);

№1.70;

№1.73;

№1.74 7);

№1.77 1),2),3).