Заняття 3. Стереографічна проекція.

Розбір Д/З

1.14 (Є) Записати за доп. нерівностей такі множини комплексної площини:

1) Півплощина, розташована праворуч від уявної осі

2) Перший квадрант

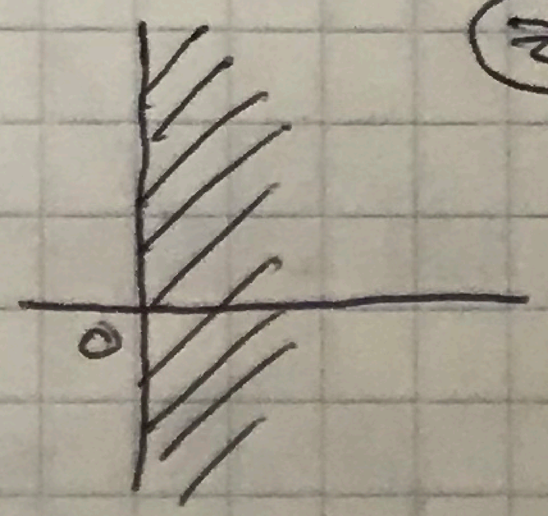
3) Півплощина, що розташована вище дійсної осі, та складається з точок, ~~рівновіддалених~~ що розташовані на відстані не менше 2 від дійсної осі

4) Смуга, що складається з точок, розташованих на відстані менше 1 від уявної осі

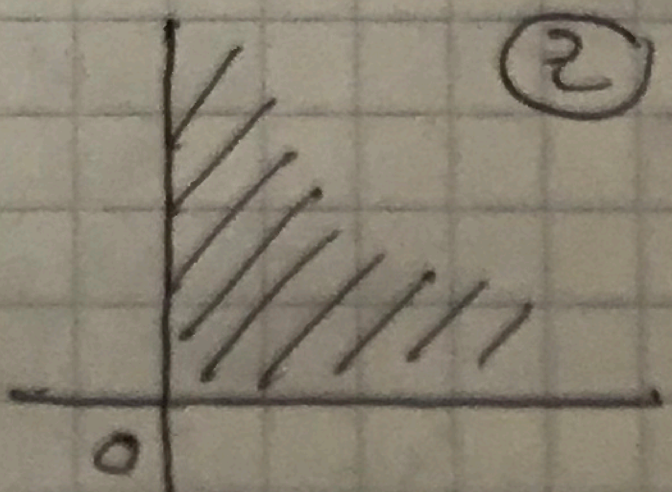
5) Півколо радіуса 1 (без кола) з центром в т. $z=0$, що розташована ~~зл~~ ліворуч від уявної осі

Розв'язок.

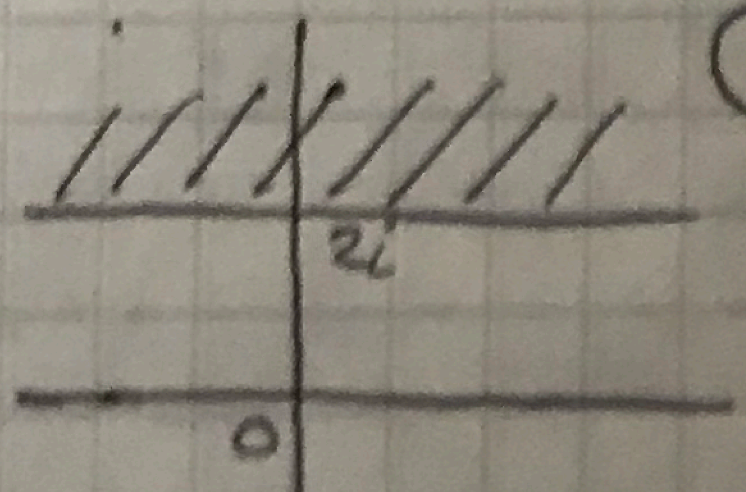
1) $\operatorname{Re} z > 0$



2) $0 < \arg(z) < \frac{\pi}{2}$

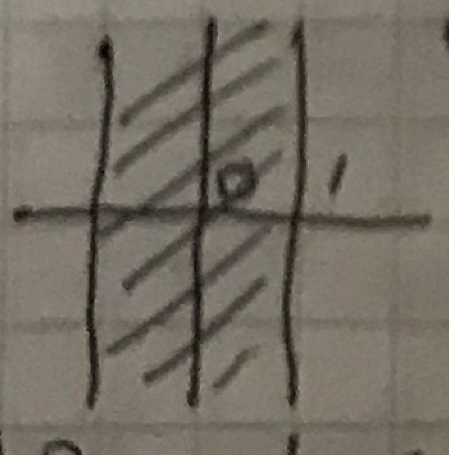


3)



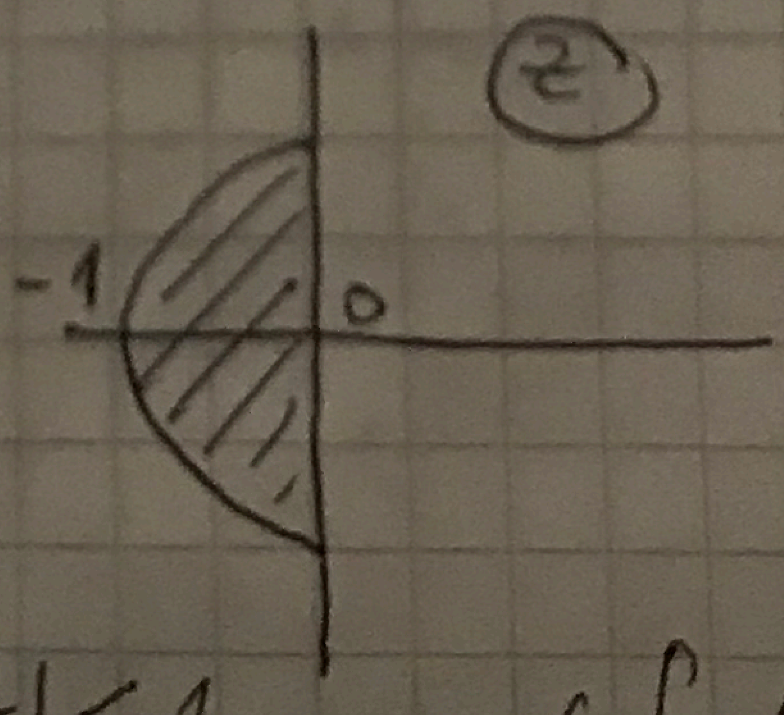
$\operatorname{Im} z \geq 2$

4)



$|\operatorname{Re} z| < 1$

5)



~~5)~~

$\begin{cases} |z| < 1 \\ \operatorname{Re} z < 0 \end{cases}$ або $\begin{cases} |z| < 1 \\ |\pi - \arg(z)| < \frac{\pi}{2} \end{cases}$

N 1.21 (Є) 5) З'ясувати, яка множина точок z комплексної площини задовольняє нерівності:

$$0 < \arg\frac{i-z}{z+i} < \frac{\pi}{2}.$$

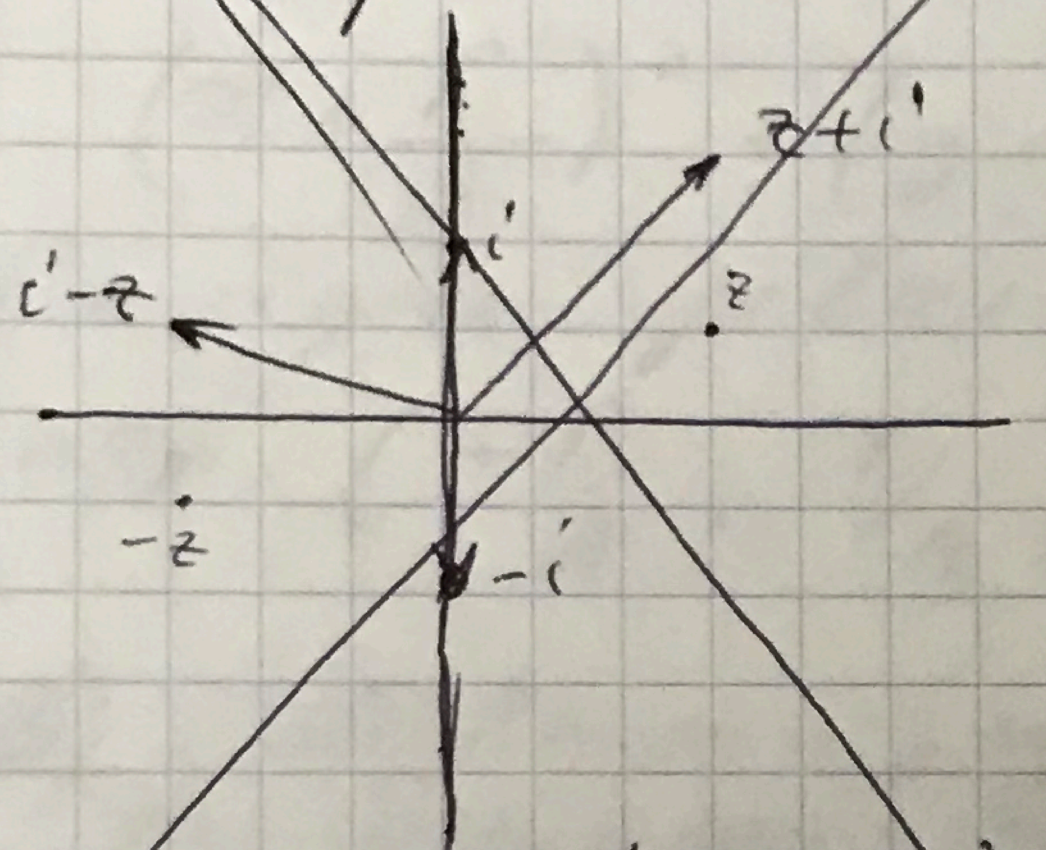
Розв'язок. 1-й спосіб
Межі:

I) $\arg\left(\frac{i-z}{z+i}\right) = 0$

1 спосіб

$Arg(i-z) = Arg(z+i) + \pi n$

Вектори $(i-z)$ та $(z+i)$ – колінеарні



$Arg(z-i) = Arg(z+i) + \pi n$

$\Rightarrow$ ГМТ – уявна вісь

$\arg(i-z) - \arg(z+i) = 0$

$\Rightarrow$ вектори $i-z$ та $z+i$ мають однак. напрямок

$\Rightarrow$ ГМТ – відрізок, що сполучає точки $+i$ та $-i$

(напр. при $z=0$ $\arg(i) - \arg(0+i) = 0$)

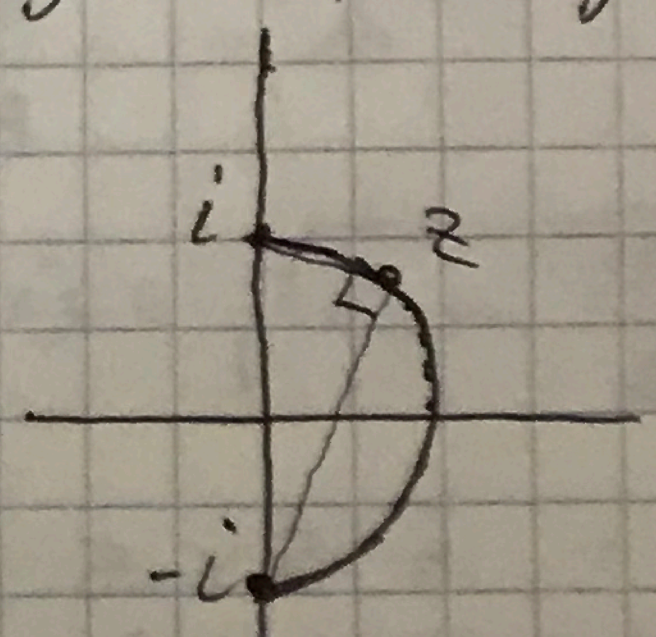
Але поза відрізком $[-i, i]$ вектори $i-z$ та $z+i$ мають протилежний напрямок

II) $\arg\left(\frac{i-z}{z+i}\right) = \frac{\pi}{2}$

$Arg(i-z) - Arg(z+i) = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$

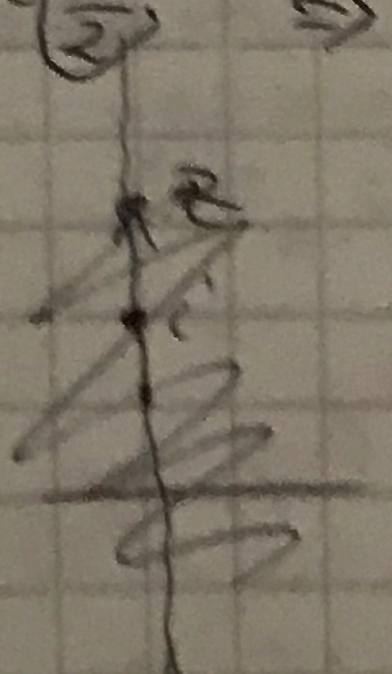
Вектори $(i-z)$ та $(z+i)$ – перпендикулярні

$Arg(z-i) - Arg(z+i) = \frac{\pi}{2} + \pi n$



ГМТ дуга кола з діаметром, що проходить через $\pm i$.

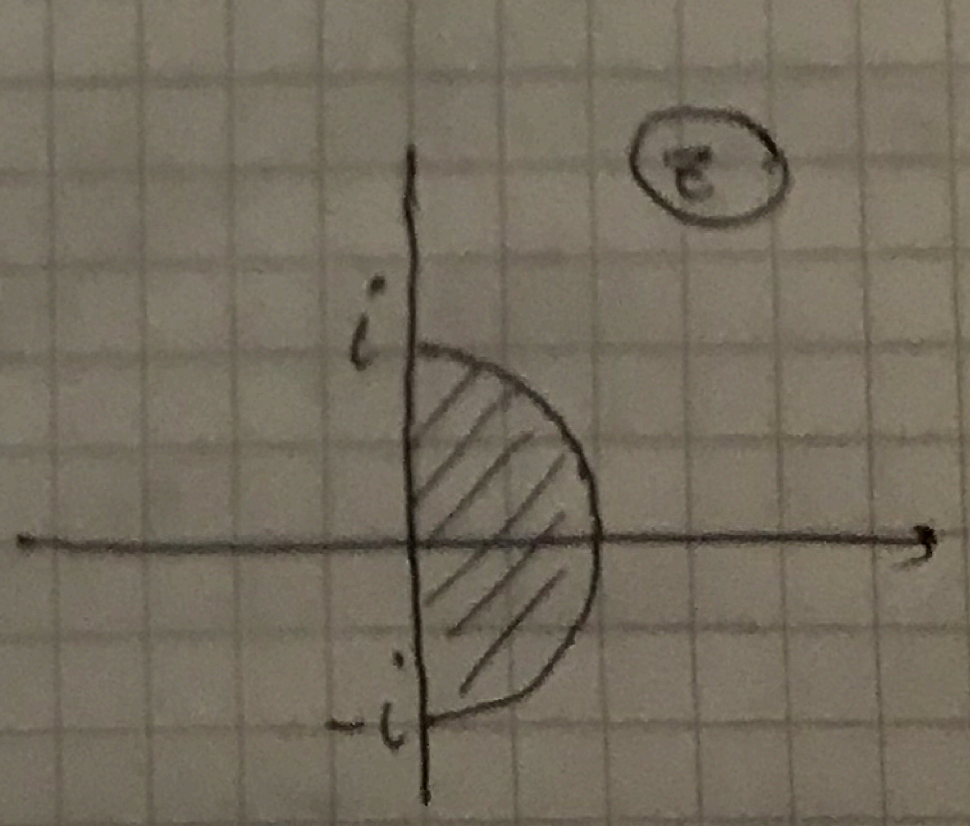
Так як $\arg\left(\frac{i-1}{1+i}\right) = \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ $\Rightarrow$ права руз.



$\Rightarrow$ ГМТ для нерівності

$$0 < \arg\frac{i-z}{z+i} < \frac{\pi}{2}$$

– півколо



2 спосіб (аналітичний):

$$\frac{i-z}{i+z} = |z = x+iy| = \frac{-x+(1-y)i}{x+(1+y)i} = \frac{1-|z|^2}{x^2+(1+y)^2} + \frac{2x}{x^2+(1+y)^2}i$$

З умови $\Rightarrow$ I чверть $\Rightarrow$ $Re\left(\frac{i-z}{z+i}\right) > 0$ та $Im\left(\frac{i+z}{z+i}\right) > 0$

$\Rightarrow$ $|z| < 1$ та $x = Re(z) > 0$.

N1.22 (Є) Нехай A та C – дійсні, B – комплексна константи, нехай $AC < |B|^2$.

Довести, що рівняння
$$A|z|^2 + \bar{B} z + B\bar{z} + C = 0 \quad (A > 0)$$
є рівнянням кола. Також знайти центр цього кола.

Розв'язок Підставивши $z = x+iy$ та $B = p+iq$ та вивід рівн. кола

$$A|z|^2 + \bar{B} z + B\bar{z} + C = A(x^2+y^2) + (xp + ypi - xqi + yq) + (xp - ypi + xqi + yq) + C = A(x^2+y^2) + 2xp + 2yq + C = 0$$

Розділивши на A, знаходимо
$$\left(x + \frac{p}{A}\right)^2 + \left(y + \frac{q}{A}\right)^2 = C - \frac{p^2+q^2}{A} = C - \frac{|B|^2}{A} > 0$$
– валідне рівняння кола.

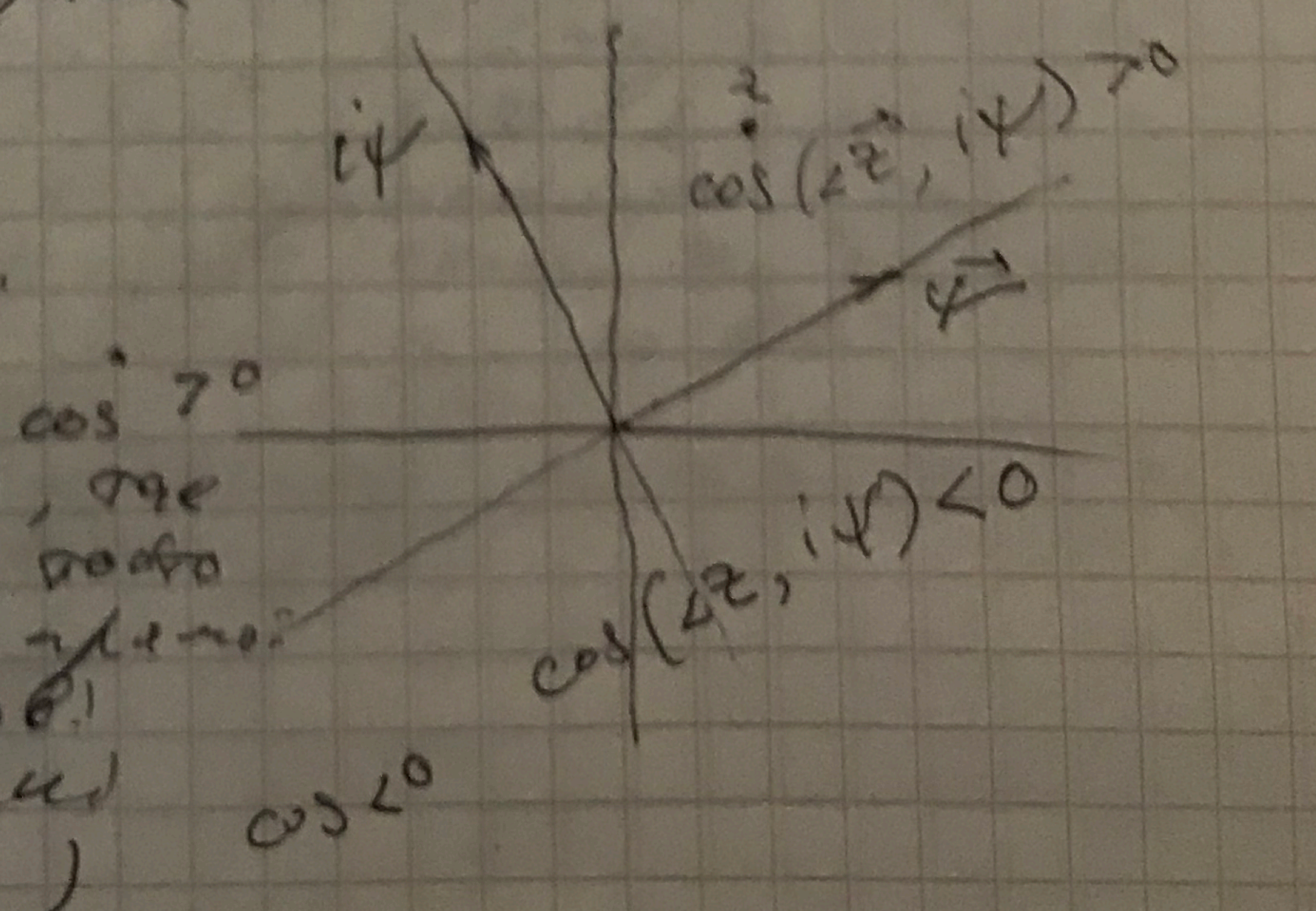
Центр $\left(-\frac{p}{A}, \frac{q}{A}\right)$ і радіус $\sqrt{C - \frac{|B|^2}{A}}$ кола.

N1.21 (В) Довести, що якщо $z_1 + z_2 + \ldots + z_n = 0$, то будь-яка пряма, що проходить через початок координат, розділить точки $z_1, z_2, \ldots, z_n$, якщо тільки ці точки не лежать на одній прямій.

Доведення. На питання "з якого боку від прямої, що проходить через початок координат за напрямком ψ, лежить точка z" відповідає функція $(z, i\psi)$ – скалярний добуток.

Тоді $0 = (0, i\psi) =$
$= (z_1 + \ldots + z_n, i\psi) =$
$= (z_1, i\psi) + \ldots + (z_n, i\psi)$.

Звідси випливає, що або є як додатні, так і від'ємні доданки, тобто є точки по різні боки прямої, або всі доданки нульові (всі точки розташовані на одній прямій).



1.22 (B) Довести, що довільна пряма, що проходить через центр мас системи матеріальних точок $z_1, z_2, \ldots, z_n$ з масами $m_1, m_2, \ldots, m_n$ розділяє ці точки, ~~на~~ якщо тільки ці точки не лежать на одній прямій.

Доведення. Введемо систему координат так, щоб центр мас співпав з початком координат. Тоді задача аналогічна попередньої за виключенням рядків

$$0 = (0, i\psi) = (m_1 z_1 + m_2 z_2 + \ldots + m_n z_n, i\psi) =$$
$$= (m_1 z_1, i\psi) + (m_2 z_2, i\psi) + \ldots + (m_n z_n, i\psi) =$$
$$= m_1(z_1, i\psi) + m_2(z_2, i\psi) + \ldots + m_n(z_n, i\psi).$$

1.24 (B) З'ясувати геометричний зміст співвідношення $|z-2| + |z+2| = 5$

Розв'язок. Еліпс з фокусами -2, 2, $a = 5/2$,

1.25 (B) З'ясувати геометричний зміст співвідношення $|z-2| - |z+2| > 3$

Розв'язок. Внутрішність лівої гілки гіперболи, перша піввісь якої дорівнює $3/2$.

1.28 (B) З'ясувати геометричний зміст співвідношення $0 < \mathrm{Re}(iz) < 1$.

Розв'язок $\mathrm{Re}(iz) = -\mathrm{Im}(z)$, тому це співвідношення задає смугу точок між прямими $y = -1$ & $y = 0$.

1.29 (B) $\alpha < \arg z < \beta$; $\alpha < \arg(z - z_0) < \beta$ $(-\infty < \alpha < \beta \le \infty)$

Розв'язок. Кут між променями, що виходять з $(0,0)$ (або точки z_0), проведеними під кутами α, β до вісі Ox

1.33 (B) З'ясувати геометр. зміст співвідношення $|2z| > |1 + z^2|$

Розв'язок $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$

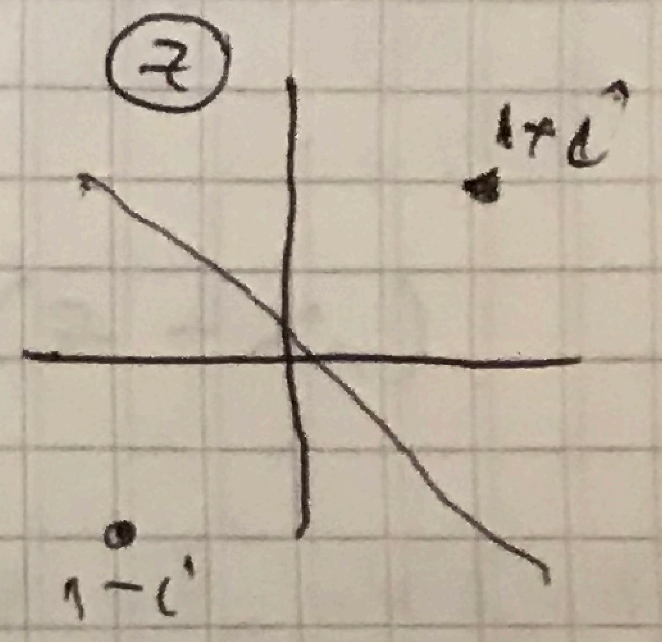
$$|2z| > |1+z^2|$$
$$|2z|^2 > |1+z^2|^2$$
$$(2z)\cdot\overline{2z} > (1+z^2)\,\overline{1+z^2}$$
$$4z\bar{z} > (1+z^2)\cdot(1+\bar{z}^2)$$
$$4z\bar{z} > (z+i)(z-i)\cdot(\bar{z}+i)\cdot(\bar{z}-i)$$
$$4z\bar{z} > (z+i)(\bar{z}-i)\,(z-i)(\bar{z}+i)$$
$$0 > ((z+i)(\bar{z}-i)-2)((z-i)(\bar{z}+i)-2)$$
$$0 > (|z+i|^2 - 2)\,(|z-i|^2 - 2) \Rightarrow \left[\begin{array}{l}|z+i| < \sqrt{2}\\ |z-i| < \sqrt{2}\end{array}\right.$$

Класна робота.

1.25 2) (Є) Знайти всі розв'язки системи

$$\begin{cases} |z^2-2i| = 4 \\ \left|\dfrac{z+1+i}{z-1-i}\right| = 1 \end{cases}$$

Розв'язок. З другого рівняння



$|z+1+i| = |z-1-i| \Rightarrow y=-x$

Підставляємо в перше рівняння ~~перше~~ $\cancel{z} = x+iy$ та знайдену залежність $y=-x$:

$|(x+iy)^2 - 2i| = 4$

$|x^2-y^2+(2xy-2)i| = 4 \Rightarrow 2|x^2+1| = 4 \Rightarrow x=\pm 1.$

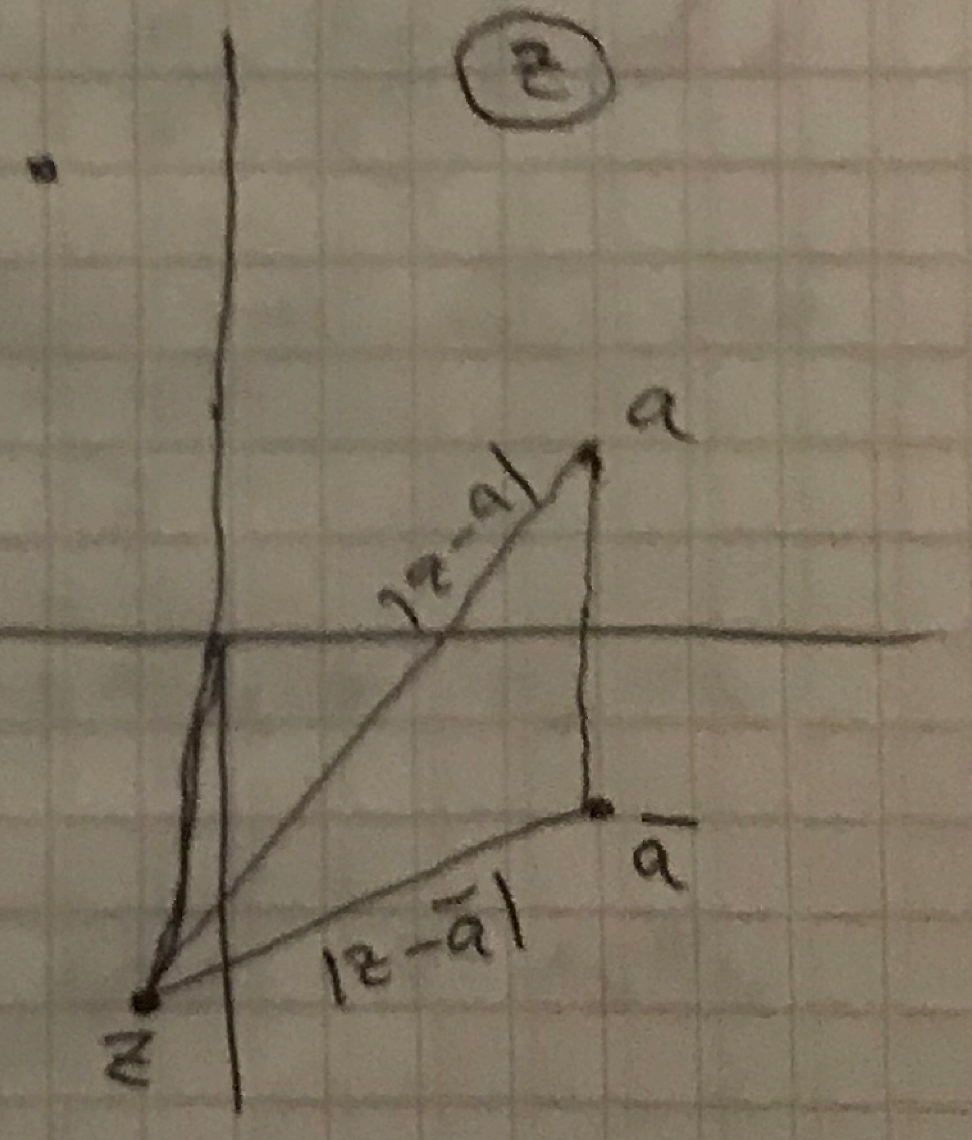
Відповідь: $1-i$ та $-1+i$.

1.27 (Є) Нехай a — довільне комплексне число, $\operatorname{Im} a > 0$. Довести, що величина $\left|\dfrac{z-a}{z-\bar{a}}\right|$ у нижній півплощині більше одиниці, ~~а~~ у верхній півплощині менше одиниці та на дійсній осі $=1$.

Розв'язок. Нехай позначимо $\left|\dfrac{z-a}{z-\bar{a}}\right| = M$

Треба довести, що $M>1$, якщо $\operatorname{Im} z<0$
$M<1$, якщо $\operatorname{Im} z>0$
$M=1$, якщо $\operatorname{Im} z=0$

Доведемо, використовуючи геометричні міркування:



1) $\operatorname{Im} z = 0$ — ~~середина~~ є перпендикуляром до середини відрізку, що сполучає точки a та $\bar{a}$ $\Rightarrow$

Пряма Ox є ~~геометричною~~ множиною точок, рівновіддалених від $\bar{a}$ та a, отже в цьому випадку $|z-a| = |z-\bar{a}| \Rightarrow M=1$

2) $\operatorname{Im} z < 0 \rightarrow$ точки z та $\bar{a}$ розташовані по один бік від осі Ox, але точки ~~z та a~~ z та a — по різні боки від осі Ox

В цьому випадку $|z-\bar{a}| < |z-a| \Rightarrow M>1.$

3) Аналогічно.

1.28 (Є) Нехай $a \in \mathbb{R}$. Довести, що якщо многочлен $P(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n$

має n дійсних нулів, то і многочлен $Q(z) = P(z+ia) + P(z-ia)$ має n дійсних нулів.

При $a=0$ твердження очевидне. Нехай $a \neq 0$

Доведення. Розкладемо $P(z)$ на лінійні множники:

$P(z) = (z - z_1)(z - z_2) \ldots (z - z_n) =$

$= \Big/ \begin{matrix} z_k - \text{дійсні} \\ z_k = x_k + 0 \cdot i \end{matrix} \Big/ = (z - x_1)(z - x_2) \ldots (z - x_n)$.

$Q(z) = (z - x_1 - ia)(z - x_2 - ia) \ldots (z - x_n - ia) +$
$+ (z - x_1 + ia)(z - x_2 + ia) \ldots (z - x_n + ia) =$

$= \Big/ \begin{matrix} \text{Позначимо} \\ a_k = x_k + ia \end{matrix} \Big/ = (z - a_1)(z - a_2) \ldots (z - a_n) +$

$+ (z - \overline{a}_1)(z - \overline{a}_2) \ldots (z - \overline{a}_n) \circleddash$

Винесемо 2-й доданок за дужки: (можемо, бо $a \neq 0$) ~~не зводити, оскільки $a \neq 0$~~

$\circleddash \prod_{k=1}^{n} (z - \overline{a}_k) \left(\prod_{k=1}^{n} \frac{z - a_k}{z - \overline{a}_k} + 1 \right)$. та $a_k, \overline{a}_k$ не є нулями $Q(z)$

~~методом виключення~~ Покажемо, що $Q(z)$ має тільки дійсні розв'язки.

$Q(z)$ — поліном n-го степеня, має всього n нулів.

Нехай $z = x + i \cdot y$, $y \neq 0$, тоді кожен з виразів $\left| \frac{z - a_k}{z - \overline{a}_k} \right|$ або >1 або <1, тобто $\left| \frac{z - a_k}{z - \overline{a}_k} \right| \neq 1$. Тоді $\prod_{k=1}^{n} \left| \frac{z - a_k}{z - \overline{a}_k} \right| \neq 1$

$\Rightarrow \left(\prod_{k=1}^{n} \frac{z - a_k}{z - \overline{a}_k} + 1 \right) \neq 0$. Але ж $\overline{a}_k$ не є ~~розв~~ нулями $Q(z)$ $\Rightarrow$

$z = x + iy$, де $y \neq 0$ не можуть бути ~~розв~~ нулями $Q(z)$.

$\Rightarrow Q(z)$ у залишку має тільки дійсні корені

1.39 Є) Нехай точка $M(z)$ має просторові координати (ξ, η, ζ). Знайти просторові координати точок:
1. $M(-z)$, 2. $M(\bar{z})$, 3. $M\left(\frac{1}{z}\right)$.

Розв'язок. Тут $M(z)$ – стереографічна проекція точки z на сферу Рімана.

$$\xi = \frac{x}{1+|z|^2}, \quad \eta = \frac{y}{1+|z|^2}, \quad \zeta = \frac{|z|^2}{1+|z|^2}$$

$$x = \frac{\xi\zeta}{\xi^2+\eta^2} = \frac{\xi}{1-\zeta}, \quad y = \frac{\eta\zeta}{\xi^2+\eta^2} = \frac{\eta}{1-\zeta}$$

1. Нехай $M(-z) = (\xi_1, \eta_1, \zeta_1)$, $z = x+iy$, $-z = -x-iy$

Тоді $\xi_1 = \frac{-x}{1+|-z|^2} = -\frac{x}{1+|z|^2} = -\xi$

$$\eta_1 = \frac{-y}{1+|-z|^2} = -\frac{y}{1+|z|^2} = -\eta$$

$$\zeta_1 = \frac{|-z|^2}{1+|-z|^2} = \frac{|z|^2}{1+|z|^2} = \zeta$$

Отже, $M(-z) = (-\xi, -\eta, \zeta)$.

2. Нехай $M(\bar{z}) = (\xi_2, \eta_2, \zeta_2)$, $\bar{z} = x - iy$

Тоді $\xi_2 = \frac{x}{1+|\bar{z}|^2} = \frac{x}{1+|z|^2} = \xi$

$$\eta_2 = \frac{-y}{1+|\bar{z}|^2} = -\frac{y}{1+|z|^2} = -\eta$$

$$\zeta_2 = \frac{|\bar{z}|^2}{1+|\bar{z}|^2} = \frac{|z|^2}{1+|z|^2} = \zeta$$

Тобто $M(\bar{z}) = (\xi, -\eta, \zeta)$

3. Нехай $M(1/z) = (\xi_3, \eta_3, \zeta_3)$.

~~Тоді~~ $\cancel{\xi_3 =}$ $\frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{x}{x^2+y^2} - \frac{y}{x^2+y^2} i =$

$= \frac{x}{|z|^2} - i \cdot \frac{y}{|z|^2}$. $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$

Тоді $\xi_3 = \frac{x/|z|^2}{1+1/|z|^2} = \frac{x}{|z|^2+1} = \xi$,

$$\eta_3 = \frac{-y/|z|^2}{1+1/|z|^2} = -\frac{y}{|z|^2+1} = -\eta,$$

$$\zeta_3 = \frac{1/|z|^2}{1+1/|z|^2} = \frac{1}{|z|^2+1} = 1 - \frac{|z|^2}{1+|z|^2} = 1-\zeta$$

Тобто $M(1/z) = (\xi, -\eta, 1-\zeta)$

1.41 Є Довести, що відмінні від точок O, P – полюсів точки $M(z_1)$ та $M(z_2)$ діаметрально протилежні тоді і тільки тоді, якщо
$z_1 \cdot \overline{z_2} = -1$

Доведення. Необх. Нехай $M_1(\xi, \eta, \zeta)$. Тоді діаметрально протилежна точка $M_2(-\xi, -\eta, 1-\zeta)$ (відрізок M_1M_2 проходить через центр сфери $(0, 0, 1/2)$).

$x_1 = \frac{\xi}{1-\zeta}$, $y_1 = \frac{\eta}{1-\zeta}$, $x_2 = \frac{-\xi}{1-(1-\zeta)} = -\frac{\xi}{\zeta}$,
$y_2 = -\frac{\eta}{\zeta}$

$\overline{z_2} = -\frac{\xi}{\zeta} + i\frac{\eta}{\zeta}$.

$$z_1 \cdot \overline{z_2} = \left(\frac{\xi}{1-\zeta} + i\frac{\eta}{1-\zeta}\right)\left(-\frac{\xi}{\zeta} + i\frac{\eta}{\zeta}\right) =$$
$$= -\frac{\xi^2}{(1-\zeta)\zeta} - \frac{\eta^2}{(1-\zeta)\zeta} + i\left(-\frac{\xi\eta}{(1-\zeta)\zeta} + \frac{\xi\eta}{(1-\zeta)\zeta}\right) =$$
$$= -\frac{\xi^2+\eta^2}{(1-\zeta)\zeta} = \Big/ M_1 \in \text{сфері Рімана} \Big/ = -1.$$
$\xi^2 + \eta^2 + (\zeta - 1/2) = 1/4$
$\xi^2 + \eta^2 = (1-\zeta)\zeta$

~~Достатність.~~
Нехай $z_1 \cdot \overline{z_2} = -1$. Тобто $z_1 = -\frac{1}{\overline{z_2}}$.
Або $z_2 = -\frac{1}{\overline{z_1}}$. ~~За попередньою за~~

За попередньою задачею $M(\overline{z_1}) = (\xi, -\eta, \zeta)$,
$M\left(\frac{1}{\overline{z_1}}\right) = (\xi, +\eta, 1-\zeta)$, $M\left(-\frac{1}{\overline{z_1}}\right) = (-\xi, -\eta, 1-\zeta)$

1.43 Є 1) При яких a кола на $\mathbb{C}$ відповідають великим колам на сфері Рімана.

1) $|z-a| = a$ $(a>0)$
Розв'язок. $z = x+iy$, $(x-a)^2 + y^2 = a^2$,
~~$(x-a$~~ $x^2 - 2ax + y^2 = 0$, $x^2+y^2 - 2ax = 0$
$x = \frac{\xi}{1-\zeta}$, $y = \frac{\eta}{1-\zeta}$ (бо (ξ, η, ζ) належить сфері)
$\frac{\xi^2+\eta^2}{1-\zeta} - 2a\frac{\xi}{1-\zeta} = 0 \Rightarrow \frac{\zeta}{1-\zeta} - 2a\frac{\xi}{1-\zeta} = 0$
$\Rightarrow \zeta - 2a\xi = 0$ – рівняння площини, якій належить коло.
Коло має проходити через центр сфери $(0, 0, 1/2)$
$\Rightarrow a = \frac{\zeta}{2\xi} = \frac{1/2}{2 \cdot 0} = \infty$. (узаг. коло $\mathrm{Re}\, z = 0$)

Домашнє завдання:

(Євграфов) № 1.24, №1.25 1), №1.43, 1.45

(Волков.) №55