ТФКЗ Заняття 2.

Розбір ДЗ

№1.5 (Вол) Довести, що для довільної точки z значення кореня $\sqrt{z^2-1}$ лежать на прямій, яка проходить через початок координат і паралельна бісектрисі кута з вершиною у точці z трикутника, вершини якого знаходяться в точках $-1, 1, z$.

◁Нехай z – довільне фіксоване комплексне число, а z_0 та z_1 – значення кореня $\sqrt{z^2-1}$. Позначимо через $\alpha_1 = \arg(z+1)$ і $\alpha_2 = \arg(z-1)$ (рис. 1.13). Тоді $\arg\left(z^2-1\right) = \alpha_1 + \alpha_2$, а отже, $z_k = \sqrt{z^2-1} = \left|z^2-1\right|^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{(\alpha_1+\alpha_2)+2k\pi}{2}}$, $k = 0,1$. Значення кореня $\sqrt{z^2-1}$ мають такі головні значення аргументів: $\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}$ та $\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}+\pi$. Оскільки $\alpha_2 = \alpha_1 + \beta$ (рис. 1.13), то точки z_0 та z_1 мають аргументи $\alpha_1 + \frac{\beta}{2}$ та $\alpha_1 + \frac{\beta}{2} + \pi$. Кут γ нахилу бісектриси до вісі Ox дорівнює $\alpha_1 + \frac{\beta}{2}$. Отже, ці точки лежать на прямій, яка проходить через початок координат і паралельна бісектрисі кута вказаного трикутника з вершиною в точці z ▷

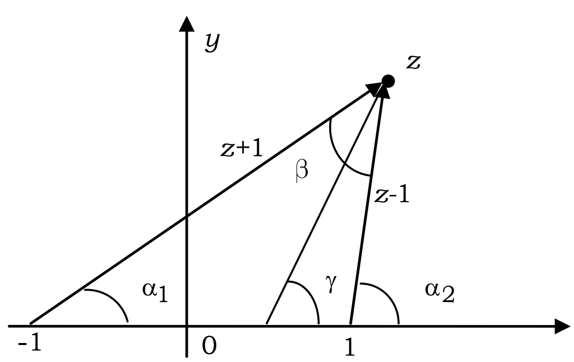


Рис. 1.13

№1.10(Вол) Для доведення рівності достатньо підставити алгебраїчну форму запису комлексних чисел і зробити перетворення.

№1.14(Вол) Довести:

1) Якщо $z_1+z_2+z_3=0$ та $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$, то точки z_1,z_2,z_3 є вершинами правильного трикутника, вписаного в одиничне коло.
2) Якщо $z_1+z_2+z_3+z_4=0$ та $|z_1|=|z_2|=|z_3|=|z_4|$, то точки z_1,z_2,z_3,z_4 є вершинами прямокутника або попарно співпадають.

◄

1) Нехай $z_1+z_2+z_3=0$. Позначимо $q=z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1$. Так як $z_1\overline{z}_1=z_2\overline{z}_2=z_3\overline{z}_3=1$, то $q=z_1z_2z_3(\overline{z}_1+\overline{z}_2+\overline{z}_3)=z_1z_2z_3\overline{(z_1+z_2+z_3)}=0$.

Точки z_1,z_2,z_3 є коренями рівняння

$$(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)=z^3-(z_1+z_2+z_3)z^2+(z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1)z-z_1z_2z_3=$$

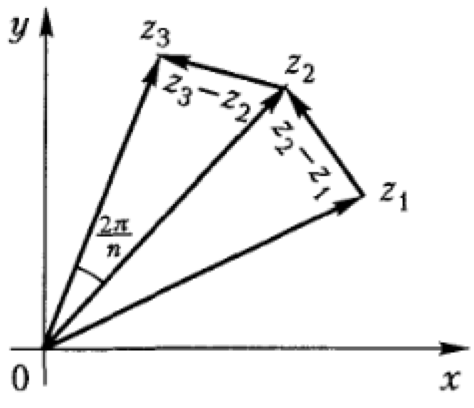
$=z^3-z_1z_2z_3=0$, тому ці розв'язки як корені третього степеня є вершинами правильного трикутника

2) Усі 4 точки належать колу з центром в початку координат, та при цьому $z_1+z_2=-(z_3+z_4)$. Вектори z_1+z_2 та $-(z_3+z_4)$ співпадають за модулем та напрямком лише у випадку, коли $z_3=-z_1,\ z_4=-z_2$ або $z_1=z_2,\ z_3=z_4$. В 1му випадку z_1,z_2,z_3,z_4 - є вершинами прямокутника ►

ТЕМА І. МНОЖИНИ КОМПЛЕКСНИХ ЧИСЕЛ

№ 1.16 (Вол). Точки z_1,z_2 - суміжні вершини правильного n-кутника. Знайти вершину z_3 суміжну із z_2 ($z_3\neq z_1$).

Розв'язок.



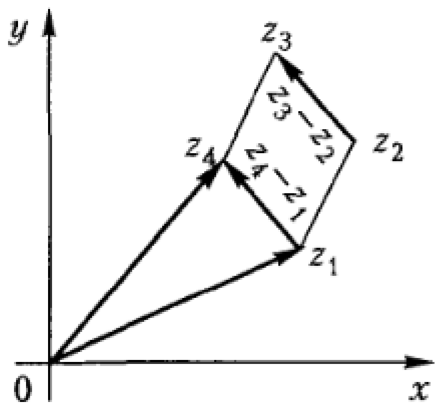
На малюнку видно, що $z_3-z_2=(z_2-z_1)e^{i\frac{2\pi}{n}}$.

Тому $z_3=z_2+(z_2-z_1)e^{i\frac{2\pi}{n}}$. Якщо вершини пронумеровані в протилежному порядку, то

$$z_3=z_2+(z_2-z_1)e^{-i\frac{2\pi}{n}}.$$

№ 1.17 (Вол). Дані три вершини паралелограма z_1, z_2, z_3. Знайти четверту вершину z_4, що протилежна до вершини z_2.

Розв'язок.



Оскільки вектори $z_4 - z_1$ та $z_3 - z_2$ колініарні, та їх модулі рівні, то $z_4 - z_1 = z_3 - z_2$, $z_4 = z_1 + z_3 - z_2$.

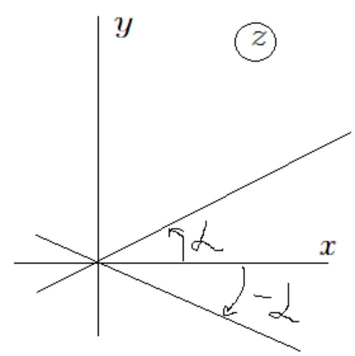
№ 1.20 (Вол). Точки $z_1, z_2, ..., z_n$ розташовані по один бік деякої прямої, що проходить через початок координат. Довести, що аналогічну властивість мають точки $1/z_1, \ 1/z_2, ..., 1/z_n$ (вказати, відносно якої прямої) та що

$z_1 + z_2 + ... + z_n \neq 0$, $\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + ... + \frac{1}{z_n} \neq 0$. (*)

◄

Нехай пряма $y = xtg\alpha$. Тоді

$z_k = r_k e^{i\varphi_k}$,



$\frac{1}{z_k} = \frac{1}{r_k} e^{-i\varphi_k}$, де $\varphi_k = \arg(z_k)$ та $\arg\left(\frac{1}{z_k}\right) = -\varphi_k$.

1) $\alpha < \varphi_k < \alpha + \pi$ або 2) $\alpha - \pi < \varphi_k < \alpha$.

В першому випадку $-\alpha - \pi < -\varphi_k < \alpha$

В другому випадку $-\alpha < -\varphi_k < -\alpha + \pi$.

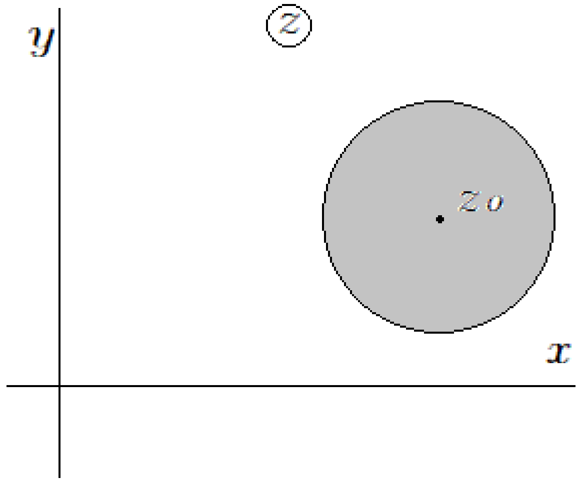
В обох випадках очевидно, що точки $1/z_1, \ 1/z_2, ..., 1/z_n$ розташовані по один бік прямої $y = -xtg\alpha$ (симетрично розташована до заданої прямої відносно вісі Ox). Д/З: Довести нерівності (*).

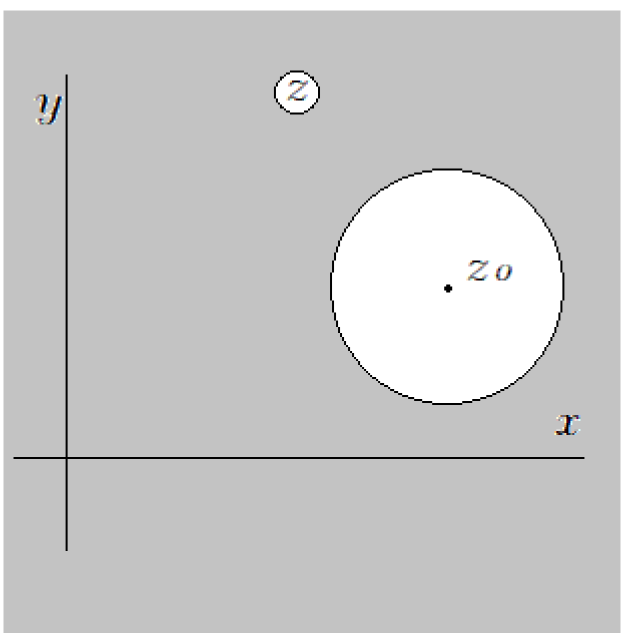
►

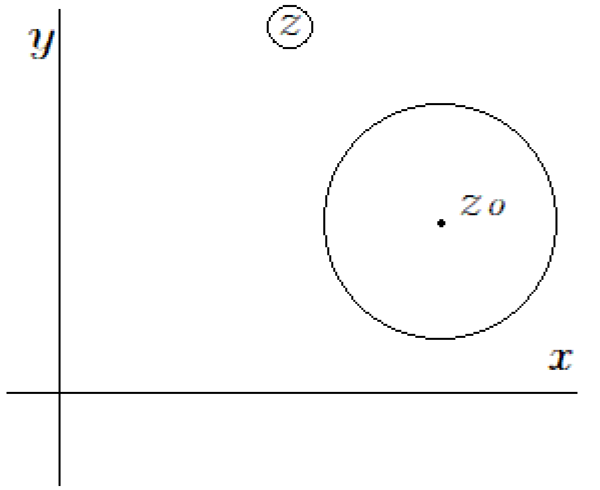
№ 1.23 (Вол). З'ясувати геометричний зміст співвідношень:

$$|z-z_0|<R; \qquad |z-z_0|>R; \qquad |z-z_0|=R.$$

Розв'язок.



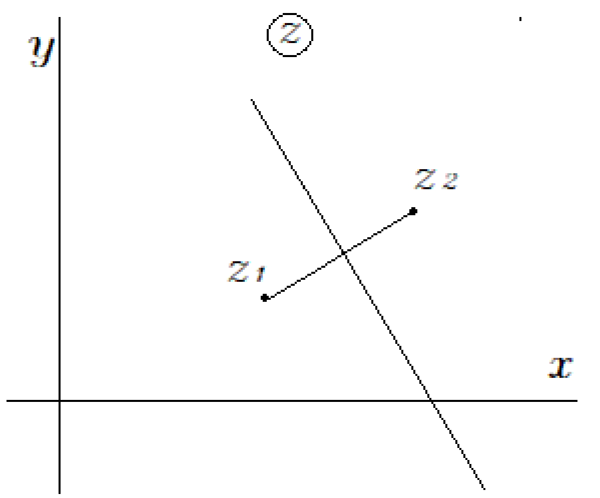




№ 1.26 (Вол). З'ясувати геометричний зміст співвідношень:

$$\left|\frac{z-z_1}{z-z_2}\right|=1$$

Розв'язок.

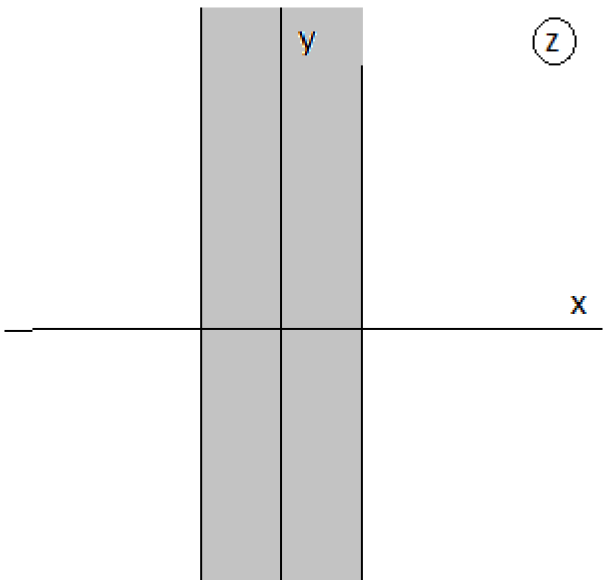


№ 1.13 (Євгр). З'ясувати геометричний зміст співвідношень:

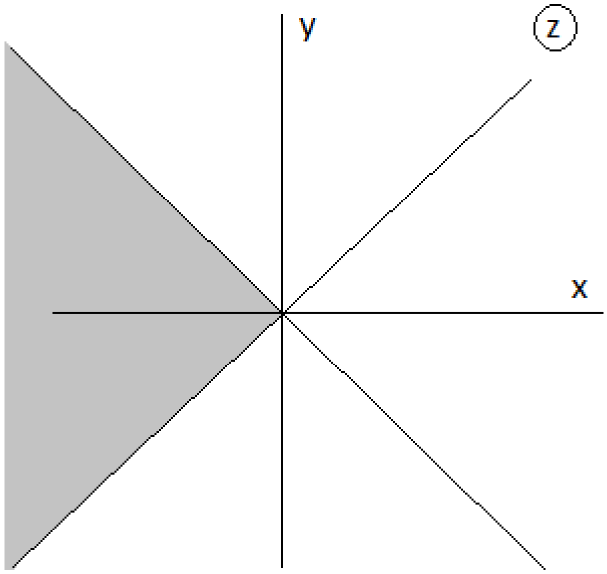
3) $|\operatorname{Re} z|<1$; 4) $|\pi-\operatorname{Re} z|<\pi/4$; 10) $|\pi-\arg z|<\pi/4$;

Розв'язок.

3)



10)



№ 1.09 (Євгр). Нехай $P(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+...+a_n$ **.** З'ясувати, якими повинні бути коефіцієнти полінома $P(z)$, якщо для будь яких комплексних значень z має місце рівність

1) $P(z)=\overline{P(\overline{z})}$;   2) $P(z)=-\overline{P(\overline{z})}$.

Розв’язок.

$\overline{z_1\pm z_2}=\overline{z}_1\pm\overline{z}_2$, $\overline{z_1z_2}=\overline{z}_1\cdot\overline{z}_2$, $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2}$.

$P(\overline{z})=a_0\left(\overline{z}\right)^n+a_1\left(\overline{z}\right)^{n-1}+...+a_n$ => $\overline{P(\overline{z})}=\overline{a_0\left(\overline{z}\right)^n+a_1\left(\overline{z}\right)^{n-1}+...+a_n}=$

$= \bar{a}_0 z^n + \bar{a}_1 z^{n-1} + ... + \bar{a}_n$

=>

1) $a_i = \bar{a}_i$, тобто a_i - дійсні числа ($\operatorname{Im} a_i = 0$).

2) $a_i = -\bar{a}_i$, тобто a_i - комплексні числа без дійсної частини($\operatorname{Re} a_i = 0$).

№ 1.32 (Вол). З'ясувати геометричний зміст співвідношень:

1) $\operatorname{Im}\left(\frac{z-z_1}{z-z_2}\right)=0$; 2) $\operatorname{Re}\left(\frac{z-z_1}{z-z_2}\right)=0$.

Розв'язок.

1) $Arg\left(\frac{z-z_1}{z-z_2}\right) = Arg\left(z-z_1\right) - Arg\left(z-z_2\right) = 2\pi n$, n - натуральне.

Отже, вектори $z - z_1$ та $z - z_2$ - колінеарні, і ГМТ z в цьому випадку –

пряма, що проходить через точки z_1 та z_2.

2) $Arg\left(\frac{z-z_1}{z-z_2}\right) = Arg\left(z-z_1\right) - Arg\left(z-z_2\right) = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, n - натуральне.

Отже, вектори $z - z_1$ та $z - z_2$ - перпендикулярні, і ГМТ z в цьому випадку –

множина точок, яку описує вершина прямого кута, що спирається на відрізок, що сполучає точки z_1 та z_2 . А це є коло, яке має своїм діаметром відрізок, що сполучає точки z_1 та z_2.

№ 1.20 (Вол). З'ясувати, які лінії на площині записані рівнянням: $\operatorname{Re}\frac{1}{z} = \frac{1}{2a}$, $(a>0)$

Розв’язок.

$\operatorname{Re}\left(\frac{1}{x+iy}\right) = \frac{x}{x^2+y^2} = \frac{1}{2a}$ => $x^2 + y^2 - 2ax = 0$ => $(x-a)^2 + y^2 = a^2$ - коло з центром в $(a,0)$ радіуса a .

Д.З.

(Євгр) 1.14, 1.21 5), 1.22

(Вол) 1.21, 1.22, 1.24, 1.25, 1.28,1.29,1.33