ТФКЗ Заняття 1.

Оноцький В'ячеслав Валерійович, кафедра ОМ, кімн.236

vingar@ukr.net, +380505167333

vingar.ho.ua/for_students/tfkz

Літ.

1. Волковыский Л.И., Лунц Г.Л., Араманович И.Г. Сборник задач по теории функций комплексного переменного: Учеб. Пособие. – 4-е изд.,испр.- М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 312 с.
2. Евграфов М.А., Сидоров Ю.В., Федорюк М.В., Шабунин М.И., Бежанов К.А. Сборник задач по теории аналитических функций, М., Наука, 1981. – 415 с.
3. vingar.ho.ua/for_students/tfkz/gryshchenko.pdf

ТЕМА І. МНОЖИНИ КОМПЛЕКСНИХ ЧИСЕЛ

1.1. Комплексні числа та дії над ними
1.2. Геометрична інтерпретація комплексного числа в евклідовій площині E_2
1.3. Тригонометрична та показникова форми запису комплексного числа
1.4. Піднесення комплексного числа до натурального та раціонального степеня

1.1. Комплексні числа та дії над ними

Означення. Комплексним числом назвемо упорядковану пару дійсних чисел (a,b).

Два комплексні числа (a,b) і (c,d) рівні тоді й тільки тоді, коли $a=c$ і $b=d$.

Дії додавання та множення над комплексними числами $(+,\cdot)$ визначимо за правилами

$$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d),$$

$$(a,b)(c,d)=(ac-bd,ad+bc).$$

Різниця та ділення визначаються через додавання та множення:

Означення. Число γ назвемо *різницею комплексних чисел* β та, α якщо число γ є розв'язком рівняння $\alpha+\gamma=\beta$.

Означення. Дія ділення вводиться як обернена до множення, тобто як знаходження розв'язку рівняння $\alpha\gamma=\beta$ відносно γ, якщо $\alpha\neq(0,0)$.

Нехай $\alpha=(a,b)$, $\beta=(c,d)$

Задача. Довести, що $\gamma=\beta-\alpha=(c-a,d-b)$.

◄ Покладемо $\gamma=(x,y)$. Тоді з рівняння $\alpha+\gamma=(a+x,d+y)=(c,d)=\beta$ маємо $a+x=c$, $b+y=d$ або $x=c-a$, $y=d-b$.►

Задача. Довести, що $\gamma=\dfrac{\beta}{\alpha}=\left(\dfrac{ac+bd}{a^2+b^2},\dfrac{ad-bc}{a^2+b^2}\right)$ при $\alpha\neq(0,0)$.

◄ Нехай $\gamma=(x,y)$, тоді за правилами множення комплексних чисел маємо рівність $(a,b)(x,y)=(c,d)$, еквівалентну системі рівнянь

$$\begin{cases} ax-by=c, \\ bx+ay=d. \end{cases}$$

Розв'язком цієї системи є $x=\dfrac{ac+bd}{a^2+b^2}$, $y=\dfrac{ad-bc}{a^2+b^2}$.

Отже, $\gamma=\dfrac{\beta}{\alpha}=\left(\dfrac{ac+bd}{a^2+b^2},\dfrac{ad-bc}{a^2+b^2}\right)$.►

Число $i=(0,1)$, яке назвемо *уявною одиницею.*

Покладемо $\alpha=(a,b)$. Тоді $\alpha=(a,0)+(0,b)=(a,0)+(b,0)(0,1)=a+bi$.

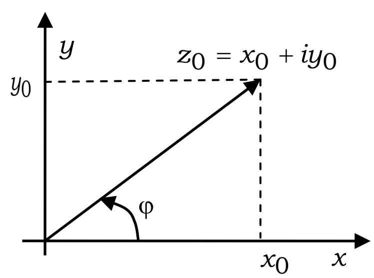
Це *алгебраїчна (нормальна)* форма запису комплексного числа. Довільне комплексне число можна записати в алгебраїчній формі.

Комплексні числа $\bar{\alpha}=\overline{a+bi}=a-bi$ та $\alpha=a+ib$ будемо називати *спряженими числами.*

$a = \mathrm{Re}\,\alpha$ ("realis" – від латинського слова "дійсний") – дійсна частина комплексного числа α;

$b = \mathrm{Im}\,\alpha$ ("imaginarius" – "уявний") – його уявна частина;

1.2. Геометрична інтерпретація комплексного числа в евклідовій площині E_2



Модуль комплексного числа $|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Кут, утворений вектором z і додатним напрямком дійсної осі Ox, виміряний у напрямку проти руху годинникової стрілки, назвемо *аргументом* комплексного числа $\mathrm{Arg}\, z = \varphi + 2k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Аргумент комплексного числа визначається через *головне значення аргументу* $\arg z = \varphi$ $(-\pi < \varphi \le \pi)$ з точністю до періоду 2π:

$$\varphi = \begin{cases} \mathrm{arctg}(y/x) & \text{при } x > 0, \\ \pi + \mathrm{arctg}(y/x) & \text{при } x < 0, y \ge 0, \\ -\pi + \mathrm{arctg}(y/x) & \text{при } x < 0, y < 0,. \\ \pi/2 & \text{при } x = 0,\ y > 0, \\ -\pi/2 & \text{при } x = 0,\ y < 0. \end{cases}$$

Значення аргументу можна також знайти розв’язавши систему

$$\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{\mathrm{Re}\, z}{|z|}, \\ \sin\varphi = \dfrac{\mathrm{Im}\, z}{|z|}. \end{cases}$$

Аргумент числа $z = 0$ не визначається.

1.3. Тригонометрична та показникова форми запису комплексного числа

Нехай $z = x + iy$ – комплексне число. Позначимо $\varphi = \arg z$. Тоді

$$x = |z|\cos(\arg z),\ \ y = |z|\sin(\arg z),$$

а саме комплексне число z можна записати у *тригонометричній формі*

$$z = |z|\big(\cos(\arg z) + i\sin(\arg z)\big) = |z|\big(\cos\varphi + i\sin\varphi\big).$$

Уведемо комплекснозначну функцію дійсного аргументу

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi. \qquad (1.8)$$

Формулу (1.8) називають *формулою Ейлера.*

Для введеної функції $e^{i\varphi}$ вірна така теорема.

Теорема. Якщо $\varphi \in \mathbb{R}$ і $\phi \in \mathbb{R}$, а k – ціле число, то вірні рівності

1) $e^0 = 1$; 2) $e^{i\varphi}e^{i\phi} = e^{i(\varphi+\phi)}$; 3) $e^{i(\varphi+2k\pi)} = e^{i\varphi}$; 4) $\left|e^{i\varphi}\right| = 1$; 5) $e^{-i\varphi} = \dfrac{1}{e^{i\varphi}}$.

Ураховуючи формулу Ейлера, комплексне число можна записати в *показниковій формі* $z = |z|e^{i\varphi}$.

1.4. Піднесення комплексного числа до натурального та раціонального степеня

$z = |z|\big(\cos\varphi + i\sin\varphi\big) = |z|e^{i\varphi}$.

$w = z^n = |z|^n e^{in\,\mathrm{Arg}\,z} = |z|^n \cos(n\arg z) + i|z|^n \sin(n\arg z)$.

1.4.2. Корінь натурального степеня з комплексного числа

Нехай $z = |z|\big(\cos\varphi + i\sin\varphi\big)$. $w^m = z$.

$$|w| = \sqrt[m]{|z|}_{+}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{m} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{m}\right) \text{ при } (k = \overline{0, m-1}).$$

№ 1.2 (Вол)

Знайти модулі та аргументи комплексних чисел: 3і, -2, 1-І, 2+5і, 2-5і, -2+5і, -2-5і.

Розв'язок.

Під φ розуміємо головне значення: $-\pi < \arg z \le \pi$, arg z – головна гілка від $-\dfrac{\pi}{2}$ до $\dfrac{\pi}{2}$.

$|3i| = 3, \arg(3i) = \dfrac{\pi}{2}$. $|-2| = 2, \arg(-2) = \pi$. $|1-i| = \sqrt{2}, \arg(1-i) = arctg(-1) = -\dfrac{\pi}{4}$.

$|\pm 2 \pm 5i| = \sqrt{29}, \arg(2+5i) = arctg(5/2).$

$$\begin{aligned} &\arg(2+5i) = arctg(5/2) \\ &\arg(2-5i) = -arctg(5/2) \\ &\arg(-2+5i) = \pi - arctg(5/2) \\ &\arg(-2-5i) = arctg(5/2) - \pi \end{aligned} .$$

№ 1.06 (Євгр)

Знайти модулі та аргументи 6) $z_1 = -\cos(\pi/7) + i\sin(\pi/7)$.

9) $z_2 = 1 + \cos(\pi/7) + i\sin(\pi/7)$.

Розв'язок.

$|-\cos(\pi/7) + i\sin(\pi/7)| = 1$

$$\arg(z_1) = \pi - arctg\left(\frac{\sin(\pi/7)}{\cos(\pi/7)}\right) = \pi - \pi/7 = 6\pi/7 .$$

$$|z_2| = \sqrt{\left(1+\cos(\pi/7)\right)^2 + \sin^2(\pi/7)} = \sqrt{2 + 2\cos(\pi/7)} = 2\cos(\pi/14).$$

$$\arg(z_2) = arctg\left(\frac{\sin(\pi/7)}{1+\cos(\pi/7)}\right) = arctg\left(\frac{2\sin(\pi/14)\cos(\pi/14)}{2\cos^2(\pi/14)}\right) = \pi/14 .$$

№ 1.04 (Євгр)

Спростити вирази 4) $\left(\dfrac{i^5+2}{i^{19}+1}\right)^2$. 5) $\dfrac{(1+i)^5}{(1-i)^3}$

Розв'язок.

$$\left(\frac{i^5+2}{i^{19}+1}\right)^2=\left(\frac{i+2}{-i+1}\right)^2=\frac{-1+4i+4}{-1-2i+1}=\frac{3+4i}{-2i}=\frac{(3+4i)2i}{4}=-2+\frac{3}{2}i.$$

$$\frac{(1+i)^5}{(1-i)^3}=\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^3(1+i)^2=\left(\frac{1+2i-1}{2}\right)^3\left(1+2i-1\right)=i^3 2i=2i^4=2.$$

№ 1.3 (Вол) Розв'язати рівняння $\overline{z}=z^{n-1}$ ($n\neq 2$ - натуральне число).

Розв'язок.

$z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi).$

$r(\cos\varphi-i\sin\varphi)=r^{n-1}(\cos((n-1)\varphi)+i\sin((n-1)\varphi))$.

$r=1$: $\dfrac{e^{i(n-1)\varphi}}{e^{-i\varphi}}=e^{in\varphi}=1$ => $\cos(n\varphi)=\cos(2\pi k), \sin(n\varphi)=\sin(2\pi k)$.

$\varphi_k=\dfrac{2\pi k}{n},\ k=\overline{0,n-1}$.

$z_k=\cos\left(\dfrac{2\pi k}{n}\right)+i\sin\left(\dfrac{2\pi k}{n}\right),\ k=\overline{0,n-1}$.

№ 1.4 (Вол) Знайти всі значення коренів і побудувати їх. 2) $\sqrt[3]{i}$. 7) $\sqrt[2]{3+4i}$

Розв'язок.

$$\sqrt[3]{i}=\sqrt[3]{\cos(\pi/2)+i\sin(\pi/2)}=\cos\left(\frac{\pi/2+2\pi k}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi/2+2\pi k}{3}\right),\ k=0,1,2:$$

$\dfrac{\pi/2+2\pi k}{3}$: $\pi/6,\ 5\pi/6,\ 9\pi/6=3\pi/2$. Д/З: намалювати!!!

$\sqrt[2]{3+4i}=\sqrt[2]{5\left(\cos\left(\arctan\left(4/3\right)\right)+i\sin\left(\arctan\left(4/3\right)\right)\right)}$.

$\left(x+iy\right)^2=3+4i$.

Розкриваємо квадрат, прирівнюємо дійсну та уявну частини, розв'язуємо систему

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ 2xy = 4 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad z_1 = 2 + i,\ z_2 = -2 - i \ .$$

№ 1.8 (Вол) Виходячи з геометричних міркувань, довести нерівності:

1) $\left|\frac{z}{|z|} - 1\right| \le |\arg z|$;   2) $|z-1| \le \big||z|-1\big| + |z||\arg z|$.

Розв'язок.

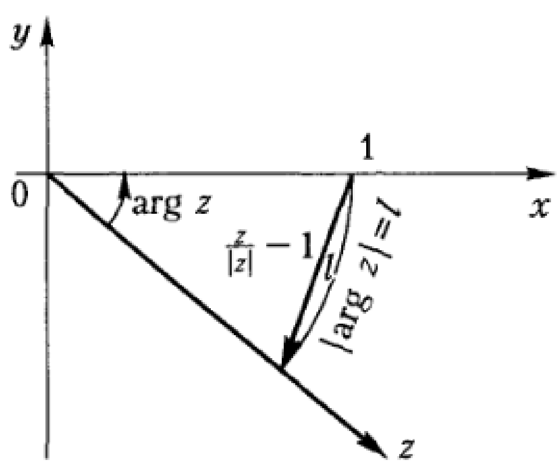


Рис. 19

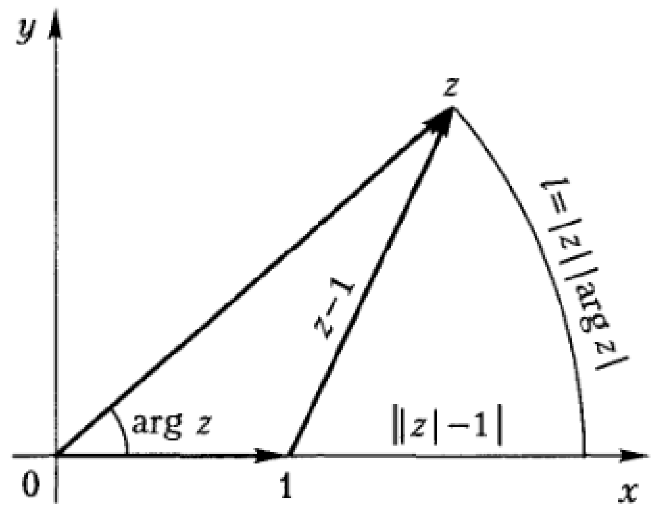


Рис. 20

<u>**Д/З:**</u>

Вол. №1.4, №1.5, №1.10, №1.14.