Грищенко О.Ю., Оноцький В.В.

Курс лекцій
з комплексного аналізу
Частина перша

Київ
2015

ЗМІСТ

Перелік означень

ТЕМА І. МНОЖИНИ КОМПЛЕКСНИХ ЧИСЕЛ

1.1. Комплексні числа та дії над ними

Незважаючи на те, що поняття комплексного числа та правила виконання арифметичних дій над такими числами читачу вже відомі, з міркувань цілісності викладення матеріалу та з метою нагадати деякі основні положення теорії комплексних чисел ми зробимо короткий огляд необхідної надалі інформації.

Означення. Комплексним числом назвемо упорядковану пару дійсних чисел (a,b).

Два комплексні числа (a,b) і (c,d) рівні тоді й тільки тоді, коли $a=c$ і $b=d$.

Дії додавання та множення над комплексними числами $(+,\cdot)$ визначимо за правилами

$$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d),$$

$$(a,b)(c,d)=(ac-bd,ad+bc).$$

Означення. Число γ назвемо *різницею комплексних чисел* β та, α якщо число γ є розв'язком рівняння $\alpha+\gamma=\beta$. Покладемо $\alpha=(a,b)$, $\beta=(c,d)$, $\gamma=(x,y)$. Тоді з рівняння $\alpha+\gamma=(a+x,d+y)=(c,d)=\beta$ маємо $a+x=c$, $b+y=d$ або $x=c-a$, $y=d-b$.

Позначення: $\gamma=\beta-\alpha$.

Зі введеного означення випливає, що існує комплексне число $(0,0)$ таке, що його додавання до іншого комплексного числа не змінює величини останнього. Таке число назвемо *нулем.*

Означення. Дія ділення вводиться як обернена до множення, тобто як знаходження розв'язку рівняння $\alpha\gamma=\beta$ відносно γ, якщо $\alpha\neq(0,0)$. Нехай $\alpha=(a,b)$, $\beta=(c,d)$, $\gamma=(x,y)$, тоді за правилами множення комплексних чисел маємо рівність $(a,b)(x,y)=(c,d)$, еквівалентну системі рівнянь

$$\begin{cases} ax-by=c, \\ bx+ay=d. \end{cases}$$

Розв'язком цієї системи є $x=\dfrac{ac+bd}{a^2+b^2}$, $y=\dfrac{ad-bc}{a^2+b^2}$.

Отже,

$$\gamma=\frac{\beta}{\alpha}=\left(\frac{ac+bd}{a^2+b^2},\frac{ad-bc}{a^2+b^2}\right).$$

З означень випливає існування такого комплексного числа, що при множенні довільного комплексного числа α на це число величина добутку буде рівною α. Таким числом є одиниця $(1,0)$. Дійсно, якщо $\alpha=(a,b)$, а $\gamma=(1,0)$, то $\alpha\gamma=(a,b)(1,0)=(a\cdot 1-0,0+b\cdot 1)=(a,b)=\alpha$.

Комплексні числа утворюють *поле* $\mathbb{C}$. Для довільних комплексних чисел α,β,γ справедливі такі аксіоми поля:

1) $\alpha+\beta=\beta+\alpha$ – комутативність додавання;
2) $\alpha\cdot\beta=\beta\cdot\alpha$ – комутативність множення;
3) $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$ – асоціативність додавання;
4) $(\alpha\beta)\gamma=\alpha(\beta\gamma)$ – асоціативність множення;
5) $\alpha(\beta+\gamma)=\alpha\beta+\alpha\gamma$ – дистрибутивність;
6) з вищенаведеної операції додавання випливає, що рівняння $\alpha+\gamma=\beta$ завжди має розв'язок відносно γ, а якщо $\beta=(0,0)$, то існує число $\gamma=-\alpha$, протилежне α, а саме таке, що $\alpha+\gamma=(0,0)$;
7) з означення операції множення випливає, що при $\alpha\neq(0,0)$ рівняння $\alpha\gamma=\beta$ завжди має розв'язок відносно γ, який у випадку $\beta=(1,0)$ установлює існування числа $\gamma=1/\alpha$, оберненого до α.

Очевидно, що результат виконання всіх уведених арифметичних дій над комплексними числами є комплексним числом.

Усі аксіоми поля перевіряються безпосередньо за означенням дій над комплексними числами.

Поле комплексних чисел $\mathbb{C}$ алгебраїчно замкнене, тобто довільний багаточлен $a_0z^n+a_1z^{n-1}+\ldots+a_n$ з комплексними коефіцієнтами має в $\mathbb{C}$ n коренів.

Розглянемо підмножину чисел вигляду $(a,0)$ і виконаємо над елементами цієї множини арифметичні дії

$(a,0)\pm(c,0)=(a\pm c,0)$; $(a,0)(c,0)=(ac,0)$.

Якщо кожному комплексному числу $(a,0)$ поставимо у відповідність дійсне число a, то така відповідність є взаємно однозначною відповідністю між множинами дійсних і комплексних чисел. Вона зберігає визначені на цих множинах операції, тобто є ізоморфізмом полів $\mathbb{C}$ і $\mathbb{R}$. Надалі числа $(a,0)$ та a будемо ототожнювати.

Інакше поводяться числа вигляду $(0,b)$. Наприклад, число $i=(0,1)$, яке назвемо *уявною одиницею*, має властивість, притаманну тільки йому: $(0,1)^2=(0,1)(0,1)=(-1,0)\ \Rightarrow\ i^2=-1$.

Покладемо $\alpha=(a,b)$. Тоді $\alpha=(a,0)+(0,b)=(a,0)+(b,0)(0,1)=a+bi$.

Це *алгебраїчна (нормальна)* форма запису комплексного числа. Довільне комплексне число можна записати в алгебраїчній формі.

Комплексні числа $\bar{\alpha}=\overline{a+bi}=a-bi$ та $\alpha=a+ib$ будемо називати *спряженими числами.*

Легко переконатись у вірності рівностей:

1) $a = \mathrm{Re}\,\alpha = (\alpha + \overline{\alpha})/2$ ("realis" – від латинського слова "дійсний") – дійсна частина комплексного числа α;

2) $b = \mathrm{Im}\,\alpha = (\alpha - \overline{\alpha})/(2i)$ ("imaginarius" – "уявний") – його уявна частина;

3) якщо $\beta = (c, d) \neq (0,0)$, то

$$\gamma = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha\overline{\beta}}{\beta\overline{\beta}} = \frac{\alpha\overline{\beta}}{c^2 + d^2}.$$

Множину комплексних чисел не можна упорядкувати так, щоб перетворити її на упорядковане поле та щоб відношення порядку збігалося на $\mathbb{R}$ із класичним порядком. Запис $z_1 < z_2$ означає, що z_1 та z_2 – дійсні числа, перше з яких менше другого.

Поле комплексних чисел не *розміщене,* оскільки в розміщених полях сума квадратів двох довільних їхніх елементів дорівнює нулю лише в тих випадках, коли кожен елемент дорівнює нулю. У полі комплексних чисел $i^2 + 1 = 0$, але $i^2 \neq 0$ і $1 \neq 0$.

1.2. Геометрична інтерпретація комплексного числа в евклідовій площині E_2

При вивченні властивостей комплексних чисел зручно користуватися їх геометричною інтерпретацією. Оскільки комплексне число визначається упорядкованою парою (a, b), то природною інтерпретацією є зображення комплексного числа на площині. Розглянемо евклідову площину зі введеною на ній декартовою системою координат (x, y). З початком координат сумістимо число $z = 0$. Далі для зображення комплексних чисел на площині збережемо звичні для евклідової площини позначення координат x та y. На осі Ox відкладемо дійсну частину комплексного числа $x = a$, а на осі Oy – уявну $y = b$. Осі Ox та Oy назвемо відповідно *дійсною та уявною осями,* а побудовану таким чином площину будемо називати *комплексною площиною.* Така побудова встановлює взаємно однозначну відповідність між точками площини та комплексними числами.

Точки цієї площини позначимо як $z = x + iy$, де x та y – координати точки z, яка відповідає комплексному числу й називається *афіксом* (від латинського "afficse" – "прив'язаний") комплексного числа z. Очевидно, що комплексно-спряженим числам відповідають точки комплексної площини, симетричні відносно дійсної осі (рис. 1.1).

Розглянемо систему векторів, які починаються в початку координат і закінчується в афіксах комплексних чисел. Кожному вектору (кінцю вектора) поставимо у відповідність комплексне число z (рис. 1.2). Нульовому вектору поставимо у відповідність точку $z=0$. Така відповідність векторів комплексним числам однозначна.

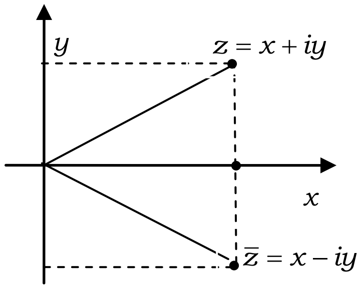


Рис. 1.1

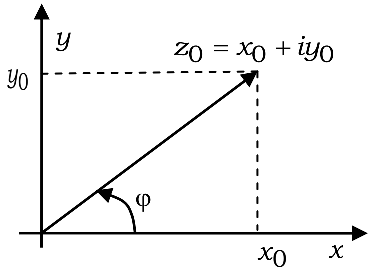


Рис. 1.2

Якщо, навпаки, кожній точці площини z поставити у відповідність вектор $\overline{Oz}$, то ми встановимо взаємно однозначну відповідність між комплексними числами та векторами з евклідового простору E_2. Надалі поняття: комплексне число z, точка z комплексної площини та вектор $\vec{z}$ (або $\overrightarrow{Oz}$) будемо сприймати як синоніми.

Нагадаємо, що *векторним* (*лінійним*) простором E над полем дійсних чисел K називається упорядкована трійка $(E,+,\cdot)$, яка складається з елементів множини E (векторів), операції додавання векторів (елементів множини E) та операції множення векторів на елементи дійсного числового поля (скаляр). Указані дії мають задовольняти відомі з лінійної алгебри аксіоми векторного простору.

Оскільки кожен вектор визначається довжиною й напрямком, то введемо ці поняття для комплексної площини. Довжина вектора, початок якого збігається з початком координат, а кінець – з афіксом комплексного числа, є *модулем* комплексного числа $|z| = r = \sqrt{x^2+y^2}$. Квадрат цієї величини можна одержати, помноживши $z = x + iy$ на спряжене число $\bar{z} = x - iy$: $|z|^2 = z\bar{z}$.

Модуль комплексного числа визначається однозначно.

Кут, утворений вектором z і додатним напрямком дійсної осі Ox, виміряний у напрямку проти руху годинникової стрілки, назвемо *аргументом* комплексного числа $\operatorname{Arg} z = \varphi + 2k\pi$, $k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$

Аргумент комплексного числа визначається через *головне значення аргументу* $\arg z = \varphi$ $(-\pi \le \varphi \le \pi)$ з точністю до періоду 2π:

$$\varphi=\begin{cases}\operatorname{arctg}(y/x) & \text{при } x>0,\\ \pi+\operatorname{arctg}(y/x) & \text{при } x<0,\ y\ge 0,\\ -\pi+\operatorname{arctg}(y/x) & \text{при } x<0,\ y<0,\\ \pi/2 & \text{при } x=0,\ y>0,\\ -\pi/2 & \text{при } x=0,\ y<0.\end{cases}.$$

Значення аргументу можна також знайти розв'язавши систему

$$\begin{cases}\cos\varphi=\dfrac{\operatorname{Re}z}{|z|},\\ \sin\varphi=\dfrac{\operatorname{Im}z}{|z|}.\end{cases}$$

Аргумент числа $z=0$ не визначається.

Необхідно також зауважити, що головне значення аргументу z є розривною функцією на від'ємній дійсній півосі. Це випливає з того, що $\arg z$ прямує до π при прямуванні точки z до цієї півосі зверху, а при прямуванні до неї знизу $\arg z$ прямує до $-\pi$. В інших точках інтервалу $[-\pi,\pi]$ ця функція неперервна.

Наведемо умови рівності двох комплексних чисел, поданих у вигляді векторів.

Два комплексні числа z_1 та z_2 рівні тоді й тільки тоді, коли рівні їх модулі, а аргументи рівні або відрізняються на величину, кратну 2π:

$$|z_1|=|z_2|,\ \arg z_1=\arg z_2.$$

Ураховуючи, що $\operatorname{Arg}z_1$ і $\arg z_1$ можуть відрізнятися одне від одного на доданок, кратний 2π, другу умову можна записати так:

$$\operatorname{Arg}z_1=\operatorname{Arg}z_2+2k\pi.$$

Рівність $n_1\operatorname{Arg}z_1=n_2\operatorname{Arg}z_2$ при $n_1,n_2\in\mathbb{Z}$ вважається вірною, коли $n_1\arg z_1=n_2\arg z_2+2m\pi\ \ m\in\mathbb{Z}$.

Зазначимо, що у спряжених комплексних чисел модулі рівні, а головні значення аргументів відрізняються знаком $\arg z=-\arg\bar{z}$. Отже, рівність $z=\bar{z}$ вірна лише для дійсних чисел, а подвійна операція спряження приводить до початкового значення $\overline{(\bar{z})}=z$.

Означення. Операція, яка кожному комплексному числу $\alpha\ne(0,0)$ ставить у відповідність комплексне число $\alpha^*=\dfrac{1}{\bar{\alpha}}$, називається *інверсією*. Очевидно, що

$$|\alpha^*|=|\alpha|^{-1},\ \text{а}\ \operatorname{Arg}\alpha^*=-\arg\alpha+2k\pi.$$

Означення. Числова площина $\mathbb{R}^2$ називається *комплексною площиною*, якщо для її точок (комплексних чисел) уведено поняття модуля, аргументу та здійснюються арифметичні дії над комплексними числами за вказаними вище правилами.

Усі введені величини та дії над ними мають просте геометричне трактування. Спираючись на векторне зображення комплексних чисел і дії над векторами, робимо висновок, що сумою двох комплексних чисел z_1 та z_2 є комплексне число $z_1 + z_2$, яке зображається вектором, що збігається з діагоналлю паралелограма, сторонами якого є вектори z_1 та z_2 з початками у точці $(0,0)$ (рис. 1.3). Різниці цих чисел $z_1 - z_2$ відповідає вектор, який сполучає їх афікси й має точку z_2 початком, а точку z_1 – кінцем (рис. 1.4). Звідси випливає, що $|z_1 - z_2|$ – відстань між точками z_1 та z_2.

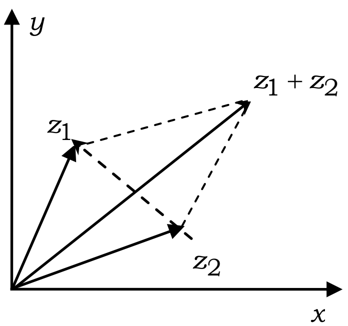


Рис. 1.3

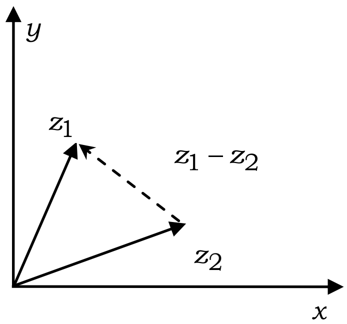


Рис. 1.4

Зокрема, рівність $|z - z_0| = \rho = \text{const}$ установлює геометричне місце точок z комплексної площини, віддалених від фіксованої точки z_0 на сталу відстань ρ, тобто це геометричне місце точок є колом із центром у точці z_0, радіус якого дорівнює ρ. Міркуючи аналогічно, установлюємо, що нерівність $|z - z_0| < \rho$ зображає множину точок, обмежених цим колом, тобто внутрішні точки круга (рис. 1.5).

Легко записати й інші нерівності, які встановлюють елементарні геометричні образи. Наприклад, нерівність $r < |z - z_0| < R$ описує множину внутрішніх точок концентричного кільця з центром у точці z_0, обмежену колами $|z - z_0| = r$ та $|z - z_0| = R$ (рис. 1.6).

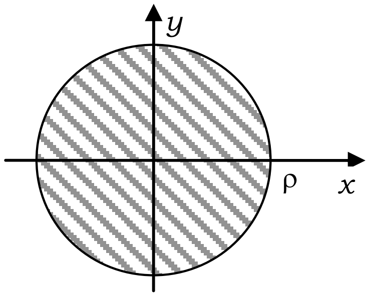


Рис. 1.5

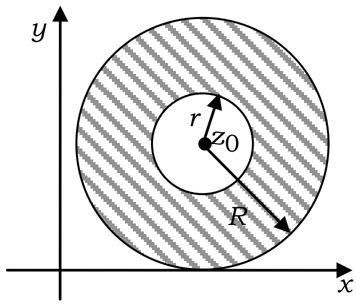


Рис. 1.6

З нерівності $\alpha < \arg z < \beta$ випливає, що вказані точки z лежать усередині кута, утвореного променями, які виходять із початку координат і нахилені до дійсної осі під кутами α та β (рис. 1.7).

Рівняння $\operatorname{Re} z = a$, $\operatorname{Im} z = b$ задають прямі, паралельні координатним осям, а нерівності $a \le \operatorname{Im} z \le b$ – вертикальну смугу разом з її границею (рис. 1.8).

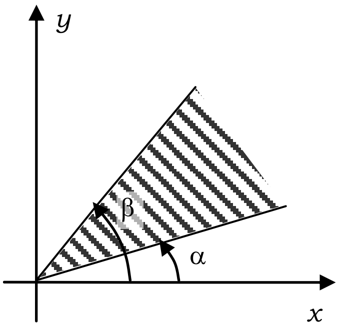


Рис. 1.7

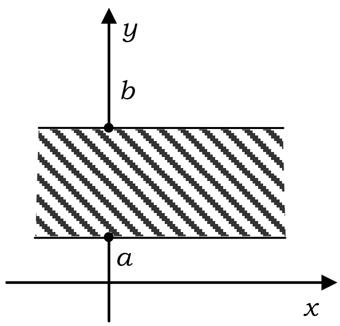


Рис. 1.8

Прямокутник (рис. 1.9) разом з його границею можна задати за допомогою системи нерівностей $-a \le \operatorname{Re} z \le b$, $|\operatorname{Im} z| \le d$.

Ще одним прикладом простої геометричної інтерпретації зображення комплексних чисел на площині є множина точок, яку задано нерівністю $|z-a| + |z-b| = c$, де a та b – комплексні числа, а $c > 0$. Очевидно, що при $|a-b| = c$ це відрізок, який сполучає точки a та b (рис. 1.10), а при $|a-b| > c$ – порожня множина. Якщо ж $|a-b| < c$, то це множина точок z, сума відстаней від яких до двох фіксованих точок a та b є сталою величиною, рівною c. Як відомо з аналітичної геометрії, така множина точок є еліпсом із фокусами у точках a та b (рис. 1.10).

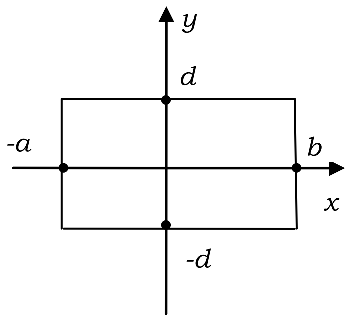


Рис. 1.9

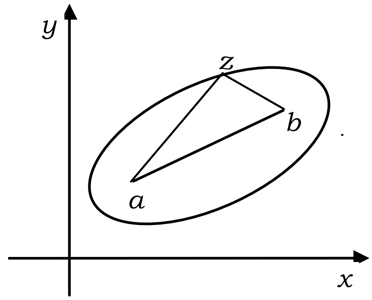


Рис. 1.10

Оскільки $\left|z_1 z_2 ... z_n\right|^2 = \left(z_1 z_2 ... z_n\right)\left(\bar{z}_1 \bar{z}_2 ... \bar{z}_n\right) = \left|z_1\right|^2 \left|z_2\right|^2 ... \left|z_n\right|^2$, то

$$\left|z_1 z_2 ... z_n\right| = \left|z_1\right| \left|z_2\right| ... \left|z_n\right|, \qquad (1.1)$$

і легко встановити рівності

$$\left|z_1 + z_2\right|^2 = (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) = \left|z_1\right|^2 + \left|z_2\right|^2 + 2\operatorname{Re} z_1 \bar{z}_2; \qquad (1.2)$$

$$\left|z_1 - z_2\right|^2 = (z_1 - z_2)(\bar{z}_1 - \bar{z}_2) = \left|z_1\right|^2 + \left|z_2\right|^2 - 2\operatorname{Re} z_1 \bar{z}_2. \qquad (1.3)$$

З того, що $|z|^2 = x^2 + y^2$, випливають очевидні нерівності

$$-|z| \le \operatorname{Re} z \le |z|, \; -|z| \le \operatorname{Im} z \le |z|, \qquad (1.4)$$

$$|x| + |y| \ge |z|.$$

Виходячи з геометричних міркувань легко одержати відомі *нерівності трикутника:*

$$\left|z_1 + z_2\right| \le \left|z_1\right| + \left|z_2\right|. \qquad (1.5)$$

$$\left|z_1 - z_2\right| \ge \left\|z_1\right| - \left|z_2\right\| \ge \left|z_1\right| - \left|z_2\right|. \qquad (1.6)$$

Оскільки нерівність (1.5) вірна для довільних комплексних чисел z_1 та z_2, то нерівність

$$\left|\left(z_1 + z_2 + ... + z_{n-1}\right) + z_n\right| \le \left|z_1 + z_2 + ... + z_{n-1}\right| + \left|z_n\right|$$

теж буде вірною. Застосовуючи до першого доданка правої частини цю саму нерівність і метод математичної індукції, установлюємо, що

$$\left|z_1 + z_2 + ... + z_n\right| \le \left|z_1\right| + \left|z_2\right| + ... + \left|z_n\right|. \qquad (1.7)$$

Знак рівності у формулах (1.5)–(1.7) досягається тоді й тільки тоді, коли аргументи всіх комплексних чисел рівні, тобто $\arg z_1 = \arg z_2 = ... = \arg z_n$. З нерівності (1.7) випливає відоме геометричне твердження, що сума довжин довільної ламаної більше довжини прямої, яка сполучає початок і кінець ламаної.

Легко бачити, що множення довільного комплексного числа $z = x + iy$ на комплексне число i приводить до повороту афікса цього числа на прямий кут. Дійсно (рис. 1.11), $zi = (x, y)i = ix - y = (-y, x)$.

Поворот на інший, цілком певний кут, може бути реалізовано множенням комплексного числа z на деяке цілком певне комплексне число a.

Одночасно доведемо, що для двох довільних множин комплексних чисел $z_1, z_2, \ldots z_n$ та $z_1', z_2', \ldots z_n'$ вірна *нерівність Шварца*

$$\left|\sum_{k=1}^{n} z_k z_k'\right|^2 \le \sum_{k=1}^{n} |z_k|^2 \sum_{k=1}^{n} |z_k'|^2$$

Для цього позначимо $A = \sum\limits_{k=1}^{n} |z_k|^2$, $B = \sum\limits_{k=1}^{n} |z_k'|^2$, $C = \sum\limits_{k=1}^{n} z_k z_k'$.

Якщо $B = 0$, то остання рівність переходить у тотожність. При $B > 0$ з очевидного співвідношення випливає

$$0 \le \sum_{k=1}^{n} \left|Bz_k - C\bar{z}_k'\right|^2 = \sum_{k=1}^{n} \left(Bz_k - C\bar{z}_k'\right)\left(B\bar{z}_k - \bar{C}z_k'\right) =$$

$$= AB^2 - B|C|^2 - B|C|^2 + B|C|^2 = B\left(AB - |C|^2\right).$$

Звідки маємо $AB^2 - B|C|^2 = B\left(AB - |C|^2\right) \ge 0$.

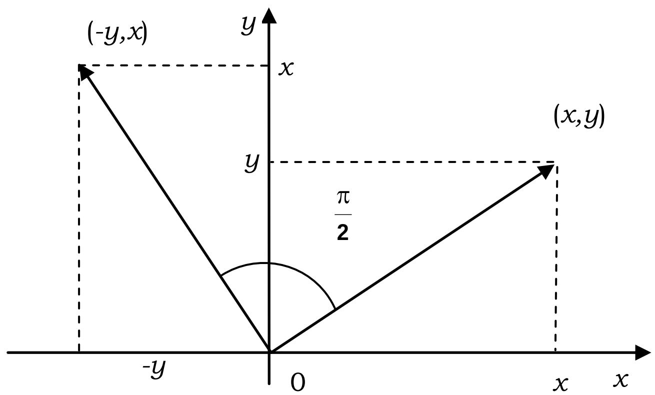


Рис. 1.11

.

1.3. Тригонометрична форма запису комплексного числа

Корисною як у теоретичних дослідженнях, так і в практичному використанні є тригонометрична форма подання комплексного числа. Як побачимо далі, вона виявляється зручною при виконанні операцій множення, піднесення до степеня, здобування кореня з комплексного числа та в деяких інших випадках. Нехай $z = x + iy$ – комплексне число. Позначимо $\varphi = \arg z$. Тоді, як показано на рис. 1.12,

$$x = |z|\cos(\arg z),\ y = |z|\sin(\arg z),$$

а саме комплексне число z можна записати у *тригонометричній формі*

$$z = |z|\left(\cos(\arg z) + i\sin(\arg z)\right) = |z|\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right).$$

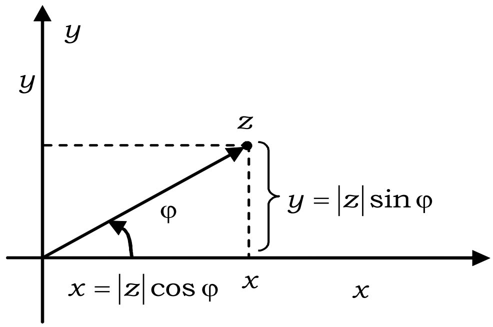


Рис. 1.12

Нехай маємо два комплексні числа $z_1 = |z_1|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ і $z_2 = |z_2|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$. Їх добуток визначимо за допомогою правила множення комплексних чисел

$$z_1 z_2 = \left(|z_1|\cos\varphi_1 + i|z_1|\sin\varphi_1\right)\left(|z_2|\cos\varphi_2 + i|z_2|\sin\varphi_2\right) =$$

$$= |z_1||z_2|\left(\left(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2\right) + i\left(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_2\cos\varphi_1\right)\right) =$$

$$= |z_1||z_2|\left(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\right).$$

Уведемо комплекснозначну функцію дійсного аргументу

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi. \tag{1.8}$$

Формулу (1.8) називають *формулою Ейлера.*

Для введеної функції $e^{i\varphi}$ вірна така теорема.

Теорема. Якщо $\varphi \in \mathbb{R}$ і $\phi \in \mathbb{R}$, а k – ціле число, то вірні рівності

1) $e^0=1$; 2) $e^{i\varphi}e^{i\phi}=e^{i(\varphi+\phi)}$; 3) $e^{i(\varphi+2k\pi)}=e^{i\varphi}$; 4) $\left|e^{i\varphi}\right|=1$; 5) $e^{-i\varphi}=\dfrac{1}{e^{i\varphi}}$.

◁ Доведення рівності 1) випливає з означення, а 2) та 3) – з доведеної вище формули для добутку комплексних чисел $z_1=\cos\varphi+i\sin\varphi$ та $z_2=\cos\phi+i\sin\phi$. З (1.8) та означення модуля комплексного числа випливає умова 4: $\left|e^{i\varphi}\right|=\sqrt{\cos^2\varphi+\sin^2\varphi}=1$. Для доведення умови 5 використаємо формулу (1.8):

$$e^{-i\varphi}=\cos\varphi-i\sin\varphi=\frac{\cos\varphi-i\sin\varphi}{\cos^2\varphi+\sin^2\varphi}=$$

$$=\frac{\cos\varphi-i\sin\varphi}{(\cos\varphi-i\sin\varphi)(\cos\varphi+i\sin\varphi)}=\frac{1}{\cos\varphi+i\sin\varphi}=\frac{1}{e^{i\varphi}}\ \triangleright$$

Строге введення формули Ейлера буде зроблено пізніше при вивченні функції e^z.

Ураховуючи формулу Ейлера, комплексне число можна записати в *показниковій формі* $z=|z|e^{i\varphi}$. Отже, при множенні двох комплексних чисел $z_1=|z_1|e^{i\varphi_1}$ та $z_2=|z_2|e^{i\varphi_2}$ одержуємо $z_1z_2=|z_1||z_2|e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$.

Оскільки комплексні числа рівні тоді й тільки тоді, коли рівні їх модулі, а аргументи рівні з точністю до адитивної сталої, кратної 2π, то з одержаних рівностей випливають *правила модуля та аргументу* комплексного числа:

1) якщо $z_1=|z_1|(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)$ і $z_2=|z_2|(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$ – два комплексних числа, то

$$|z_1z_2|=|z_1||z_2|;\ \operatorname{Arg}(z_1z_2)=\operatorname{Arg}z_1+\operatorname{Arg}z_2;$$

2) якщо, крім того, $z_2\neq(0,0)$, то

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|};\ \operatorname{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\operatorname{Arg}z_1-\operatorname{Arg}z_2.$$

Зазначимо такі дві характерні риси операції множення (ділення) комплексних чисел:

1. З багатозначності функцій $\arg(z_1z_2)=\arg z_1+\arg z_2$ та $\arg\dfrac{z_1}{z_2}=\arg z_1-\arg z_2$ випливає, що головні значення $\arg(z_1z_2)$ або $\arg(z_1/z_2)$ (якщо $z_2\neq0$) не завжди збігаються із сумою (різницею) головних значень $\arg z_1+\arg z_2$ (або $\arg z_1-\arg z_2$).

Дійсно, якщо покласти $z_1=z_2=-1$, то $\arg((-1)(-1))=\arg 1=0$, але за формулою для добутку аргументів $\arg(-1)+\arg(-1)=\pi+\pi=2\pi$. Це пов'язано з тим, що функція $\varphi=\arg z$ визначена при $\varphi\in(-\pi,\pi)$, а в розглянутому прикладі значення φ виходить за межі цієї області.

2. Множення комплексних чисел геометрично є поворотом і гомотетією. Результатом множення комплексного числа z_1 на комплексне число z_2 є вектор w, повернутий відносно вектора z_1 на кут, рівний $\arg z_2$, проти годинникової стрілки, а його модуль розтягнуто в $|z_2|$ разів. При діленні результуючий вектор повертається на кут, рівний $\arg z_2$, за годинникової стрілкою, а модуль
розтягується в $1/|z_2|$ разів. Наприклад, при множенні числа z на число $2i$ аргумент одержаного числа збільшується порівняно з $\arg z$ на кут $\pi/2$ у напрямку проти годинникової стрілки, а модуль добутку цих чисел є добутком модуля z та $|2i|=2$.

З правила виконання дій віднімання та ділення випливає, що

$$\arg\frac{z_1-z_0}{z_2-z_0}+2k\pi=\arg(z_1-z_0)-\arg(z_2-z_0)+2k\pi$$

зображує кут, під яким видно з точки z_0 пару точок z_1 та z_2, коли кут з вершиною в точці z_0 відраховується від вектора z_2-z_0 до вектора z_1-z_0 у напрямку проти руху стрілки годинника.

Якщо поряд з множиною комплексних чисел і введеними вище над ними операціями додавання та віднімання розглянути евклідову площину $\mathbb{R}^2$, у якій уведені координати $x=\operatorname{Re}z$, $y=\operatorname{Im}z$, то легко побачити, що ці дві множини ізоморфні як лінійні простори над полем $\mathbb{R}$.

Зауваження. Взагалі дії над комплексними числами та векторами у площині не адекватні. Наприклад, дія множення у тому вигляді, у якому вона введена для комплексних чисел, не має еквівалента у векторній алгебрі. І навпаки, дії множення, притаманні векторній алгебрі, а саме скалярне та векторне множення, не має відповідної дії у множині комплексних чисел.

1.4. Піднесення комплексного числа до натурального та раціонального степеня

1.4.1. Натуральний степінь комплексного числа

Нехай задано комплексне число $z=x+iy$. Визначимо комплексне число w, яке є натуральним степенем комплексного числа z, тобто число, що задовольняє рівняння $w = z^n$.

Позначимо: $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi) = |z|e^{i\varphi}$, $w = |w|(\cos\theta + i\sin\theta) = |w|e^{i\theta}$, $\varphi = \arg z$, а $\theta = \arg w$. Ураховуючи щойно доведені правила модуля та аргументу, одержимо

$$w = z^n = |z|^n (\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = |z|^n (\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

Звідси $|w| = |z|^n$; $\operatorname{Arg} w = n \operatorname{Arg} z$.

Отже,

$$w = |z|^n e^{i n \operatorname{Arg} z} = |z|^n \cos(n \arg z) + i|z|^n \sin(n \arg z).$$

Зокрема, якщо $|z| = 1$, то маємо відому формулу Муавра

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi.$$

Зазначимо, що формула Муавра має місце для довільного цілого числа $n \in \mathbb{Z}$, якщо покласти $z^0 = 1$, а $z^{-n} = 1/z^n$.

Використовуючи введені вище поняття та правила, легко переконатися, що для комплексних чисел вірні такі часто вживані рівності, як *біном Ньютона* $(z + w)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k z^k w^{n-k}$ та формула для *суми геометричної прогресії* $\sum\limits_{k=1}^{n} wz^{k-1} = \dfrac{w(1 - z^n)}{1 - z}$ при $|z| < 1$.

1.4.2. Корінь натурального степеня з комплексного числа

Нехай $z = |z|(\cos(\varphi + 2k\pi) + i\sin(\varphi + 2k\pi))$. Знайдемо число $w = \sqrt[m]{z}$.

Означення. Під *коренем степеня* $m \in \mathbb{N}$ із числа z будемо розуміти таке комплексне число w, яке після піднесення до степеня m дає початкове значення числа z, тобто $w^m = z$.

Нехай $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, а $w = |w|(\cos\theta + i\sin\theta)$. Тоді

$$z = |z|(\cos(\varphi + 2k\pi) + i\sin(\varphi + 2k\pi)) = |w|^m (\cos m\theta + i\sin m\theta).$$

Для виконання цієї рівності необхідно й достатньо, щоб

$$|w|^m = |z| \text{ і } \arg w = \frac{\operatorname{Arg} z}{m} = \frac{\arg z + 2k\pi}{m}.$$

Отже, $|w| = \sqrt[m]{|z|}_{+}$; $\varphi + 2k\pi = m\theta$. Або $\theta_k = \dfrac{\varphi + 2k\pi}{m}$, тобто

$$|w| = \sqrt[m]{|z|}_{+}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{m}+i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{m}\right) \text{ при } (k=\overline{0,m-1}).$$

Згідно з періодичністю тригонометричних функцій при $k \ge m$ значення θ_k будуть повторюватись.

У наведених вище формулах під $\underset{+}{\sqrt[n]{r}}$ розуміємо арифметичне значення кореня з додатного числа. У подальших записах знак "+" біля символу кореня може бути опущеним, якщо це не викликає непорозумінь.

Значення $\sqrt[m]{z}$, для якого $\sqrt[m]{z} = \underset{+}{\sqrt[m]{|z|}}\left(\cos\frac{\arg z}{m}+i\sin\frac{\arg z}{m}\right)$ (тобто при $k=0$), називається *головним значення кореня.*

Розглянемо деякі приклади обчислення коренів. Для знаходження значень $\sqrt{i}$ установимо, що модуль i дорівнює 1, а аргумент – $\pi/2$. Тоді значення $\sqrt{i}$ знаходимо за формулою

$$z_k = \sqrt{i} = \sqrt{1}(\cos(\pi/2+2k\pi)/2+i\sin(\pi/2+2k\pi)/2),\ k=0,1.$$

Отже, головне значення кореня з i (при $k=0$) дорівнює

$$z_0 = e^{i\frac{\pi}{4}} = \cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i),\text{ а}$$

$$z_1 = e^{i\frac{5\pi}{4}} = \cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i).$$

Аналогічно корінь $\sqrt{-1}$ має два значення, які відповідно дорівнюють i та $-i$.

Для обчислення значень $\sqrt{1-i\sqrt{3}}$ запишемо число $z=1-i\sqrt{3}$ у показниковій формі $z=2e^{-i\frac{\pi}{3}}$. Тоді $z_k=\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{6}+i\frac{2k\pi}{2}}$, $k=0,1$. Звідки

$$z_0 = \sqrt{2}\,e^{-i\frac{\pi}{6}} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6}-i\sin\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{2}},$$

а $z_1 = \sqrt{2}\quad e^{i\frac{5\pi}{6}} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{2}} = -z_0$.

Оскільки $\operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi = \arg z + \operatorname{Arg} 1$, то обчислити значення $\sqrt[m]{z}$ можна за формулою

$$\sqrt[m]{z} = \underset{+}{\sqrt[m]{|z|}}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{m}+i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{m}\right) =$$

$$=\left[\sqrt[m]{|z|}_{+}\left(\cos\frac{\arg z}{m}+i\sin\frac{\arg z}{m}\right)\right]\sqrt[m]{1}_{+}\left(\cos\frac{Arg1}{m}+i\sin\frac{Arg1}{m}\right).$$

Звідси випливає, що всі значення $\sqrt[m]{z}$ одержуються в результаті множення головного значення цього кореня на значення коренів відповідного степеня з одиниці. Отже, корінь степеня m з комплексного числа набуває m різних комплексних значень. Вони у комплексній площині зображаються точками $\sqrt[m]{z}$, що лежать у вершинах правильного m-кутника, вписаного в коло радіусом $\rho=\sqrt[m]{|z|}$ із центром у точці $z=0$. Дійсно, модулі всіх точок $z_k=\sqrt[m]{z}$ $(k=0,1,2,\ldots m-1)$ рівні між собою та дорівнюють ρ, а перехід від точки z_{k-1} до точки z_k здійснюється збільшенням значення аргументу на $2\pi/m$. Очевидно, що значення $\sqrt[m]{1}$ мають вигляд

$$z_0=1,\ z_1=\cos\frac{2\pi}{m}+i\sin\frac{2\pi}{m},\ z_2=\cos\frac{4\pi}{m}+i\sin\frac{4\pi}{m},$$

$$z_{m-1}=e^{i\frac{2\pi+2\pi(m-1)}{m}}=\cos\frac{2\pi}{m}-i\sin\frac{2\pi}{m}.$$

З наведених міркувань випливає, що серед коренів непарного степеня m з додатного числа є один дійсний додатний корінь $z_0=\sqrt[m]{|z|}_{+}$, а серед коренів парного степеня $m=2l$ з додатного числа існують два дійсних кореня $z_0=\sqrt[m]{|z|}_{+}$ та $z_l=-\sqrt[m]{|z|}_{+}$.

Справді, з формули $z_k=\sqrt[m]{|z|}_{+}\left(\cos\frac{0+2\pi k}{m}+i\sin\frac{0+2\pi k}{m}\right)$ випливає, що $z_0=\sqrt[m]{|z|}_{+}$. Якщо покладемо, що $m=2l+1$, то серед множини чисел $\frac{2k}{2l+1}$ при $k=1,2,\ldots 2l$ цілих чисел не існує, а отже, жодне значення z_k не буде дійсним. Покладаючи $m=2l$, бачимо, що серед цієї множини $(k=1,2,\ldots l-1,l,l+1,\ldots,2l-1)$ існує число $k=l$ таке, що відношення $\frac{2k}{2l}=1$ буде непарним цілим, а отже, корінь $z_l=-\sqrt[m]{|z|}_{+}$ буде дійсним і від'ємним числом.

Покажемо, що для довільної точки z значення кореня $\sqrt{z^2-1}$ лежать на прямій, яка проходить через початок координат і паралельна бісектрисі кута з вершиною у точці z трикутника, вершини якого знаходяться в точках $-1, 1, z$.

◁Нехай z – довільне фіксоване комплексне число, а z_0 та z_1 – значення кореня $\sqrt{z^2-1}$. Позначимо через $\alpha_1=\arg(z+1)$ і $\alpha_2=\arg(z-1)$ (рис. 1.13). Тоді $\arg\left(z^2-1\right)=\alpha_1+\alpha_2$, а отже, $z_k=\sqrt{z^2-1}=\left|z^2-1\right|^{\frac{1}{2}}e^{i\frac{(\alpha_1+\alpha_2)+2k\pi}{2}}$, $k=0,1$. Значення кореня $\sqrt{z^2-1}$ мають такі головні значення аргументів: $\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}$ та $\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}+\pi$. Оскільки $\alpha_2=\alpha_1+\beta$ (рис. 1.13), то точки z_0 та z_1 мають аргументи $\alpha_1+\frac{\beta}{2}$ та $\alpha_1+\frac{\beta}{2}+\pi$. Отже, ці точки лежать на прямій, яка проходить через початок координат і паралельна бісектрисі кута вказаного трикутника з вершиною в точці z ▷

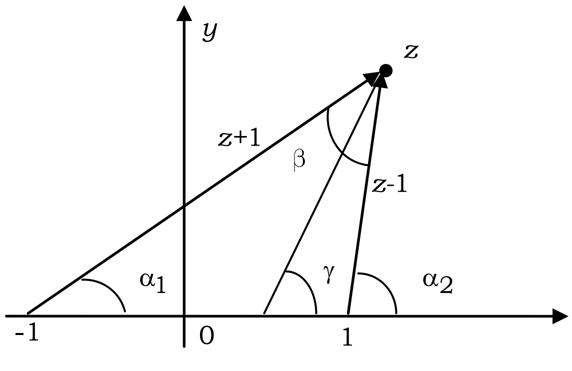


Рис. 1.13

Резюмуючи, зазначимо, що при виконанні операцій піднесення до степеня та добування кореня з комплексного числа це комплексне число доцільно записати у тригонометричній або показниковій формі.

1.4.3. Раціональний степінь комплексного числа

Нехай $z=|z|(\cos\varphi+i\sin\varphi)$. Визначимо величину $w=z^{\frac{m}{n}}$ як число, що задовольняє рівність $w^n=z^m$. Використовуючи одержані вище результати, легко переконатися у справедливості формули

$$w=|z|^{m/n}\left(\cos\frac{m}{n}(\varphi+2k\pi)+i\sin\frac{m}{n}(\varphi+2k\pi)\right) \text{ при } (k=\overline{0,n-1}).$$

Зауважимо, що множини комплексних чисел $\left(\sqrt[n]{z}\right)^m$ та $\sqrt[n]{z^m}$ збігаються тоді й тільки тоді, коли m і n – взаємно прості числа.

Дійсно, нехай $z=|z|(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ і числа n та m не взаємно прості, а n_0 – їх найбільший спільний дільник: $n=n_0q$, $m=n_0p$. Тоді за побудованою вище формулою маємо такі множини комплексних чисел:

$$z_k=\sqrt[n]{z^m}=\sqrt[n]{|z|^m}\left(\cos\frac{m\varphi+2k\pi}{n}+i\sin\frac{m\varphi+2k\pi}{n}\right),\ (k=\overline{0,n-1}) \text{ та}$$

$$\tilde{z}_l=\left(\sqrt[n]{z}\right)^m=\left(\sqrt[n]{|z|}\right)^m\left(\cos\frac{m(\varphi+2l\pi)}{n}+i\sin\frac{m(\varphi+2l\pi)}{n}\right)=$$

$$=\left(\sqrt[n]{|z|}\right)^m\left(\cos\frac{q(\varphi+2l\pi)}{p}+i\sin\frac{q(\varphi+2l\pi)}{p}\right),\ (l=\overline{0,p-1}).$$

Очевидно, що множини чисел z_k та $\tilde{z}_l$ збігаються тоді й тільки тоді, коли $n_0=1$, тобто коли n та m – взаємно прості натуральні числа.

1.5. Геометрична інтерпретація множини комплексних чисел на сфері Рімана. Поняття розширеної комплексної площини

Для функцій комплексної змінної z значення змінюється не тільки у скінченній частині площини, але й може прямувати до невласної для E_2 нескінченно віддаленої точки. Таку точку будемо називати *нескінченно віддаленою* та позначати символом $z=\infty$. Проте геометричне трактування комплексного числа не обмежується його інтерпретацією як точки комплексної площини або вектора в ній. Така відповідність вірна лише для точок скінченної частини площини, тобто комплексних чисел, які мають скінченний модуль. Оскільки для чисел з необмеженим модулем не встановлено відповідних образів у евклідовій площині, то, щоб одержати достатньо чітке геометричне трактування нескінченно великого комплексного числа $(z=\infty)$, розглянемо відображення комплексної площини на сферу Рімана, яке реалізується стереографічною проекцією.

1.5.1. Стереографічна проекція. Сфера Рімана як геометричний образ комплексних чисел

У тривимірному просторі введемо декартову систему координат ξ, η, ς. Площину $\varsigma = 0$ ототожнимо з комплексною площиною $\mathbb{C}$ з координатами (x, y) і будемо вимагати, щоб збігалися початки координат обох систем (ξ, η, ς) у просторі E_3 та (x, y) у площині $\mathbb{C}$, а напрямки осей Ox та Oy відповідали напрямкам $O\xi$ та $O\eta$. У системі координат (ξ, η, ς) побудуємо сферу радіусом $R = 1/2$ із центром у точці $(0, 0, 1/2)$ (рис. 1.14).

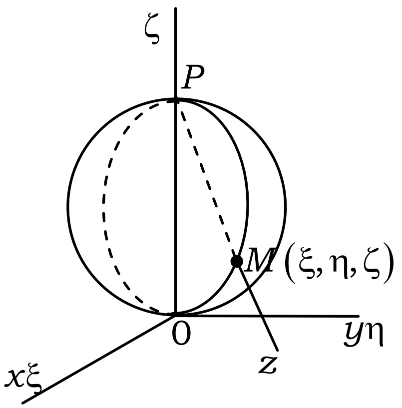


Рис. 1.14

Нехай z – довільна точка площини (x, y), P – точка з координатами $(0, 0, 1)$, яку називають *полюсом сфери.* Очевидно, що пряма Pz перетне сферу в єдиній точці $M = (\xi, \eta, \varsigma)$. Кожній точці комплексної площини ми поставили у відповідність точку сфери. І навпаки – кожній точці сфери $M = (\xi, \eta, \varsigma)$ буде відповідати єдина точка комплексної площини, яка лежить на перетині прямої PM з комплексною площиною. Цим установлюється взаємно однозначна відповідність між усіма точками скінченної частини комплексної площини та точками сфери, окрім точки P.

Домовимось точку сфери $M = (\xi, \eta, \varsigma)$ $\left(M \neq P\right)$, яка відповідає при стереографічній проекції точці z, вважати новим зображенням комплексного числа z. Для виконання дій над комплексними числами, заданими на сфері, будемо переходити до їх стереографічних проекцій на площину, виконувати там дії за введеними вище правилами, а потім повертатися на сферу.

Для точки P ще не встановлено відповідності в комплексній площині. Користуючись поняттями евклідової геометрії, логічно було б цій точці поставити у відповідність коло з нескінченним радіусом із центром у початку координат. Однак така побудова порушить взаємну однозначність точок комплексної площини та сфери. Тому приймемо гіпотезу, що точці P у площині $\mathbb{C}$ відповідає єдина нескінченно віддалена точка $z=\infty$ з різними можливими напрямками руху до неї. У цьому разі образ цієї точки на сфері (точка P) нічим не відрізняється від інших точок сфери. Разом з тим, нове число $z=\infty$ не може брати участі у виконанні арифметичних операцій нарівні з іншими, оскільки ці дії визначені лише для комплексних чисел (точок сфери), які відповідають точкам скінченної частини площини.

Таке проектування точок сфери на комплексну площину й навпаки має назву *стереографічної проекції*, а побудована сфера називається *сферою Рімана.*

Сферу Рімана також називають *сферою комплексних чисел.* Множину комплексних чисел можна трактувати як точки сфери Рімана. Якщо точка $z=\infty$ виключається з розгляду, то доцільно користуватися комплексною площиною. Проте, якщо використовувати сферу Рімана як геометричне місце комплексних чисел, то комплексну площину можна розглядати як „географічну карту” відповідних сферичних графіків (образів). Очевидно, що на сфері Рімана можна ввести поняття відстані між точками (метрики) і напрямків прямування. Оскільки, як ми переконаємося далі, стереографічна проекція є неперервним і однозначним відображенням, то довільні геометричні місця точок площини будуть однозначно й неперервно відображатись у відповідні геометричні місця на сфері. Вірним буде й обернене твердження. З цього, як наслідок, випливає неперервне та взаємно однозначне відображення довільної множини точок площини і сфери. Отже, поняття області, її границі та інші геометричні й топологічні поняття зберігаються при стереографічному відображенні.

Означення. Комплексну площину $\mathbb{C}$, доповнену єдиною нескінченно віддаленою точкою $z=\infty$, назвемо *розширеною комплексною площиною* та позначимо $\overline{\mathbb{C}}=\mathbb{C}\bigcup\{\infty\}$.

Зауважимо, що у випадку, коли одне комплексне число $z\in\mathbb{C}$, а інше $z_0=\infty$, то над цими числами допустимі тільки такі дії: $z+z_0=z+\infty=\infty$, $z\cdot\infty=\infty$ та $\dfrac{z}{z_0}=\dfrac{z}{\infty}=0$. Дії додавання $\infty+\infty$, множення $0\cdot\infty$ та ділення ∞/∞ на множині комплексних чисел не визначені.

1.5.2. Зв'язок між координатами сфери Рімана та комплексної площини при стереографічній проекції

Побудуємо формули, які встановлюють зв'язок між точками комплексної площини $z = x + iy$ і точками $M = (\xi, \eta, \varsigma)$ сфери Рімана. Проведемо промінь, який виходить із точки P, перетинає сферу в точці $M(\xi, \eta, \varsigma)$ і площину Z – у точці $M'(x, y, 0)$ (рис. 1.14). Оскільки точка M належить сфері, то її координати задовольняють рівняння сфери

$$\xi^2 + \eta^2 + \left(\varsigma - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4},$$

або

$$\xi^2 + \eta^2 = \varsigma(1 - \varsigma). \tag{1.9}$$

Точки $P = (0,0,1)$, $M = (\xi, \eta, \varsigma)$ та $M' = (x, y, 0)$ лежать на одній прямій, їх координати задовольняють рівняння прямої

$$\frac{\xi - 0}{x - 0} = \frac{\eta - 0}{y - 0} = \frac{\varsigma - 1}{0 - 1}.$$

Звідси

$$\frac{\xi}{x} = 1 - \varsigma; \ \frac{\eta}{y} = 1 - \varsigma.$$

Отже,

$$x = \frac{\xi}{1 - \varsigma}; \ y = \frac{\eta}{1 - \varsigma}. \tag{1.10}$$

Оскільки $M \neq P$, то $\varsigma \neq 1$ та обидві частини рівняння (1.9) можна розділити на $(1 - \varsigma)^2$:

$$\frac{\xi^2 + \eta^2}{(1 - \varsigma)^2} = \frac{\varsigma}{(1 - \varsigma)}.$$

З (1.10) випливає, що $x^2 + y^2 = \dfrac{\xi^2 + \eta^2}{(1 - \varsigma)^2}$. Отже, $\left(x^2 + y^2\right)(1 - \varsigma) = \varsigma$.

Розв'язавши ці рівняння відносно ς, одержимо

$$\varsigma = \frac{x^2 + y^2}{1 + x^2 + y^2} = \frac{|z|^2}{1 + |z|^2}. \tag{1.11}$$

Після підстановки ς у (1.10) знайдемо

$$\xi = x(1 - \varsigma) = \frac{x}{1 + x^2 + y^2} = \frac{\operatorname{Re} z}{1 + |z|^2}, \tag{1.12}$$

$$\eta = y(1-\varsigma) = \frac{y}{1+x^2+y^2} = \frac{\operatorname{Im} z}{1+|z|^2}. \tag{1.13}$$

Формули (1.10) установлюють залежність координат (x, y) комплексної площини $\mathbb{C}$ від координат (ξ, η, ς) сфери Рімана, а (1.11)–(1.13) – виражають залежність координат сфери Рімана від координат комплексної площини при стереографічній проекції. Враховуючи прийняті припущення й одержані формули, ми будемо ототожнювати розширену комплексну площину зі сферою Рімана.

1.6. Властивості стереографічної проекції

Стереографічна проекція має дві важливі властивості: довільному колу на площині z стереографічна проекція ставить у відповідність коло на сфері, крім того, вона зберігає кути між кривими в площині та їх образами на сфері. Ці самі властивості зберігаються й при відображенні сфери Рімана на комплексну площину. Використовуючи формули (1.10) та (1.11)–(1.13), доведемо вказані властивості стереографічної проекції.

1.6.1. Кругова властивість

Тут і далі *колом в узагальненому розумінні* будемо називати як коло зі скінченним, так і з нескінченним радіусом, тобто пряму. Під *зовнішньою точкою* деякої множини D сфери (або площини) будемо розуміти точку сфери (або, відповідно, площини), яка не належить множині D разом з деяким околом, що містить цю точку.

Теорема. Довільне коло в комплексній площині відображається на коло на сфері Рімана.

◁ Рівняння кола на сфері визначимо як розв'язок системи рівнянь, одне з яких визначає довільну площину, що перетинає сферу, а друге – поверхню сфери. Запишемо рівняння перетину площини та сфери:

$$\begin{cases} A\xi + B\eta + C\varsigma + D = 0, \\ \xi^2 + \eta^2 + \left(\varsigma - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}. \end{cases}$$

Тут A, B, C, D – деякі дійсні числа.

Припустимо, що точка $P = (0,0,1)$ не належить указаному колу. Використавши формули (1.11)–(1.13), з першого рівняння одержимо

$$A\frac{x}{1+\left(x^2+y^2\right)} + B\frac{y}{1+\left(x^2+y^2\right)} + C\frac{\left(x^2+y^2\right)}{1+\left(x^2+y^2\right)} + D = 0.$$

Звідси, після простих перетворень, приходимо до рівняння кола у площині (x, y):

$$Ax + By + (C + D)\left(x^2 + y^2\right) + D = 0\,.$$

Зокрема, якщо точка $P = (0,0,1)$ належить цьому колу, то $D + C = 0$. У цьому разі рівняння площини має вигляд $A\xi + B\eta + C(1 - \varsigma) = 0$.

Беручи до уваги формули (1.12), (1.13), одержимо, що в комплексній площині образом кола, що проходить через полюс, є пряма

$Ax + By - C = 0$.

Доведемо обернене твердження. Запишемо рівняння кола у площині z у вигляді $A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0$, де A, B, C, D – дійсні коефіцієнти. При $A = 0$ – це рівняння прямої. Підставимо сюди замість x та y значення за формулами (1.10) і, ураховуючи рівняння сфери, одержимо $A\dfrac{\varsigma}{1-\varsigma} + B\dfrac{\xi}{1-\varsigma} + C\dfrac{\eta}{1-\varsigma} + D = 0$. Останнє рівносильне рівнянню

$$B\xi + C\eta + (A - D)\varsigma + D = 0\,. \qquad (1.14)$$

Це рівняння площини в тривимірному просторі. Оскільки $0 < \varsigma < 1$, то площина перетинає сферу Рімана. Множина точок сфери M, яка відповідає колу, має лежати на перетині (1.9) і (1.14) (сфери та площини) ▹

Очевидно, що довільне коло ділить площину на дві частини – внутрішню й зовнішню. Згідно з неперервністю та взаємною однозначністю образ кола при стереографічній проекції теж ділить поверхню сфери Рімана на дві частини. Отже, можна побудувати нескінченно малий сферичний окіл радіусом ε точки P на сфері Рімана так, що при стереографічній проекції він відображається в окіл точки $z = \infty$ і має вигляд зовнішності кола $|z| > R$ з достатньо великим R, який еквівалентний околу $\left|\dfrac{1}{z}\right| < \varepsilon = \dfrac{1}{R}$.

1.6.2. Властивість збереження кутів

Кутом між кривими γ_1 та γ_2 у площині будемо вважати кут, який утворюють дотичні до цих кривих у точці їх перетину. Аналогічно визначимо кут між кривими на сфері Рімана (рис. 1.15).

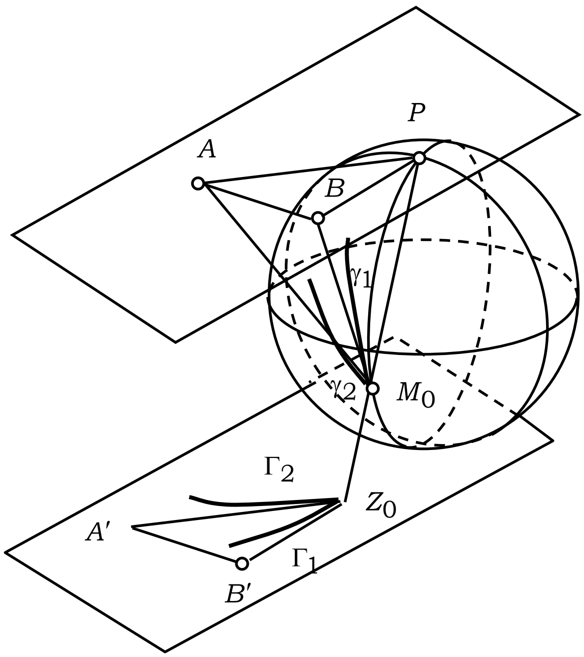


Рис. 1.15

Теорема. При стереографічній проекції кути між кривими на сфері дорівнюють відповідним кутам між їх образами на площині.

◁ Нехай $M_0(\xi_0, \eta_0, \varsigma_0)$ – довільна, відмінна від полюса P точка на сфері, а γ_1 та γ_2 – неперервні криві на сфері, які проходять через точку M_0 і мають у ній дотичні. Нехай кут, утворений дотичними, дорівнює α. Оскільки γ_1 та γ_2 – криві з дотичними, то це означає, що вони можуть бути задані параметрично за допомогою функцій $\xi_k = \varphi_k(t)$, $\eta_k = \phi_k(t)$, $\varsigma_k = \chi_k(t)$ $(k = 1,2)$, які задовольняють рівняння сфери $(\varphi_k(t))^2 + (\phi_k(t))^2 + (\chi_k(t))^2 = 1$, диференційовані в точці $t = t_0$, а також $(\varphi_k'(t))^2 + (\phi_k'(t))^2 + (\chi_k'(t))^2 \neq 0$.

Скористаємося стереографічним відображенням. Позначимо через $Z_0(x_0, y_0, 0)$ точку площини, яка є образом точки M_0 на сфері, а через Γ_1 та Γ_2 – образи кривих γ_1 та γ_2. Тоді координати кривих Γ_1 і Γ_2 можна задати рівняннями

$$x_k = \frac{\xi_k}{1-\varsigma_k} = \frac{\varphi_k(t)}{1-\chi_k(t)},\ y_k = \frac{\eta_k}{1-\varsigma_k} = \frac{\phi_k(t)}{1-\chi_k(t)},\ k = 1,2.$$

Оскільки $M_0 \neq P$, то $1-\chi(t_0)\neq 0$, отже, можна зробити висновок, що криві з дотичними γ_1 та γ_2 при стереографічному відображенні переходять у криві з дотичними Γ_1 та Γ_2, а числа $x_k'(t_0)$ та $y_k'(t_0)$, які характеризують напрямки дотичних до Γ_1 та Γ_2 у точці Z_0, визначаються за формулами

$$x_k'(t_0)=\frac{\xi_k'(t_0)(1-\varsigma_k(t_0))+\varsigma'_k(t_0)\xi_k(t_0)}{(1-\varsigma_k(t_0))^2},$$

$$y_k'(t_0)=\frac{\eta_k'(t_0)(1-\varsigma_k(t_0))+\varsigma_k'(t_0)\eta_k(t_0)}{(1-\varsigma_k(t_0))^2}.$$

Позначимо через β кут між дотичними до Γ_1 та Γ_2 у точці Z_0. Покажемо, що він дорівнює α. Для цього продовжимо дотичні до сферичних кривих до перетину їх з дотичною площиною до сфери в точці P (див. рис. 1.15). Розглянемо трикутники ΔAPB та ΔAMB. Оскільки AB – спільна сторона обох трикутників, $AP=AM$ та $BP=BM$ як дотичні до кола, що виходять з однієї точки, то трикутники ΔAPB та ΔAMB рівні між собою. Отже, $\angle APB=\angle AMD=\alpha$. Разом з тим, дотичні до проекцій кривих паралельні прямим AP та BP, оскільки ці дотичні є прямими, утвореними перетином площин PAM і PBM із площиною проекцій. Отже, кут між ними дорівнює $\angle APB=\alpha$, тобто $\beta=\alpha$ ▹

Таким чином, стереографічна проекція є неперервним взаємно однозначним відображенням комплексної площини на сферу Рімана. При цьому відображенні кола на площині відображаються в кола на сфері й навпаки, а кути між довільними кривими, які мають дотичні, та їх образами зберігаються.

Відкриту площину $\mathbb{C}$ можна ототожнити з поверхнею сфери Рімана S без полюса, тобто $S\setminus\{P\}$, а розширену комплексну площину $\overline{\mathbb{C}}$ – з усією сферою Рімана S.

1.7. Метричні співвідношення в комплексній площині та на сфері Рімана

Однією з фундаментальних характеристик множини точок є метрика. Вона встановлює відстань між точками множини. Метричні простори дозволяють виразити мовою геометрії значну кількість результатів математичного аналізу, увести в метричних просторах такі важливі поняття, як повнота, компактність, зв'язність простору та ін.

Нагадаємо формальне означення метрики.

Означення. Нехай X – довільна множина. Тоді відображення $X^2 \xrightarrow{\rho} \mathbb{R}$ називається *метрикою*, якщо $\forall (x \in X, y \in X, z \in X)$ виконуються аксіоми:

1) $\rho(x, y) = 0 \ \Rightarrow x = y = 0$;
2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$;
3) $\rho(x, y) \le \rho(x, z) + \rho(z, y)$.

Уведення метрики в тому чи іншому просторі взагалі неоднозначне. Відповідно до розглянутих вище геометричних інтерпретацій комплексних чисел на площині та сфері Рімана введемо у цих множинах відповідні метрики.

Визначимо відстань між точками комплексної площини $\mathbb{C}$.

Означення. Нехай $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ – точки комплексної площини. Тоді *відстань* між ними *в евклідовій векторній метриці* обчислюється за формулою

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{\left(x_1 - x_2\right)^2 + \left(y_1 - y_2\right)^2}\,. \tag{1.15}$$

Виконання двох перших аксіом для модуля комплексного числа не викликає сумніву. Виходячи з геометричної інтерпретації комплексного числа, легко переконатися, що для комплексних чисел вірні нерівності трикутника $\big||z_1| - |z_2|\big| \le |z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$.

З уведенням модуля комплексного числа в комплексній площині введено метрику, а упорядкована четвірка $E = \left(\mathbb{C}, +, \cdot, |\ \cdot\ |\right)$ є *нормованим простором* над полем $\mathbb{C}$.

Означення. Нехай $Z_1(\xi_1, \eta_1, \varsigma_1)$ і $Z_2(\xi_2, \eta_2, \varsigma_2)$ – зображення точок z_1 і z_2 на сфері Рімана. *Сферичною* (хордовою) *відстанню* між точками Z_1 і Z_2 називається евклідова норма вектора $(\xi_1 - \xi_2, \eta_1 - \eta_2, \varsigma_1 - \varsigma_2)$, тобто відстань між образами точок z_1 і z_2 на сфері Рімана

$$\begin{gathered}\rho(Z_1, Z_2) = \left|Z_1(\xi_1, \eta_1, \varsigma_1) - Z_2(\xi_2, \eta_2, \varsigma_2)\right| = \\ = \sqrt{(\xi_1 - \xi_2)^2 + (\eta_1 - \eta_2)^2 + (\varsigma_1 - \varsigma_2)^2}.\end{gathered} \tag{1.16}$$

Ураховуючи зв’язок між координатами площин (x, y) та (ξ, η, ς) сфери Рімана (1.10) і (1.11)–(1.13), легко встановити, що

$$\rho^2(Z_1, Z_2) = \left(\frac{x_1}{1+|z_1|^2} - \frac{x_2}{1+|z_2|^2}\right)^2 + \left(\frac{y_1}{1+|z_1|^2} - \frac{y_2}{1+|z_2|^2}\right)^2 +$$

$$+\left(\frac{|z_1|}{1+|z_1|^2} - \frac{|z_2|}{1+|z_2|^2}\right)^2 =$$

$$= \frac{|z_1|^2}{1+|z_1|^2} + \frac{|z_2|^2}{1+|z_2|^2} - \frac{2\left(x_1x_2 + y_1y_2 + |z_1||z_2|\right)}{\left(1+|z_1|^2\right)\left(1+|z_2|^2\right)}.$$

Звідси

$$\rho(z_1, z_2) = \frac{|z_1 - z_2|}{\sqrt{1+|z_1|^2}\sqrt{1+|z_2|^2}}. \qquad (1.17)$$

Для точок розширеної комплексної площини доцільно використовувати сферичну метрику. Щоб визначити відстань між точкою, що лежить у скінченній частині площини, і нескінченно віддаленою точкою в (1.17), покладемо $z_1 = z$; $z_2 \to \infty$. Після нескладних перетворень (ділення на $|z_2|$ та оцінки граничного значення) маємо

$$\rho(z, \infty) = \frac{1}{\sqrt{1+|z|^2}}. \qquad (1.18)$$

Уведення в комплексній площині метрики перетворює її на метричний простір, для елементів якого виконуються всі аксіоми відстані.

Легко показати, що модуль комплексного числа в нормованому полі комплексних чисел є неперервною функцією.

Якщо z_1 та z_2 – комплексні числа, що лежать у крузі $\{z \in \mathbb{C} : |z| \le R\}$ $(0 < R < +\infty)$, то евклідова і сферична метрики еквівалентні. Це випливає з очевидної нерівності

$$\frac{|z_1 - z_2|}{1+R^2} \le \rho(z_1, z_2) \le |z_1 - z_2|. \qquad (1.19)$$

Тому сферичну метрику застосовують при розгляді необмежених множин. Надалі, ми будемо розглядати на множині $\mathbb{C}$ евклідову метрику, а на $\overline{\mathbb{C}}$ – сферичну.

1.8. Топологічні структури в комплексній площині

При вивченні теорії функцій комплексної змінної ми будемо мати справу з різноманітними точками розширеної комплексної площини та їх множинами. Тому, щоб не виникало непорозумінь у тлумаченні тих чи інших термінів, наведемо основні означення та твердження теорії множин.

Відомо, що множина комплексних чисел має дві структури: алгебраїчну структуру поля й топологічну простору (двовимірного евклідового). У п.1.1 розглянуто арифметико-алгебраїчні властивості поля комплексних чисел і комплексної площини, які визначають його алгебраїчну структуру. Далі розглянемо необхідні для вивчення властивостей множин комплексних чисел означення околу, області, межі множини, граничної точки та ін. Вивчимо зв'язки, які виникають між елементами множин при введенні цих понять.

Для досягнення поставленої мети – побудови топології в комплексній площині – скористаємося відомими топологічними властивостями евклідової площини, ізоморфної $\mathbb{C}$, а також уведемо нові властивості, притаманні саме комплексній площині.

Щоб підкреслити роль геометричних понять у теорії функцій комплексної змінної, нагадаємо деякі відомості із загальної топології.

Домовимося позначати великими латинськими літерами $A, B, \ldots$ множини, а малими $a, b\ldots$ – їх елементи. Елементи довільної множини E назвемо її *точками*.

Проаналізувавши фундаментальні поняття математичного аналізу (напр., точка дотику або гранична точка, неперервність, збіжність), бачимо, що вони можуть бути описані лише за допомогою відкритих множин. Ця обставина стала основою ідеї вважати первісним поняттям аналізу систему відкритих множин, що привело математиків до загального поняття топологічного простору. Загальноприйнята зараз аксіоматика топологічних просторів з'явилась уперше в роботах К. Куратовського (1922р. – оператор замикання), П. Александрова (1925р. – відкриті множини), В. Серпинського (1927р. – замкнені множини).

Означення. Нехай X – деяка множина точок. *Топологією* (*топологічною структурою*) у X називається довільна система τ її підмножин, яка задовольняє умови:

1) $\{X, \varnothing\} \subseteq \tau$;

2) $G_\alpha \in \tau,\ \alpha \in A \ \Rightarrow \ \bigcup\limits_{\alpha \in A} G_\alpha \in \tau$, де A – довільна множина індексів;

3) $G_\alpha \in \tau,\ \alpha \in \{1, \ldots, n\} \ \Rightarrow \ \bigcap\limits_{\alpha=1}^{n} G_\alpha \in \tau$.

Означення. Упорядкована пара $T = (X, \tau)$ називається *топологічним простором.*

Означення. Множини, що належать топології τ, називаються *відкритими.*

Означення. Множини, які є доповненням до відкритих множин, називаються *замкненими.*

Теорема. Нехай (X,τ) – топологічний простір. Тоді множини X, $\varnothing$ замкнені; перетин довільної кількості замкнених множин – замкнена множина; об'єднання скінченної кількості замкнених множин – замкнена множина.

Пропонуємо читачам довести це твердження самостійно.

Поняття відкритої множини в топологічному просторі постулюється. Щоб довести, що деяка множина M у топологічному просторі T відкрита, треба довести, що вона належить його топології.

Зрозуміло, що на одній і тій самій множині X можна ввести різні топології, утворивши різні топологічні простори. Якщо на X задано фіксовану топологію, то топологічний простір позначатимемо просто через X.

Означення. Підмножина O топологічного простору X називається *околом точки* $x \in X$, якщо вона містить таку відкриту в X підмножину G, що $x \in G \subseteq O$.

Означення. Точка $x \in X$ називається *точкою дотику* множини $M \subseteq X$, якщо кожний окіл точки x містить хоча б одну точку з M.

Означення. Точка $x \in X$ – *гранична точка* множини $M \subseteq X$, якщо кожний окіл точки x містить хоча б одну точку з M, що не збігається з x.

Означення. Сукупність точок дотику множини $M \subseteq X$ називається *замиканням* множини M і позначається $\mathrm{cl}M$ або $\bar{M}$. Сукупність граничних точок множини $M \subseteq X$ називається *похідною множиною* множини M і позначається M'.

Зазначимо, що M' – замкнена множина.

Пропонуємо читачеві самостійно переконатися, що операція замикання має такі властивості:

1) множина M топологічного простору X замкнена $\Leftrightarrow$ $\bar{M} = M$;
2) $M \subseteq \bar{M}$;
3) $M \subseteq N \Rightarrow \bar{M} \subseteq \bar{N}$;
4) $\bar{\bar{M}} = \bar{M}$;
5) $\overline{M \cup N} = \bar{M} \cup \bar{N}$;
6) $\bar{\varnothing} = \varnothing$.

Нехай A, B – підмножини топологічного простору X, причому $\bar{A} \subseteq \bar{B}$. Чи можна стверджувати, що $A \subseteq B$?

Ми вважаємо, що досить повчальним для читача буде досвід, набутий при спробі дати відповідь на наступне питання.

Задача К. Куратовського. Скільки різних множин можна отримати із заданої множини топологічного простору за допомогою операцій замикання та взяття доповнення?

Означення. Точка $x \in M$ – *ізольована точка* множини $M \subseteq X$, якщо існує такий її окіл O, що $O \bigcap M = \{x\}$.

Означення. Нехай A та B – дві множини в топологічному просторі X. Множина A називається *щільною у* B, якщо $B \subseteq \overline{A}$.

Означення. Якщо $\overline{A} = X$, то множина $A \subseteq X$ називається *всюди щільною*.

Означення. Множина A називається *ніде не щільною*, якщо вона не є щільною в жодній непорожній відкритій множині простору X.

Означення. Точка $x \in X$ називається *внутрішньою точкою* множини $M \subseteq X$, якщо існує окіл точки x, який цілком міститься в M.

Аналогічно можемо назвати точку $x \in X$ *зовнішньою точкою* множини $M \subseteq X$, якщо існує окіл точки x, що весь міститься в $X \setminus M$.

Означення. Сукупність внутрішніх точок множини $M \subseteq X$ називається *внутрішністю* множини M і позначається $\operatorname{int} M$ або M^0.

Означення. Точка $x \in X$ називається *межовою точкою* множини $M \subseteq X$, якщо довільний окіл точки x містить точки з M та $X \setminus M$.

Означення. Сукупність межових точок множини $M \subseteq X$ називається *межею* множини M і позначається $\mathrm{fr} M$ або ∂M.

З означення випливає, що $\partial M = \overline{M} \bigcap \overline{X \setminus M}$.

Розглянемо докладніше комплексну площину $\mathbb{C}$.

Означення. δ-околом точки $z_0 \in \mathbb{C}$ називається множина точок комплексної площини $U(z_0, \delta) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \delta\}$.

Іншими словами, δ-окіл – це множина точок z комплексної площини $\mathbb{C}$, які лежать усередині круга радіусом δ із центром у точці z_0. Отже, довільна точка z має нескінченну кількість околів.

Аналогічно δ-околом точки $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$ називається множина $U(z_0, \delta) = \{z \in \mathbb{C} : \rho(z, z_0) < \delta\}$.

Проколотим δ-околом точки $z_0 \in \mathbb{C}$ будемо називати множину $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < \delta\}$.

Означення. Множина $G \subseteq \overline{\mathbb{C}}$ називається *відкритою множиною*, якщо для довільної точки $z_0 \in G$ існує такий δ-окіл $U(z_0, \delta)$, що

$U(z_0,\delta) \subseteq G$.

Система всіх підмножин, що задовольняють означення відкритої множини, утворює топологічну структуру на розширеній комплексній площині $\overline{\mathbb{C}}$. Для конкретної комплексної площини основні топологічні поняття можна уточнити, скориставшись δ-околами.

Означення. Точка $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$ називається *граничною точкою* множини $E \subseteq \overline{\mathbb{C}}$, якщо $\forall \delta > 0$ множина $E \bigcap U(z_0,\delta)$ містить точки з E, відмінні від z_0.

Це означення еквівалентне тому, що довільний окіл граничної точки z_0 містить нескінченну кількість точок E. Дійсно, якби в деякому околі точки z_0 знаходилася лише скінченна кількість точок з E, відмінних від z_0, то одна з них була б найближчою до z_0. Нехай це точка a. Тоді в околі $U(z_0,\delta)$, де $0 < \delta < \rho(a, z_0)$, не містилося б жодної точки з E, що суперечить прийнятій умові.

Означення. Областю в комплексній площині називається відкрита множина точок, яка має таку властивість: дві її довільні точки можна з'єднати ламаною, складеною тільки з точок цієї множини.

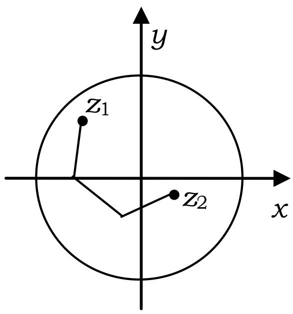
Розглянемо деякі приклади множин, які є областями.

1. Множина $|z| < 1$ є областю. Вона відкрита, тому що її точки лежать усередині круга з одиничним радіусом, обмеженого колом (без границі), і для всіх точок існують околи, які належать кругу. Друга властивість очевидна. Отже, ця множина є областю (рис. 1.16).

2. Множина $|z-3| < 5$ теж буде областю.

3. Множина $|z| \le 1$ не буде областю, оскільки вона замкнена, тому що для точок, що лежать на колі $|z| = 1$, не можна побудувати відповідні околи.

4. Областю також не буде множина точок, складена з точок двох кругів $|z| < 1$ та $|z-2| < 1/2$ (рис. 1.17), оскільки не буде виконуватись друга вимога означення.



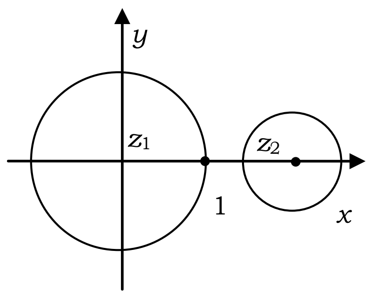


Рис. 1.16 Рис. 1.17

5. Областю не буде й множина точок z, яка визначена сукупністю нерівностей $|z|<1$ та $2<|z|<3$ (рис. 1.18), оскільки жодну точку круга $|z|<1$ не можна сполучити з точками кільця $2<|z|<3$ ламаною, яка б складалась тільки з точок даної множини.

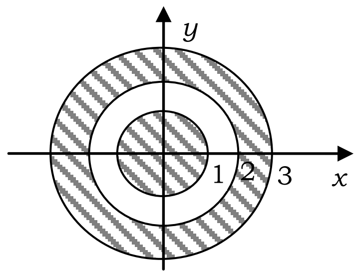


Рис. 1.18

Означення. Непорожню множину комплексних чисел $E \subseteq \mathbb{C}$ назвемо *обмеженою множиною*, якщо існує такий круг $K_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| \le R\}$ $(0 < R < +\infty)$, що $E \subseteq K_R$.

Означення. Діаметр непорожньої множини $E \subseteq \mathbb{C}$ визначається за формулою $d(E) = \sup\limits_{\substack{z \in E, \\ \xi \in E}} |z - \xi|$.

З означення випливає, що діаметр непорожньої множини $E \subseteq \mathbb{C}$ може бути невід'ємним дійсним числом або $+\infty$. Якщо $E \subseteq F$, то $d(E) \le d(F)$. Рівність $d(E) = 0$ має місце лише тоді, коли множина E одноточкова. Множина $E \subseteq \mathbb{C}$ обмежена тоді й тільки тоді, коли $d(E) < +\infty$.

Означення. Відстанню між множинами E_1 та E_2 називається величина $\rho(E_1, E_2) = \inf\limits_{\substack{z_1 \in E_1, \\ z_2 \in E_2}} |z_1 - z_2|$.

Якщо множина $E_1 = \{z\}$ одноточкова, то замість $\rho(E_1, E_2)$ пишемо $\rho(z, E_2)$.

Якщо $A \cap B \ne \varnothing$, то $\rho(A, B) = 0$, але $\rho(A, B) = 0 \;\;\not\Rightarrow\;\; A \cap B \ne \varnothing$. Пропонуємо читачеві навести відповідний приклад.

Означення. Множина $E \subseteq \overline{\mathbb{C}}$ називається *компактною*, якщо довільна нескінченна підмножина $A \subseteq E$ має принаймні одну граничну точку.

Означення. Множина $E \subseteq \overline{\mathbb{C}}$ називається *компактом*, якщо довільна нескінченна підмножина $A \subseteq E$ має принаймні одну граничну точку, що належить E.

Пропонуємо читачеві довести, що компакт $E \subseteq \overline{\mathbb{C}}$ є замкненою множиною, а компактна множина $E \subseteq \mathbb{C}$ – ще й обмеженою.

Теорема Кантора. Спадна послідовність непорожніх замкнених підмножин $E_1 \supseteq E_2 \supseteq E_3 \supseteq \ldots \supseteq E_n \supseteq \ldots$ компактної множини E має непорожній перетин.

◁ Не обмежуючи загальності, будемо вважати, що маємо лише попарно різні множини, яких існує нескінченна кількість. Інакше теорема очевидна. Отже, $E_k \setminus E_{k+1} \neq \varnothing$ та існує точка $a_k \in E_k$ така, що $a_k \notin E_{k+1}$, $(k = 1, 2, \ldots)$. Згідно з компактністю E множина точок $M = \{a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots\}$ має граничну точку $a \in E$, яка є граничною для всіх множин E_k, оскільки у протилежному випадку, якщо $a_k \notin E'_{k_0}$, то в деякому її околі U_a міститься лише скінченна кількість точок з E_{k_0} (як це доведено раніше) і, отже, – скінченна кількість точок з M, що суперечить означенню точки a. Згідно із замкненістю E_k точка $a \in E_k$, $(k = 1, 2, ..)$ і, оскільки $a \in \bigcap\limits_k E_k$, то $\bigcap\limits_k E_k \neq \varnothing$ ▷

Означення. Скінченна або зліченна системи $G = \{G_k\}$ відкритих множин називаються *відкритим покриттям* множини $E \subseteq \overline{\mathbb{C}}$, якщо кожна точка $z \in E$ належить принаймні одній із множин системи G, тобто $E \subseteq \bigcup\limits_k G_k$.

Лема Гейне – Бореля. З довільного зліченного покриття $G = \{G_k\}$ компакта $E \subseteq \overline{\mathbb{C}}$ можна виділити скінченне покриття цієї множини.

◁ Якщо покриття $G = \{G_k\}$ є зліченним покриттям компакта $E \subseteq \overline{\mathbb{C}}$, то множини $E_n = E \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{n} G_k$ замкнені й утворюють спадну послідовність таку, що $\bigcap\limits_k E_k = \varnothing$. Це можливо лише в тому випадку, коли для деякого n_0 множина $E_{n_0} = \varnothing$ (див. теорему Кантора), тобто

$E \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{n_0} G_k = \varnothing$. Це означає, що $E \subseteq \bigcup\limits_{k=1}^{n_0} G_k$ $\triangleright$

1.9. Послідовності комплексних чисел

Означення. Числовою послідовністю $\{z_n\}$ у комплексній площині називається відображення множини цілих невід'ємних чисел у комплексну площину.

Послідовність $\{z_n\}$ – це комплекснозначна функція, визначена на множині цілих невід'ємних чисел. Числа, які входять до послідовності, називаються її елементами. Послідовність має нескінченну кількість елементів. Елементи послідовності не обов'язково мають бути різними. Наприклад, $\left\{\frac{1}{2}+i, 0, 1, 0, 2-i, 0, \frac{i}{2}, \ldots\right\}$.

Означення. Послідовність $\{z_n\}$ називається *обмеженою,* якщо існує таке скінченне число $R>0$, що для всіх n $(n=0,1,2,\ldots)$ виконується умова $|z_n|<R$. Геометрично це відповідає тому, що всі елементи даної послідовності можна розмістити всередині круга з центром у точці $z=0$ зі скінченним радіусом R.

Означення. Граничною точкою послідовності $\{z_n\}$ називається точка a така, що $\forall \varepsilon>0$ в околі $U(a,\varepsilon)$ знаходиться нескінченна кількість елементів послідовності.

Якщо послідовність $\{z_n\}$ має єдину граничну точку a, то кажуть, що послідовність $\{z_n\}$ *збігається* до точки a, або точка a є *границею послідовності* $\{z_n\}$.

Те, що точка z_0 є границею послідовності $\{z_n\}$, позначимо $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$, або $z_n \underset{n\to\infty}{\to} z_0$. Якщо задано послідовність комплексних чисел, то її збіжність і розбіжність рівносильні існуванню єдиної граничної точки та, відповідно, відсутності або існуванню кількох граничних точок. Наприклад, розбіжна послідовність $\left\{\frac{i}{2}, 0, \frac{2i}{3}, 0, \frac{3i}{4}, 0, \frac{4i}{5}, 0, \ldots\right\}$ має дві граничні точки: 0 та i.

Теорема Больцано – Вейєрштрасса. Довільна обмежена послідовність комплексних чисел має в $\mathbb{C}$ принаймні одну граничну точку.

$\triangleleft$ Оскільки послідовність обмежена, то всі її елементи $\{z_n\}$ можна розмістити всередині круга $|z|<R$. Опишемо навколо цього круга квадрат D, сторони якого паралельні координатним осям. Розіб'ємо

квадрат на чотири рівні частини прямими, паралельними сторонам квадрата. Тоді принаймні в одному з нових квадратів буде міститися нескінченна кількість елементів даної послідовності. Позначимо цей квадрат через D_1 і розіб'ємо його на чотири рівних квадрати тим самим способом. Виділимо з нової четвірки той квадрат, у якому міститься нескінченна множина елементів послідовності, і продовжимо процес далі. У результаті, після n кроків, одержимо послідовність квадратів, які мають такі властивості: а) кожен з них містить нескінченну кількість елементів послідовності $\{z_n\}$; б) кожен попередній містить у собі наступний $D_{n+1} \subset D_n$; в) діагоналі квадратів прямують до нуля при $n \to \infty$.

Спроектуємо кожен із квадратів на координатні осі. Одержимо дві послідовності вкладених відрізків: $\{d_n(x)\}$ – на осі Ox та $\{d_n(y)\}$ – на осі Oy. Очевидно, що довжини цих відрізків прямують до нуля при $n \to \infty$. Кожна з послідовностей має єдину спільну точку для всіх відрізків. Позначимо її координати через ξ на осі Ox та η – на осі Oy. Покажемо, що точка $\varsigma = \xi + i\eta$ є граничною для послідовності $\{z_n\}$. Для цього введемо окіл $U(\varsigma, \varepsilon) = \{z : |z - \varsigma| < \varepsilon\}$. Починаючи з деякого номера N, усі побудовані квадрати D_n, $(n = N+1, N+2, \ldots)$ містяться всередині околу $U(\varsigma, \varepsilon)$, тобто $D_n \subset U(\varsigma, \varepsilon)$. А оскільки в D_n міститься нескінченна кількість елементів даної послідовності, то й окіл $U(\varsigma, \varepsilon)$ також містить нескінченну їх кількість. Отже, за визначенням, точка ς є граничною для послідовності $\{z_n\}$ ▷

Зазначимо, що взагалі в топологічному просторі поняття обмеженої множини не має змісту. Його заміняє поняття компактності. При цьому зберігаються основні властивості простору, які характеризуються теоремою.

Теорема У розширеній комплексній площині $\overline{\mathbb{C}}$ довільна послідовність $\{z_n\}$, $z_n \in E \subseteq \overline{\mathbb{C}}$ має принаймні одну граничну точку.

◁ Дійсно, якщо послідовність обмежена, то існування граничної точки випливає з теореми Больцано – Вейєрштрасса для множини $\mathbb{R}^2$. Якщо ж множина $\{z_n\}$ не обмежена та в її скінченній частині може не існувати граничної точки, то існує таке достатньо велике додатне число R, що зовнішність круга $|z| > R$ (тобто окіл нескінченно віддаленої точки) містить нескінченну кількість членів послідовності, а отже, і граничну точку ▷

Таким чином, в евклідовій площині (x, y) можуть існувати послідовності, які не мають граничної точки, тоді як у розширеній комплексній площині довільна послідовність має граничну точку.

Розширена комплексна площина є *компактом.*

Критерій Коші. Для того, щоб послідовність $\{z_n\}$ була збіжною, необхідно й достатньо, щоб $\forall \varepsilon > 0$ існував номер $n_0 \in \mathbb{N}$ такий, що $\forall n' \geq n_0$ і $\forall n'' \geq n_0$ $|z_{n'} - z_{n''}| < \varepsilon$.

◁ *Необхідність.* Нехай послідовність $\{z_n\}$ збігається до деякої точки z_0. Це означає, що $\forall \varepsilon > 0$, $\exists$ номер $n_0(\varepsilon) \in N$ такий, що при $n > n_0$ виконується нерівність $|z_n - z_0| < \frac{\varepsilon}{2}$. Ця нерівність буде вірною і $\forall n' \geq n_0$ та $\forall n'' \geq n_0$, тобто $|z_{n'} - z_0| < \frac{\varepsilon}{2}$ та $|z_{n''} - z_0| < \frac{\varepsilon}{2}$. Оскільки

$$|z_{n'} - z_{n''}| = |(z_{n'} - z_0) - (z_{n''} - z_0)| \leq |z_{n'} - z_0| + |z_{n''} - z_0| < \varepsilon,$$

то необхідність доведено.

Достатність. Припустимо, що умова теореми виконується, тобто всі точки даної послідовності $\{z_n\}$, починаючи з номера $n = n_0 + 1$, потрапляють у ε-окіл точки $z_{n''}$. Тоді ця послідовність обмежена і, за теоремою Больцано – Вейєрштрасса, має принаймні одну граничну точку. Доведемо, що ця послідовність не може мати більше ніж одну граничну точку. Припустимо від супротивного, що вона має дві граничні точки: z_0 і z_0'. Якщо так, то можна підібрати дві збіжні підпослідовності: $z_{n_k} \to z_0$ та $z_{n_k'} \to z_0'$. Це означає, що при достатньо великих n_k та n_k' виконуються нерівності $|z_{n_k} - z_0| < \varepsilon'$ та $|z_{n_k'} - z_0'| < \varepsilon'$. Позначимо $r = |z_0 - z_0'|$. Оскільки точки z_0 та z_0' належать ε-околу точки $z_{n''}$, то виберемо $\varepsilon' = \frac{r}{3}$. Урахувавши наведені вище нерівності, одержимо

$$r = |z_0 - z_0'| = \left|(z_0 - z_{n_k}) + (z_{n_k} - z_{n_k'}) + (z_{n_k'} - z_0')\right| \leq$$

$$\leq |z_0 - z_{n_k}| + |z_{n_k} - z_{n_k'}| + |z_{n_k'} - z_0'|.$$

Звідси

$$3\varepsilon' - |z_0 - z_{n_k}| + |z_{n_k'} - z_0'| < |z_{n_k} - z_{n_k'}|,$$

або

$$\varepsilon < |z_{n_k} - z_{n_k'}|$$

для всіх як завгодно великих номерів n_k та n_k'. Одержане протиріччя доводить теорему ▷

Означення. Якщо послідовність не є збіжною, то її прийнято називати *розбіжною послідовністю.*

Означення. Послідовність називають *необмеженою*, якщо не можна вказати таке скінченне число $R>0$, що для всіх членів послідовності виконується нерівність $|z_n|<R$.

Якщо необмежена послідовність розбіжна в $\mathbb{C}$, нескінченна точка є граничною до неї, то кажуть, що послідовність збігається до нескінченності й пишуть $\lim\limits_{k\to\infty} z_k=\infty$. Остання рівність означає, що $\forall\beta>0$ існує $N=N(\beta)$ таке, що коли $n>N$, то $|z_n|>\dfrac{1}{\beta}=R$.

Використання стереографічної проекції дозволяє проілюструвати зміст граничної нескінченно віддаленої точки. Для цього послідовність точок комплексної площини $\{z_n\}$ відобразимо в послідовність точок $\{M_k=(\xi_k,\eta_k,\varsigma_k)\}$ на сфері Рімана за допомогою формул

$$\xi_k=\frac{x_k}{1+|z_k|^2},\ \eta_k=\frac{y_k}{1+|z_k|^2},\ \varsigma_k=\frac{|z_k|^2}{1+|z_k|^2}.$$

Оскільки $|x_k|\le|z_k|$ та $|y_k|\le|z_k|$, то при $z_k\to\infty$ $\xi_k\to0$, $\eta_k\to0$, а $\varsigma_k\to1$. Послідовність $\{M_k=(\xi_k,\eta_k,\varsigma_k)\}$ точок – образів послідовності $\{z_n\}$ – збігається до точки $P=(0,0,1)$. Очевидно, що образом околу $|z_n|>\dfrac{1}{\beta}$ на сфері Рімана є сферичний окіл точки P з достатньо малим радіусом $\varepsilon=\dfrac{\beta}{\sqrt{1+\beta^2}}\underset{\beta\to0}{\to}0$.

Означення. Послідовність $\{z_n\}$ називають *фундаментальною* або *послідовністю Коші*, якщо $\forall\varepsilon>0$ існує натуральне число $N(\varepsilon)$ таке, що $|z_{N+k}-z_N|<\varepsilon$ для довільного натурального k.

Очевидно, що, використовуючи поняття фундаментальної послідовності, критерій Коші можна сформулювати так.

Теорема Для збіжності послідовності $\{z_n\}$ необхідно й достатньо, щоб вона була фундаментальною.

Запишемо кожен член послідовності $\{z_n\}$ у вигляді $z_n=x_n+iy_n$. Тоді існування її границі визначається такою теоремою.

Теорема 1. Послідовність $\{z_n\}$ має своєю границею число $c=a+ib$ тоді й тільки тоді, коли існують границі $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ та $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=b$.

◃ *Необхідність.* Нехай існують границі послідовностей дійсних та уявних частин послідовності $\{z_n\}$. Тоді з критерію Коші збіжності послідовностей $\{x_n\}$ та $\{y_n\}$ випливає $|x_m - x_k| < \varepsilon$ та $|y_m - y_k| < \varepsilon$ при $m > n$ та $k > n$.

Використовуючи очевидну нерівність

$$|z_m - z_k| = \sqrt{(x_m - x_k)^2 + (y_m - y_k)^2} < \varepsilon' = \varepsilon\sqrt{2},$$

установлюємо збіжність послідовності $\{z_n\}$.

Достатність. За критерієм Коші, зі збіжності послідовності $\{z_n\}$ при $m > n$ та $k > n$ маємо $|z_m - z_k| = \sqrt{(x_m - x_k)^2 + (y_m - y_k)^2} < \varepsilon'$. Ця нерівність виконується, коли $|x_m - x_k| < \varepsilon$ та $|y_m - y_k| < \varepsilon$. Отже, послідовності $\{x_n\}$ та $\{y_n\}$ – збіжні ▹

Зауважимо, що при дослідженні послідовності комплексних чисел $z_n = x_n + iy_n$ в околі точки $z = \infty$ недоцільно використовувати позначення $x + i\infty$ чи $\infty + iy$ при скінченних значеннях x або y, оскільки в комплексній площині існує тільки одна нескінченно віддалена точка. Запис такого вигляду може бути виправданим лише у випадку, коли необхідно вказати напрямок руху до нескінченно віддаленої точки.

Використовуючи доведену вище теорему, легко довести таке твердження.

Теорема З довільної обмеженої послідовності комплексних чисел $\{z_n\}$ можна виділити збіжну підпослідовність.

◃ Оскільки послідовність $\{z_n\}$ обмежена, то відповідні до неї дійсні $\{x_n\}$ та уявні $\{y_n\}$ частини теж обмежені. А як відомо, з обмеженої підпослідовності дійсних чисел можна виділити збіжну підпослідовність. Отже, існують збіжні послідовності $x_{n_k} \to x$ та $y_{n_k} \to y$. Тоді з попередньої теореми випливає, що існує збіжна підпослідовність $z_{n_k} = x_{n_k} + iy_{n_k} \to x + iy$ ▹

Теорема Якщо $z_0 \,(= \infty) \in A'$, то в A можна побудувати послідовність $\{z_n\}$, яка збігається до z_0.

◃ Побудуємо послідовність множин

$$B_n = A \bigcap \left\{ z : |z - z_0| < \frac{1}{n},\ n = 1, 2, \ldots \right\},$$

яка для довільного n містить нескінченну множину точок з A. У кожній з B_n виберемо точку z_n $(n = 1, 2, \ldots)$. Одержана послідовність є шуканою, оскільки при достатньо великому n і для околу $U(z_0, \varepsilon)$ множина $\{z : |z - z_0| < \varepsilon\} \subset U(z_0, \varepsilon)$ ▹

Якщо кожен елемент послідовності $\{z_n\}$ записати в показниковій формі $z_n = |z_n| e^{i \arg z_n}$, то необхідну й достатню умову збіжності $\{z_n\}$ можна сформулювати у вигляді теореми.

Теорема Послідовність $\{z_n\}$ має своєю границею число $c = |c| e^{i\alpha}$ тоді й тільки тоді, коли існують границі $\lim\limits_{n\to\infty} |z_n| = |c|$ та $\lim\limits_{n\to\infty} \arg z_n = \alpha$.

◃ Доведення цієї теореми випливає з визначення модуля та аргументу комплексного числа, вдалого вибору гілки аргументу та вищедоведеної теореми ▹

При довільному виборі гілки $\arg z_n$ послідовність $\{\arg z_n\}$ може виявитись незбіжною. Наприклад, границя послідовності $z_n = -1 + i\dfrac{(-1)^n}{n^4}$ існує, $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = -1$, а послідовність $\{\arg z_n\}$ може бути розбіжною. Дійсно, виділивши з послідовності z_n дві підпослідовності $z_{2n} = -1 + i\dfrac{1}{16n^4}$ та $z_{2n-1} = -1 + i\dfrac{-1}{(2n-1)^4}$, маємо $\lim\limits_{n\to\infty} \arg z_{2n} = \pi$, а $\lim\limits_{n\to\infty} \arg z_{2n-1} = -\pi$. Послідовність $\{\arg z_n\}$ має дві границі, а отже, вона розбіжна. Проте $e^{i\pi} = e^{-i\pi}$. Цей, як здається на перший погляд, парадокс пояснюється введеним визначенням функції $\arg z$, яка має розрив при прямуванні z до від'ємної дійсної півосі зверху та знизу.

З доведеної теореми випливає, що дослідження послідовностей комплексних чисел зводиться до дослідження відповідних пар послідовностей дійсних чисел. Крім того, має місце таке твердження.

Теорема Нехай $\{z_n\}$ та $\{z'_n\}$ – збіжні послідовності комплексних чисел. Тоді їх сума $\{z_n \pm z'_n\}$, добуток $\{z_n z'_n\}$ і частка $\left\{\dfrac{z_n}{z'_n}\right\}$ (якщо $z_n \neq 0$ для всіх натуральних n і $\lim\limits_{n\to\infty} z_n \neq 0$) також є збіжними послідовностями, причому

$$\lim_{n\to\infty} \{z_n \pm z'_n\} = \lim_{n\to\infty} z_n \pm \lim_{n\to\infty} z'_n; \quad \lim_{n\to\infty} \{z_n \cdot z'_n\} = \lim_{n\to\infty} z_n \cdot \lim_{n\to\infty} z'_n;$$

$$\lim_{n\to\infty} \left\{\frac{z_n}{z'_n}\right\} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} z_n}{\lim\limits_{n\to\infty} z'_n}.$$

Доведення теореми випливає безпосередньо з доведених теорем 1 та 2, а також відповідної теореми про границю суми добутку та частки для послідовностей дійсних чисел.

У деяких випадках корисним є таке твердження.

Теорема Якщо множина комплексних чисел має тільки одну граничну точку a, то ця множина зліченна та її можна записати у вигляді послідовності $a_1, a_2, \ldots$, для якої $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

$\triangleleft$ Доведення теореми проведемо для випадку $a = \infty$, оскільки проведені міркування легко переносяться на випадок скінченного значення a.

Нехай A – нескінченна множина з однією граничною точкою $a = \infty$. Позначимо через $U(\infty, \varepsilon)$ окіл нескінченно віддаленої точки, який є зовнішністю круга $|z| > \dfrac{1}{\varepsilon}$ при довільно малому $\varepsilon > 0$. Тоді поза околом $U(\infty, \varepsilon)$ (усередині круга $|z| < \dfrac{1}{\varepsilon} = R$) лежить тільки скінченна множина точок A, оскільки в іншому випадку ця множина мала б граничну точку, відмінну від нескінченності. Отже, усередині кожного круга з центром у нулі може лежати лише скінченна кількість елементів множини A. Виберемо довільну послідовність чисел $r_1 < r_2 < \ldots$ так, що $r_n \to \infty$ при $n \to \infty$, і розіб'ємо розширену комплексну площину на послідовність областей. Першою областю будемо вважати круг $|z| < r_1$, другою – кільце $r_1 \le |z| < r_2$ і т. д. (рис. 1.19). Відповідно до цих областей віднесемо підмножини $A_1, A_2, \ldots$ точок множини A, які лежать у відповідних областях площини. У кожній з підмножин може бути лише скінченна кількість елементів множини A. Зрозуміло, що точки, які входять у підмножини $A_1, A_2, \ldots$, можна якимось чином занумерувати. Звідси випливає, що множина A – зліченна.

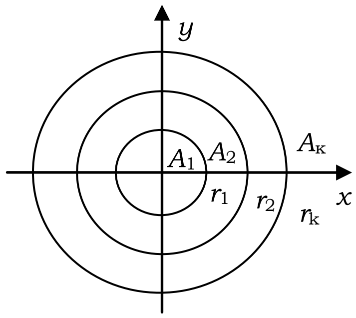


Рис. 1.19

Пронумеруємо скінченні точки в порядку зростання їх модулів, а скінченну кількість нескінченно віддалених точок розмістимо на початку послідовності. Якщо $\infty \in A$, то покладемо $a_0 = \infty$ ▹

1.10. Числові ряди, нескінченні добутки й нескінченні визначники

1.10.1. Поняття числового ряду та його збіжність

Рядом комплексних чисел називається нескінченна сума

$$z_1 + z_2 + \ldots z_n + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} z_k\,, \qquad (1.20)$$

де $z_k = x_k + iy_k$ – комплексні числа. Сума n перших членів числового ряду (1.20) $s_n = z_1 + z_2 + \ldots + z_n$ називається його *частинною сумою*. Будемо говорити, що *ряд збіжний*, якщо послідовність частинних сум збіжна, тобто якщо існує скінченна границя послідовності частинних сум

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} (z_1 + z_2 + z_3 + \ldots + z_n) = S\,.$$

У протилежному випадку ряд називається *розбіжним*. Число S називається *сумою ряду*[1].

З означення збіжності послідовностей $\{s_n\}$ випливає, що ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} z_k$ збігається тоді й тільки тоді, коли збігаються два ряди: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ та $\sum\limits_{k=1}^{\infty} y_k$.

Далі наведемо лише формулювання основні теореми про збіжність числових

[1] Необхідно зазначити, що у сучасній математиці, поряд з уведеним поняттям суми ряду уводиться поняття суми у різних узагальнених розуміннях. Це дозволяє обчислювати узагальнені суми рядів, які у звичайному розумінні є розбіжними.

рядів, оскільки хід доведення цих теорем співпадає з доведенням даним у курсі математичного аналізу для рядів дійсних чисел.

Якщо суми цих рядів позначити через U та V, то сума ряду (1.20) буде рівною $S = U + iV$.

Критерій збіжності ряду можна одержати з критерію Коші для збіжних послідовностей частинних сум s_n і сформулювати у вигляді такої теореми.

Теорема. Для збіжності ряду (1.20) необхідно й достатньо, щоб $\forall \varepsilon > 0$ існував такий номер $N = N(\varepsilon)$, для якого при довільних $n > N$ і $k > 0$ виконується нерівність $|z_{n+1} + z_{n+2} + \ldots z_{n+k}| < \varepsilon$.

З теореми випливає, що для збіжності ряду (1.20) необхідно, щоб загальний член ряду прямував до нуля зі зростанням номера.

Дійсно, оскільки $s_n \to S$ і $s_{n+1} \to S$ при $n \to \infty$, то $s_{n+1} - s_n = z_{n+1} \to 0$ при $n \to \infty$. Нагадаємо, що додавання чи відкидання скінченної кількості членів ряду не впливає на його збіжність.

Якщо ряд складається тільки з додатних членів, то важливою його властивістю є те, що його частинні суми s_n є зростаючими функціями змінної n. Для таких рядів вірна така теорема.

Теорема. Для збіжності ряду з додатними членами необхідно й достатньо, щоб послідовність його частинних сум була обмеженою.

Важливим інструментом для дослідження рядів з додатними членами є ознаки порівняння, які формулюються у вигляді твердження.

Теорема. Нехай $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ і $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ – ряди з додатними членами та для всіх k (або, принаймні, починаючи з деякого номера N) виконується умова $a_k \le b_k$. Тоді збіжність ряду $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ тягне за собою збіжність ряду $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$, а розбіжність ряду $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ приводить до розбіжності ряду $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$.

Теорема залишається вірною й тоді, коли для деякого $c > 0$ виконується умова $a_k \le c b_k$.

Наслідком з теореми є таке твердження: якщо $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ – ряд з невід'ємними членами, а $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ – зі строго додатними та існує скінченна границя $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{a_k}{b_k} = L$, то збіжність ряду $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ гарантує збіжність ряду $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$, а розбіжність ряду $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ – розбіжність ряду $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$.

Безпосередньо з ознак порівняння рядів випливають ознаки Коші та Д'Аламбера збіжності рядів з додатними членами. В їх основу покладено порівняння досліджуваних рядів з нескінченно спадною геометричною прогресією або розбіжним рядом, складеним з одиниць.

Ознаки Д'Аламбера:

1. Якщо для всіх номерів k або, принаймні, починаючи з деякого номера k, вірна нерівність $\dfrac{a_{k+1}}{a_k} \le q < 1$ $\left(\dfrac{a_{k+1}}{a_k} \ge 1\right)$, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ збігається (розбігається).

2. Якщо існує границя $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{a_{k+1}}{a_k} = M$, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ збігається при $M < 1$ і розбігається при $M > 1$.

Зазначимо, що в першій ознаці нерівність $\frac{a_{k+1}}{a_k} \le q < 1$ (починаючи з деякого номера k) не можна замінити на нерівність $\frac{a_{k+1}}{a_k} < 1$.

Ознаки Коші:

1. Якщо для всіх номерів k або, принаймні, починаючи з деякого номера, вірна нерівність $\sqrt[k]{a_k} \le q < 1$ $\left(\sqrt[k]{a_k} \ge 1\right)$, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ збігається (розбігається).

2. Якщо існує границя $\lim\limits_{k \to \infty} \sqrt[k]{a_k} = M$, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ збігається при $M < 1$ і розбігається при $M > 1$.

Зауважимо: якщо при дослідженні ряду з ознак Коші або Д'Аламбера встановлено виконання умов розбіжності, то загальний член цього ряду не прямує до нуля.

Виникає бажання встановити ознаки, які давали б більш точні умови збіжності рядів з додатними членами. Такими є інтегральна ознака Коші – Маклорена та ознаки Раабе. Вони ґрунтуються на порівнянні досліджуваних рядів з узагальненим гармонічним рядом $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}}$.

Інтегральна ознака Коші – Маклорена. Нехай функція $f(x)$ невід'ємна й не зростає на півпрямій $x \ge m$, де $m \ge 0$. Числовий ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f(k)$ збігається тоді й тільки тоді, коли існує границя числової послідовності $a_n = \int\limits_m^n f(x)dx$ при $n \to \infty$.

Ознаки Раабе:

1. Якщо для всіх номерів k або, принаймні, починаючи з деякого номера $k > N$, виконується нерівність $k\left(1 - \frac{a_{k+1}}{a_k}\right) \ge q > 1$ $\left(k\left(1 - \frac{a_{k+1}}{a_k}\right) \le 1\right)$, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ збігається (розбігається).

2. Якщо існує границя $\lim\limits_{k \to \infty} k\left(1 - \frac{a_{k+1}}{a_k}\right) = M$, то при $M > 1$ ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ збігається, а при $M < 1$ – розбігається.

При дослідженні збіжності числових рядів корисне таке твердження: якщо послідовність додатних чисел $\{a_k\}$ збігається до деякого числа M, то до тієї самої границі збігається й послідовність їх середніх геометричних $b_k = \sqrt[k]{a_1 a_{2.} \cdots a_k}$.

Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} z_k$ називається *абсолютно збіжним*, якщо збігається ряд, складений з модулів його членів, тобто ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |z_k|$ є збіжним.

Усі наведені вище ознаки збіжності рядів з додатними членами вірні й для абсолютно збіжних рядів.

Теорема. Для абсолютної збіжності ряду комплексних чисел необхідно й достатньо, щоб абсолютно збігалися ряди, складені з дійсних і уявних частин членів ряду (1.25).

Твердження теореми випливає з означення збіжності та умови рівності комплексних чисел.

Зі збіжності ряду $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |z_k|$ випливає збіжність ряду $\sum\limits_{k=1}^{\infty} z_k$, але не навпаки.

Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ називається *умовно збіжним рядом*, якщо сам він збіжний, але ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |z_k|$ розбігається.

Наведемо еквівалентне означення абсолютно збіжного ряду. Ряд називається *абсолютно збіжним*, якщо він збігається й залишається збіжним до тієї самої суми при довільній перестановці його членів.

Очевидно, що з абсолютно збіжного ряду (1.20) можна виділити нескінченну кількість нових рядів

$$\begin{cases} z_{1,1} + z_{1,2} + \ldots z_{1,n} + \ldots = S_1, \\ z_{2,1} + z_{2,2} + \ldots z_{2,n} + \ldots = S_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases} \qquad (1.21)$$

побудованих так, що кожен член ряду (1.20) може входити тільки в один з утворених рядів. Такий процес називають *розвиненням ряду*.

Теорема про суму сум рядів (про подвійні ряди). Якщо ряд (1.20) збігається абсолютно і його сума дорівнює S, то кожен з рядів (1.21) збігається абсолютно до своєї суми, а ряд $S_1 + S_2 + \ldots S_k + \ldots$ абсолютно збіжний і його сума дорівнює S, тобто

$$\sum_{k=1}^{\infty} S_k = S \qquad (1.22)$$

або

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} z_{n_k} = S .$$

◁ Дійсно, ряди $\sum_{k=1}^{\infty} |z_{1k}|$, $\sum_{k=1}^{\infty} |z_{2k}|, \ldots \sum_{k=1}^{\infty} |z_{nk}|, \ldots$ збігаються, оскільки їх частинні суми не можуть бути більше одного й того самого числа $S = |z_1| + |z_2| + \ldots + |z_m| + \ldots$. Запишемо різницю

$$S - (S_1 + S_2 + \ldots + S_m) = z_{m_1} + z_{m_2} + \ldots ,$$

де $z_{m_1}, z_{m_2}, \ldots$ – члени ряду (1.25), які не увійшли в суми $S_1, S_2, \ldots, S_m$. Якщо зафіксуємо номер n, то при достатньо великих значеннях m члени з номерами $m_1, m_2, m_3, \ldots$ будуть більшими від n, отже,

$$|S - (S_1 + S_2 + \ldots + S_m)| \le |z_{m_1}| + |z_{m_2}| + \ldots = R_n ,$$

де R_n визначає оцінку зверху модуля залишкового члена. Оскільки n можна вибрати достатньо великим, то виберемо його таким, щоб R_n було як завгодно малим. Це дозволяє записати

$$\lim_{m \to \infty} |S - (S_1 + S_2 + \ldots + S_m)| = 0 .$$

Звідси випливає, що ряд (1.20) збіжний, а його сума дорівнює S. Абсолютна збіжність кожного ряду з (1.22)випливає з очевидних нерівностей

$$|S_l| \le |z_{l_1}| + |z_{l_2}| + \ldots . |z_{l_k}| + \ldots . < S , \; (l = 1, 2, \ldots) .$$

Це означає, що в (1.22) усі ряди абсолютно збіжні ▷

З доведеної теореми випливає наступне твердження.

Теорема. Якщо абсолютно збігаються ряди

$$z_1 + z_2 + \ldots = S_1 \text{ та } z_1' + z_2' + \ldots = S_1' , \qquad (1.23)$$

то ряд

$$z_1 z' + (z_1 z_2' + z_1' z_2) + (z_1 z_3' + z_2' z_2 + z_2 z_2' + z_1' z_3) + \ldots \qquad (1.24)$$

також збігається абсолютно, а його сума дорівнює добутку сум двох перших рядів.

◃ Переконаємося, що ряд, утворений із членів вигляду

$$z_1 z', \; z_1 z_2', \ldots, \; z_1 z_k' \;\; z_2 z_1', \; z_2 z_2', \ldots, \; z_2 z_k', \; z_m z_1', \; z_m z_2', .. \qquad (1.25)$$

абсолютно збігається. Для цього візьмемо довільну скінченну кількість N членів ряду (1.24). Сума їх модулів буде не більше добутку

$$\left(|z_1| + |z_2| + \ldots + |z_n|\right)\left(|z_1'| + |z_2'| + \ldots + |z_n'|\right),$$

де номер n більший від номерів усіх тих членів z_m та z_k' ряду (1.24), які входять у скінченні добутки вигляду (1.25). Крім того, ця сума не може бути більшою від числа ss', де $s = |z_1| + |z_2| + \ldots$, $s' = |z_1'| + |z_2'| + \ldots$

Легко бачити, що сума ряду, утвореного з членів вигляду (1.25), дорівнює сумі ряду (1.24) і, одночасно, за теоремою про суму рядів, вона дорівнює $s_1 + s_2 + \ldots. + s_n + \ldots$, де

$$s_1 = z_1 z_1' + z_1 z_2' + .z_1 z_3' + \ldots\ldots = z_1 s',$$
$$s_2 = z_2 z_1' + z_2 z_2' + .z_2 z_3' + \ldots. = z_2 s',$$
$$s_3 = z_3 z_1' + z_3 z_2' + .z_3 z_3' + \ldots. = z_3 s_1',$$

. . . .

Отже, шукана сума дорівнює

$$z_1 s' + z_2 s' + \ldots. z_n s' + \ldots. = \left(z_1 + z_2 + \ldots. z_n + \ldots.\right) s' = ss' \;▹$$

Наслідки. З доведених теорем випливає:

1) Абсолютно збіжний ряд (1.20) має властивості комутативності та асоціативності в розумінні перестановки та перегрупування його членів.

2) При довільному скінченному натуральному n збіжність чи розбіжність рядів $\sum\limits_{k=1}^{\infty} z_k$ та $\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} z_k$ визначається одними й тими самими умовами.

3) Якщо ряд (1.25) збігається і його сума дорівнює S, то $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda z_k$ збігається і його сума дорівнює λS.

4) Якщо $z_1 + z_2 + \ldots = S$, $z_1' + z_2' + \ldots = S'$, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(z_k \pm z_k'\right)$ збігається, а його сума дорівнює $S \pm S'$.

5) Якщо ряди $\sum\limits_{k=1}^{\infty} z_k$ та $\sum\limits_{k=1}^{\infty} z_k'$ абсолютно збігаються та їх суми відповідно дорівнюють S та S', то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(z_1 z_k' + z_2 z_{k-1}' + \ldots z_k z_1'\right)$ абсолютно збігаються, причому його сума дорівнює SS'.

Оскільки ряд (1.20) можна записати у вигляді суми двох рядів дійсних чисел $\sum\limits_{k=1}^{\infty} z_k = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \operatorname{Re} z_k + i \sum\limits_{k=1}^{\infty} \operatorname{Im} z_k = \sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k + i \sum\limits_{k=1}^{\infty} y_k$, то для дослідження рядів комплексних чисел доцільно використовувати критерії дослідження рядів дійсних чисел.

Ознака Діріхле. Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k v_k$ збіжний, якщо виконуються такі дві умови:

1) послідовність $\{v_k\}$ монотонна та нескінченно мала;

2) ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ має обмежену послідовність частинних сум.

Важливою для скінченної суми довільних чисел є *комутативна властивість*. Її мають і абсолютно збіжні ряди, але не умовно збіжні. Про вплив перестановок на суму умовно збіжного ряду свідчить доведена Ріманом теорема.

Теорема Рімана *(про вплив перестановок на суму умовно збіжного ряду).* Якщо ряд збігається умовно, то, яке б не було наперед задане число A, можна так переставити члени цього ряду, що перетворений ряд буде збіжним до числа A.

У деяких випадках умову збіжності ряду (1.20) розуміють в іншому смислі. Наприклад, кажуть, що ряд (1.20) підсумовується за методом (схемою) Чезаро, якщо існує скінченна границя $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(C,1) = S(C,1)$, де $S_n(C,1) = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} s_k}{n}$, s_k – частинні суми ряду (1.20), а $S(C,1)$ називають сумою ряду (1.20), підрахованою за Чезаро (або $(C,1)$-сумою).

Таке узагальнення не єдине. У літературі відомі також узагальнення підсумовування рядів за Гельдером (H,r) та за Ріссом (R,r).

1.10.2. Поняття про числові нескінченні добутки та визначники

Крім послідовностей і рядів, існують інші нескінченні процеси, які мають цілком певний зміст. Це, зокрема, нескінченні добутки та нескінченні визначники.

Поклавши, що жоден з множників не дорівнює нулю або нескінченності, *нескінченним добутком* комплексних чисел назвемо вираз

$$z_1 z_2 \cdots z_n \cdots = \prod_{n=1}^{\infty} z_n . \qquad (1.26)$$

Позначимо через P_n добуток перших n співмножників цього добутку: $P_n = z_1 z_2 \cdots z_n = \prod\limits_{k=1}^{n} z_k$. Якщо існує границя послідовності $\lim\limits_{n\to\infty} P_n = P \neq 0$, то кажуть, що *нескінченний добуток* (1.26) *збігається*, а число P називають його *добутком.*

Необхідною умовою збіжності нескінченного добутку є існування границі $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{P_n}{P_{n+1}} = 1$.

Використовуючи теорію рядів і нескінченних добутків, можна розвинути теорію нескінченних визначників. Розглянемо множину визначників порядку $2n+1$ $\det\left(a_{jk}\right)$, $(j,k = -n,\ldots -1,0,1,\ldots n)$ і позначимо $\det\left(a_{jk}\right) = D_n$. *Нескінченним визначником* називається визначник D, одержаний з D_n при $n \to \infty$. Кажуть, що нескінченний визначник збігається, якщо збігається послідовність $\{D_n\}$, а число $D = \lim\limits_{n\to\infty} D_n$ називають його значенням.

Детально питання збіжності та застосування нескінченних добутків, складених з функціональних множників, будуть досліджені для добутків аналітичних функцій.

ТЕМА II. ЗАГАЛЬНІ ПОЛОЖЕННЯ ТЕОРІЇ ФУНКЦІЙ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ. АНАЛІТИЧНІ ФУНКЦІЇ

2.1. Комплекснозначні функції дійсного аргументу

У теорії функцій комплексної змінної значну роль відіграє поняття шляху та кривої в комплексній площині. Це зумовлює необхідність приділяти значну увагу вивченню особливостей способів побудови різноманітних шляхів і кривих, установленню зв'язку поняття шляху з комплекснозначними функціями дійсного аргументу та дослідженню властивостей таких функцій.

2.1.1. Область, її зв'язність і межі

У розширеній комплексній площині розглянемо непорожню множину E.

Означення. Нехай E – довільна множина комплексних чисел. Величина $z = x + iy$, яка набуває довільного значення з E, називається *незалежною комплексною змінною*, визначеною на E. Інколи в такому разі кажуть, що комплексна змінна пробігає множину значень E.

Означення. Множина E називається *зв'язною*, якщо при розбитті її на підмножини E_1 та E_2 (жодна з яких не є порожньою множиною) хоча б одна з них містить принаймні одну граничну точку іншої множини. При цьому порожня множина та множина, яка складається з однієї точки, теж вважаються зв'язними.

Як відомо з курсу математичного аналізу, довільна зв'язна множина на прямій є відрізком.

Існує й інше еквівалентне означення зв'язної множини.

Очевидно, що зв'язність відкритої множини можна визначити, користуючись таким критерієм: відкрита непорожня множина $E \subset \overline{\mathbb{C}}$ зв'язна тоді й тільки тоді, коли дві її довільні точки можна з'єднати ламаною зі скінченною кількістю ланок, які повністю складаються з точок даної множини.

Використовуючи поняття зв'язності, означення області (див. п.1.8) можна сформулювати так.

Означення. Областю в комплексній площині називають довільну відкриту зв'язну множину.

Наприклад: кільце $1 \le |z| \le 2$ є множиною зв'язною, але вона не відкрита, отже, вона не область; круг $|z| < 2$ – це відкрита зв'язна множина. Отже, ця множина є областю.

Означення. Межею області D назвемо точки, які є граничними точками цієї області, але їй не належать. Такі точки будемо позначати одним із символів γ, Γ, C або ∂D.

Наприклад, для області $|z| < 1$ точки кола $|z| = 1$ граничні, але області не належать – для цієї області вони утворюють межу.

Множина граничних точок області D замкнена. (Це твердження ми пропонуємо читачам довести самостійно.)

Означення. Замкнена зв'язна множина простору E називається *континуумом.*

Означення. Кривою Кантора (або *лінійним континуумом*) називають замкнену зв'язну множину, що не містить внутрішніх точок.

Замкнений круг $|z| \le 1$ не буде кривою Кантора, тому що містить внутрішні точки. Круг з виколотою точкою $z = 0$, наприклад $0 < |z| < 1$, теж не буде кривою Кантора, оскільки він містить внутрішні точки $\bar{E}$, а одиничне коло $|z| = 1$ є кривою Кантора.

Якщо межа області складається з одного лінійного континуума, то обмежена нею область *однозв'язна.* Якщо ж межа області складається з n лінійних континуумів Γ_k $(k=\overline{1,n})$, попарні перетини яких є порожніми множинами, то ця область n*-зв'язна.* Кожен з непорожніх перетинів лінійних континуумів зменшує зв'язність на одиницю.

У випадку, коли межа області складається з нескінченної кількості лінійних континуумів, вона називається *нескінченнозв'язною.*

Очевидно, що круг $|z-1|<2$ є однозв'язною областю; круг з виколотою точкою $0<|z-1|<2$ – двозв'язною областю; область, що лежить між двома лінійними континуумами $|z-1/2|=1/2$ та $|z-1|=2$, є однозв'язною, оскільки перетин континуумів має спільну точку $z=0$, а отже, він не порожній; розширена комплексна площина $\overline{\mathbb{C}}$ з виключеними відрізками $[2ik,2ik+1] (k=0,1,2,\ldots)$ – це нескінченнозв'язна область.

2.1.2. Шляхи та криві у комплексній площині

Означення. Кажуть, що на інтервалі $\alpha<t<\beta$ задано *комплекснозначну функцію дійсної змінної* t, якщо кожному значенню t з цього інтервалу поставлено у відповідність певне комплексне число $z=z(t)$. Таке означення комплексної функції рівносильне введенню двох дійсних функцій $x=x(t)$ та $y=y(t)$ дійсної змінної t таких, що $z=z(t)=x(t)+iy(t)$.

Означення. Число z_0 називають *границею функції* $z(t)$ при $t\to t_0$ і позначають

$$z_0=\lim_{t\to t_0} z(t), \qquad (2.1)$$

якщо $\forall\varepsilon>0$ $\exists\,\delta=\delta(\varepsilon)>0$ таке, що для всіх t, які задовольняють умову $0<|t-t_0|<\delta$[2], значення $z(t)$ належить ε-околу $|z(t)-z_0|<\varepsilon$ точки z_0. Легко переконатися, що коли $z_0\neq\infty$ і $z_0=x_0+iy_0$, рівність (2.1) еквівалентна двом рівностям $x_0=\lim\limits_{t\to t_0} x(t)$ та $y_0=\lim\limits_{t\to t_0} y(t)$.

Означення. Якщо границя $\lim\limits_{\Delta t\to 0} z(t+\Delta t)$ існує, скінченна та збігається зі значенням функції $z(t)$ у точці t, то кажуть, що функція $z(t)$ *неперервна в точці* t. Очевидно, що неперервність функції $z(t)$ еквівалентна неперервності функцій $x=x(t)$ та $y=y(t)$.

Означення. Функція $z(t)$ *неперервна на деякому інтервалі* (α,β), якщо вона неперервна в кожній точці цього інтервалу. При неперервній зміні значення t на (α,β) функція $z(t)$ описує деяку множину точок γ у площині $\mathbb{C}$. У векторному аналізі таку множину називають *годографом вектора* $z(t)=x(t)+iy(t)$.

Означення. Границю

$$\dot z(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{z(t+\Delta t)-z(t)}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\left(\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}+i\frac{y(t+\Delta t)-y(t)}{\Delta t}\right)=\dot x(t)+i\dot y(t),$$

якщо вона існує (і не залежить від прямування Δt до нуля), називають *похідною функції* $z(t)$ у точці t.

Покажемо, що якщо вектор похідної існує, то він направлений по дотичній до

---

2 Значення t_0 виколоте з околу, оскільки воно не впливає на значення границі. Як і в аналізі дійсної змінної, функція $z(t)$ у точці t_0 може бути і не визначеною, як, наприклад, $\dfrac{\sin t}{t}$ у точці $t=0$, а границя цієї функції існує і дорівнює одиниці.

кривої γ у точці дотику, тобто існування дотичної до цієї кривої рівносильне існуванню похідної.

$\lhd$ Оскільки довільна неперервна замкнена крива ізоморфна колу, то доведемо твердження на прикладі кола. Функція

$$z = z_0 + re^{it}, \ -\pi < t < \pi, \tag{2.2}$$

де z_0 – деяке фіксоване комплексне число, а $r = \text{const} > 0$, у комплексній площині визначає коло з радіусом r із центром у точці $z_0 = x_0 + iy_0$ (рис. 2.1).

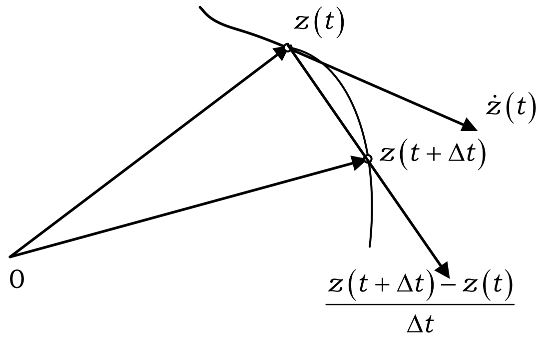


Рис. 2.1

З рис. 2.1 видно, що вектор, який сполучає точку z_0 з точкою z, тобто вектор $z - z_0 = re^{it}$, має сталий модуль, а його аргумент t пробігає всі значення від $-\pi$ до π (тут вибрано головне значення аргументу). Оскільки запис функції (2.2) рівносильний системі

$$\begin{cases} x = x_0 + r\cos t, \\ y = y_0 + r\sin t, \end{cases}$$

яка є параметричним рівнянням кола в комплексній площині, то похідну функції (2.2) можна записати так:

$$\dot{z} = \dot{x} + i\dot{y} = -r\sin t + ir\cos t = ir(\cos t + i\sin t) = ire^{it} = i(z - z_0) = e^{i\frac{\pi}{2}}(z - z_0).$$

Звідси бачимо, що похідна функції (2.1) є вектором дотичної до кола $\rhd$

Трапляються випадки, коли при відображенні відрізка $[\alpha, \beta]$ функцією $z = z(t)$ її значення в деяких точках, наприклад t_1, $t_2 \in [\alpha, \beta]$, збігаються. Такі точки називаються *точками самоперетину кривої.*

Ураховуючи можливість існування точок самоперетину, правила обходу точок множини тощо, у комплексній площині розрізняють поняття: множини точок, які утворюють криву, шляху та саме кривої.

Означення. Шляхом γ називають множину точок $z(t)$ комплексної площини $\mathbb{C}$ (розширеної комплексної площини $\overline{\mathbb{C}}$), яка утворюється при неперервному відображенні відрізка (α, β) дійсної осі в $\mathbb{C}$ (або $\overline{\mathbb{C}}$). Шлях описується комплекснозначною функцією $z = z(t)$ дійсного аргументу t, яка неперервна в кожній точці $t_0 \in [\alpha, \beta]$ у тому розумінні, що для довільного $\varepsilon > 0$ існує окіл $\{t \in [\alpha, \beta]; |t - t_0| < \delta\}$, для всіх точок t якого $|z(t) - z(t_0)| < \varepsilon$ (або $\rho(z(t), z(t_0)) < \varepsilon$, якщо $z(t_0) = \infty$). Точки $a = z(\alpha)$ та $b = z(\beta)$ називаються *кінцями шляху.* Шлях називають *замкненим,* якщо $z(\alpha) = z(\beta)$.

Два шляхи (два параметричні рівняння) $\gamma_1: \ z = z_1(t)$, $t \in [\alpha_1, \beta_1]$ та $\gamma_2: \ z = z_2(t)$, $t \in [\alpha_2, \beta_2]$ називаються *еквівалентними шляхами* (рівняннями) $(\gamma_1 \sim \gamma_2)$, якщо існує неперервна зростаюча функція $\tau=\tau(t):\ [\alpha_1,\beta_1]\xrightarrow{\tau(t)}[\alpha_2,\beta_2]$ така, що для всіх $t\in[\alpha_2,\beta_2]$ $z_2(t)=z_1(\tau(t))$.

Легко бачити, що це відношення задовольняє аксіоми еквівалентності, а саме: *рефлексивності* $\gamma_1\sim\gamma_2$, *симетричності* (якщо $\gamma_1\sim\gamma_2$, то $\gamma_2\sim\gamma_1$) та *транзитивності* (якщо $\gamma_1\sim\gamma_2$ та $\gamma_2\sim\gamma_3$, то $\gamma_1\sim\gamma_3$).

Розглянемо шляхи: $\gamma_1:\ z=t,\ t\in[0,1]$; $\gamma_2:\ z=\cos t,\ t\in\left[-\dfrac{\pi}{2},0\right]$; $\gamma_3: z=1-t^2$, $t\in[0,1]$; $\gamma_4: z=\cos t,\ t\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$. Очевидно, що множина точок комплексної площини в усіх випадках одна й та сама, але лише перший і другий шляхи еквівалентні між собою (верхній графік на рис. 2.2).

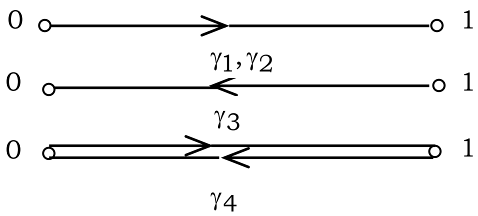


Рис. 2.2

Третій і четвертий шляхи не еквівалентні ні першим двом, ні між собою, оскільки, як видно з рис. 2.2, третій шлях має інший напрямок обходу, ніж два перші, а четвертий є замкненим.

Означення. Кривою будемо називати клас усіх шляхів, еквівалентних між собою у вищенаведеному розумінні.

У тих випадках, коли це не викликає сумнівів, ми під кривою будемо розуміти відповідний шлях.

Аналогічно можна визначити криву в нескінченній частині комплексної площини. Для цього необхідно лише вимагати, щоб точка $z(t)$ як функція точки сфери Рімана неперервно залежала від параметра t.

Означення. Неперервним шляхом (*кривою*) у комплексній площині називається множина точок із $\overline{\mathbb{C}}$, яка є образом відрізка $[\alpha,\beta]$ при відображенні неперервною функцією $z=z(t)=x(t)+iy(t)$, $t\in[\alpha,\beta]$.

Легко переконатися, що неперервна крива, яка є неперервним образом зв'язної множини (відрізка дійсної осі чи кола), є компактною зв'язною множиною.

Означення. Кривою Жордана, або *простою кривою* називається неперервна крива, яка не має кратних точок (точок самоперетину), тобто не перетинає сама себе. Якщо значення $x=x(t)$ і $y=y(t)$ на кінцях відрізка $t\in[\alpha,\beta]$ збігаються, то крива Жордана називається *замкненою кривою Жордана.* Очевидно, що крива Жордана визначається взаємно неперервною функцією, і довільну замкнену криву Жордана можна подати як взаємно однозначний і неперервний образ кола.

Кажуть, що при неперервній зміні значення параметра t від α до β (або навпаки) точка $z(t)$ робить обхід уздовж кривої Жордана Γ. Якщо при обході замкненої кривої Жордана Γ обмежена нею множина залишається зліва, то такий напрямок обходу називається *додатним напрямком.* У випадку незамкненої кривої за додатний приймається напрямок, що відповідає зростанню параметра t
.

Для визначення гладкості функції, а отже, і шляху, будемо користуватися загальноприйнятою термінологією: неперервну функцію будемо називати функцією з класу C^0, неперервно диференційовну – з класу C^1, функцію, яка має неперервну похідну порядку n, будемо відносити до класу C^n.

Зазначимо, що ті точки, у яких $\dot{z}(t)=0$ (тобто $\dot{x}(t)=0$ та $\dot{y}(t)=0$), для функції $z(t)$ можуть бути особливими, наприклад точками повернення, кутовими точками тощо.

Означення. Шлях $z=z(t)$ $t\in[\alpha,\beta]$ називається *кусково-гладким*, якщо він описується неперервною на $[\alpha,\beta]$ функцією $z(t)$, а відрізок $[\alpha,\beta]$ можна розбити на скінченну кількість замкнених відрізків, на кожному з яких звуження шляху $z=z(t)$ є гладкою функцією.

У загальному випадку визначення гладкої кривої вимагає деяких уточнень. Це пов'язано з тим, що заміна $\tau(t)$ у класі еквівалентних шляхів може привести до того, що гладкий шлях переходить у негладкий. Поняття гладкості не інваріантне відносно таких перетворень. Тому визначимо гладкі криві.

Означення. Гладкою кривою назвемо клас шляхів, одержаних з деякого гладкого шляху γ за допомогою всіх можливих замін параметра $\tau(t)$, які є диференційованими функціями з додатною похідною.

Аналогічні вимоги потрібно ставити при розгляді кусково-гладких і введених нижче спрямлюваних кривих. У першому випадку необхідно вимагати, щоб допустимі заміни параметра були неперервними всюди, за винятком, можливо, скінченної кількості точок, мали неперервну додатну, а у виняткових випадках – односторонню похідну. У другому випадку будемо вимагати, щоб заміна параметра реалізувалася зростаючими абсолютно неперервними функціями $\tau(t)$.

Означення. Замкнена крива $z=z(t)$ $t\in[\alpha,\beta]$ називається *гладкою*, якщо існує похідна $z'(t)=x'(t)+iy'(t)\neq 0$ ($t\in(\alpha,\beta)$), а похідні в точках α та β можуть розумітися як односторонні. При цьому на кінцях проміжку $[\alpha,\beta]$ має виконуватись рівність $\dot{z}(\alpha)=\dot{z}(\beta)$.

Зауважимо, що гладка крива не обов'язково має бути простою.

Наведемо без доведення відому теорему.

Теорема Жордана. Замкнена крива Жордана γ розбиває комплексну площину на дві області так, що перейти з однієї області до другої неможливо, не перетнувши криву Жордана.

При такому розбитті розширеної комплексної площини одна з частин містить скінченну частину площини й називається *вутрішньою областю відносно кривої* γ, а інша містить нескінченно віддалену точку й називається *зовнішньою областю відносно* γ.

Якщо крива Жордана кусково-гладка, тобто складена зі скінченної кількості гладких кривих, то доведення цієї теореми очевидне, але в загальному випадку достатньо складне й громіздке.

На відміну від аналізу дійсної змінної, де використовуються здебільшого області, обмежені скінченною кількістю кусково-гладких кривих, які не перетинаються, у теорії функцій комплексної змінної досить часто розглядаються області, одержані з таких областей вилученням певних кусково-гладких кривих, які називають *розрізами*, і зліченної кількості ізольованих точок.

Означення. Будемо казати, що в області D *проведено розріз* уздовж кривої Жордана γ, якщо з цієї області вилучено всі точки γ, а до межі області входить замкнений шлях, який охоплює цей розріз.

Розрізи можуть включатись у межові криві, але тоді ці криві вже не будуть простими. Одержані таким чином криві називаються *кривими зі складками*. Очевидно, що кожна частина кривої зі складками проходиться не більше двох разів[3], але окремі точки можуть бути пройденими довільну кількість разів.

---

3 Такий розріз (складка) проходиться у двох протилежних напрямках.

Наприклад, уся розширена площина $\overline{\mathbb{C}}$ з видаленими відрізками $l_k = \left[0, \exp\frac{2k\pi i}{m}\right]$, $k = 0,1,...m-1$, $m > 2$ є однозв'язною областю. Її межа складається з m відрізків l_k, кожен з яких обходиться двічі, починаючи з точки 0 до точки $\exp\frac{2k\pi i}{m}$ і повертаючись до точки 0. При такому обході межі області (усіх відрізків) точка $z = 0$ проходиться $2m$ разів.

Беручи до уваги вищенаведені міркування, означення однозв'язних і багатозв'язних областей можна подати так.

Означення. Множина точок розширеної комплексної площини, межа якої складається з однієї простої замкненої або незамкненої кривої, є *однозв'язною множиною*.

Означення. Множина називається *n-зв'язною*, якщо її границя складається з n замкнених кривих Жордана $\Gamma_0, \Gamma_1, ...\Gamma_{n-1}$, причому всі Γ_k $k = \overline{1, n-1}$ лежать зовні одна одної та одночасно всередині Γ_0.

Важливим класом шляхів (кривих), який використовується при інтегруванні функцій комплексної змінної, є *клас спрямлюваних шляхів* (*кривих*). Нехай крива γ кусково-гладка. Візьмемо на γ скінченну кількість точок $P = \{\xi_k\}$ $(k = 1,2,...n)$ і сполучимо їх відрізками прямої в порядку розташування на γ. Позначимо l_P довжину утвореної ламаної, а число $l = \sup_P l_P \in \overline{\mathbb{R}}$ назвемо довжиною γ.

Означення. Спрямлюваним шляхом називається шлях $z = z(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, який має скінченну довжину, тобто $l = \sup_P l_P < +\infty$.

Як відомо з курсу математичного аналізу, довжина довільної кривої, яку у площині задано параметрично, $x = x(t)$, $y = y(t)$, $\alpha \le t \le \beta$, визначається формулою

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}dt = \int_\alpha^\beta |\dot{z}(t)|dt.$$

Очевидно, що довільна кусково-гладка крива (а отже, і гладка) має скінченну довжину. Оскільки гладка крива Жордана є спрямлюваною, то замість параметра t для її запису можна використати довжину її дуги s, яка відраховується від довільно вибраної фіксованої точки цієї кривої в додатному напрямку. Легко встановити, що в кожній точці гладкої жорданової кривої існує дотична до неї, причому кут, утворений кривою зі сталим, довільно вибраним напрямком на площині, є неперервною функцією параметра t.

Наприклад, функція $z = \sin t$; $t \in [-\pi/2; \pi/2]$ описує криву Жордана; функція $z = e^{2it}$ $t \in [0, \pi]$ – це замкнена жорданова крива; функція $z = t + i|\sin t|$ не є гладкою кривою на $[-\pi/2; \pi/2]$.

Розглянемо приклади кривих і шляхів у комплексній площині. Нехай маємо такі шляхи: γ_1: $z = t$, $t \in [0,1]$; γ_2: $z = \cos t$, $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$; γ_3: $z = 1 - t^2$, $t \in [0,1]$; γ_4: $z = \cos t$, $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Тут γ_1, γ_2, γ_3 є жордановими шляхами, а γ_4 не буде жордановим, оскільки всі його точки подвійні. Разом з тим, коло $z = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ є замкненим гладким шляхом (кривою) Жордана. Функція $z = \cos 2t e^{it}$, $t \in (0, 2\pi]$ описує замкнений гладкий шлях (криву) Жордана (перший графік на рис. 2.3). Напівкубічна парабола $z = t^2(t + i)$, $t \in [-1,1]$ є жордановим неперервно диференційовним кусково-гладким шляхом (другий графік на рис. 2.3), а шлях $z = t\left(1 + i \sin\frac{1}{t}\right)$ при $t \in \left[-\frac{1}{\pi}, \frac{1}{\pi}\right]$ є жордановим неспрямлюваним, а отже, і негладким (останній графік на рис. 2.3).

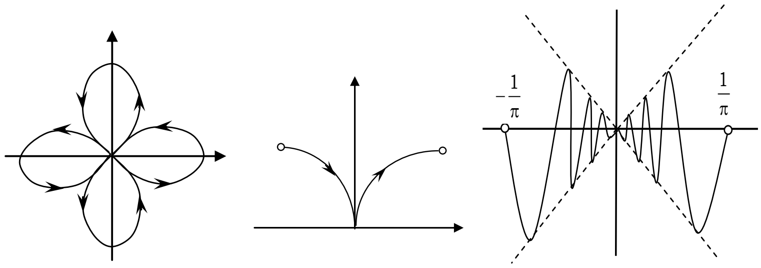


Рис. 2.3

Зазначимо, що для потреб теорій функцій комплексної змінної важливим є поняття *узагальнено-неперервного шляху*. Таким є довільний шлях у комплексній площині, який описується узагальнено-неперервною функцією $z = z(t)$, визначеною на проміжку $[\alpha, \beta]$, границі якого можуть бути нескінченно великими. Наприклад, або $\alpha = -\infty$, або $\beta = \infty$, а можливо, одночасно $\alpha = -\infty$ і $\beta = \infty$. Якщо узагальнено-неперервний шлях (крива) не набуває нескінченно великих значень, то кажуть, що він не проходить через нескінченно віддалену точку. Поняття замкнености, початкових і кінцевих точок, простоти чи кратності точок природно розповсюджуються на випадок узагальнено-неперервних шляхів (кривих).

Прикладами узагальнено-неперервних шляхів є:

а) пряма $z = (at + b) + i(dt + c)$ $-\infty \le t \le \infty$ $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, яка у випадку, коли $a^2 + d^2 \ne 0$, перетворюється на нескінченність при $t \to \pm\infty$;

б) парабола $z = (at^2 + bt + c) + i(dt + k)$, визначена на тому самому проміжку при $a^2 + d^2 \ne 0$, теж проходить через нескінченно віддалену точку при $t \to \pm\infty$;

в) гіпербола $z = \dfrac{a(1 + t^2) + 2bit}{1 - t^2}$ за тих самих умов є узагальнено-неперервним шляхом. Проте остання крива не буде жордановою, оскільки вона має кратну точку $z = \infty$, якій відповідають дві різні точки: $t = 1$ та $t = -1$.

Зауважимо, що в деяких навчальних посібниках з теорії функцій комплексної змінної поняття однозв'язності області вводиться за аналогією з теорією функцій дійсних змінних. А саме, область G називають однозв'язною, якщо для довільного замкненого жорданового контуру γ, який повністю лежить у G, його внутрішність також належить G. Таке визначення вірне тільки для скінченних областей, оскільки область може лежати зовні контуру γ і містити нескінченно віддалену точку.

2.2. Функції комплексної змінної та їх основні властивості

2.2.1. Поняття функції комплексної змінної

Розглянемо довільну сукупність точок E комплексної площини. До цієї множини, зокрема, може належати й точка $z = \infty$.

Означення. Якщо кожному комплексному значенню z із множини E за певним законом ставиться у відповідність комплексне число $w = u + iv$ з деякої множини комплексних чисел $G \subset \mathbb{C}$, то будемо говорити, що на множині E *задано функцію* $f(z)$ *комплексної змінної* z і позначати її $w = f(z)$. Множину E називатимемо *множиною визначення функції*, а множину G – *множиною її значень*.

Часто буває зручно розглядати функцію комплексної змінної $f(z)$ геометрично як відображення, яке переводить кожну точку z множини E комплексної площини в деяку точку $w \in G$ іншої множини G площини $\mathbb{C}$. При цьому різні точки множини E можуть переходити в одну точку з множини G. Таке відображення точок множини E на точки множини G будемо позначати $f: E \to G$.

Якщо розглядати множини E та G не на комплексній площині, а на сфері Рімана, то немає жодних підстав виділяти окремо точки $z = \infty$ та $w = \infty$.

Як і довільне комплексне число, функцію комплексної змінної $f(z)$ можна задавати у вигляді суми дійсних функцій $u(x,y) = \operatorname{Re} f(z)$ та $v(x,y) = \operatorname{Im} f(z)$, тобто записувати цю функцію у вигляді

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y),$$

де x та y набувають дійсних значень $(x,y) \in \mathbb{R}$, а $z = x + iy$, або подавати $f(z)$ у вигляді

$$f(z) = |f(z)| e^{i \arg f(z)}.$$

Сукупність точок $G = \{w : w = f(z), \ z \in E\}$, одержану внаслідок проходження точкою z усієї множини E, назвемо *образом множини* E, одержаним за допомогою функції $w = f(z)$. Це відображення позначається $E \xrightarrow{f(z)} G$. У випадку, коли множини E та G не містять нескінченно віддалених точок, кажуть про сукупність точок у комплексній площині, у протилежному випадку – це множини з розширеної комплексної площини. Зокрема, якщо E є множиною натуральних чисел, то значення функції комплексної $w = f(z)$ утворюють послідовність комплексних чисел. Якщо ж E та G є множинами дійсних чисел, то така функція є функцією дійсної змінної.

Означення. Функція $w = f(z)$ називається *однолистою на множині* E, якщо двом довільним точкам $z_1, z_2 \in E$; $z_1 \neq z_2$ відповідають два різні значення функції $f(z_1) \neq f(z_2)$. Множина E при цьому називається *областю (множиною) однолистості.*

Якщо функцію $f(z) = z^2$ визначено в області $\operatorname{Im} z > 0$ і точки $z_1 \neq z_2$ належать цій області, то $f(z_1) \neq f(z_2)$, а отже, функція однолиста у верхній півплощині. Це твердження легко перевірити самостійно. Якщо ж ця функція визначена в усій комплексній площині, то в ній вона не буде однолистою. Це випливає хоча б з того, що поклавши $z_1 = 1 + i \neq z_2 = -(1+i)$, одержимо $f(z_1) = (1+i)^2 = (-(1+i))^2 = f(z_2)$.

Означення. Може трапитися, що в області визначення E функції комплексної змінної $f(z)$ існують замкнені шляхи γ, при повному обході вздовж яких функція одержує ненульовий приріст, тобто значення функції при виході з фіксованої точки z_0 не дорівнює її значенню при поверненні до точки після повного обходу вздовж контуру γ. Це означає, що одному й тому самому значенню змінної z відповідає два або більше значень функцій. Такі функції називаються *неоднозначними в даній області*, а різниця значень функції у фіксованій точці до та після обходу називається *приростом функції* $f(z)$ *при обході вздовж контуру* γ і позначається $[f(z)]|_{\gamma}$.

Означення. Якщо після кожного з $k-1$ обходів уздовж деякого замкненого контуру γ функція $f(z)$ одержувала ненульовий приріст відносно початкового значення, а після k-го обходу значення функції стало рівним початковому, то кажуть, що функція в області, яка містить контур γ, є k*-значною.* Якщо ж функція не повертається до початкового значення після довільної скінченної кількості обходів, то вона *нескінченнозначна.*

Наприклад, функція $w = f(z) = z^2$ в області $|z| < 1$ однозначна, але не однолиста, а $w = f(z) = \sqrt{z}$ у цій області є двозначною функцією, оскільки корінь квадратний має дві гілки:

$$\sqrt{z} = \sqrt{|z|}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{2} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{2}\right)\ k = 0{,}1.$$

Функція $\mathrm{Ln}z = \ln|z| + i\arg z + i2k\pi$ нескінченнозначна в цій області, а її приріст при кожному обході дорівнює $2\pi i$.

При вивченні багатозначних функцій важливим етапом є дослідження однозначних гілок.

Означення. Однозначною гілкою багатозначної функції $F(z)$ в області D називається така однозначна в цій області функція $f(z)$, значення якої в кожній точці z збігається з одним зі значень $F(z)$.

Означення. Нехай кожній точці $w \in G$ поставлено у відповідність одну або кілька точок z множини E (таких, що $w = f(z)$). Таке відображення реалізується функцією, *оберненою* до $f(z)$, і позначається $z = f^{-1}(w)$.

Якщо функція $w = f(z)$ однолиста, то завжди можна визначити обернену до неї функцію $z = f^{-1}(w)$. Якщо ж функція просто однозначна, то обернена функція може бути неоднозначною. Наприклад, функція $w = |z|$ однозначна, але обернена до неї функція нескінченнозначна, оскільки існує безліч комплексних чисел з рівними модулями й різними аргументами.

Якщо функція реалізує однозначне й однолисте відображення, то вона *взаємно однозначна*, а функції $f(z)$ і $f^{-1}(w)$ однозначні у своїх областях визначення.

Надалі, коли йтиметься про встановлення відповідності між точками деяких множин A та B, будемо використовувати поняття функції та відображення як еквівалентні. При цьому відображення $|w| = |f(z)| = \sqrt{u^2(x,y) + v^2(x,y)}$ множини $E(z)$ на множину $E_1(x, y, |w|)$ називатимемо *рельєфом функції* або *поверхнею модуля*. Приклад поверхні модуля функції $w = \dfrac{1}{1+z^2}$ наведено на рис. 2.4.

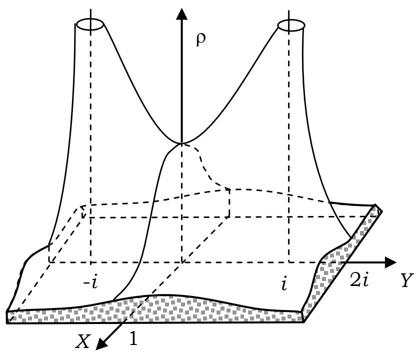


Рис. 2.4

Якщо функція комплексної змінної в деякій області однозначна за введеними означеннями, то вона може бути визначеною за допомогою поняття бінарного відношення та відображення.

Досить часто виникає потреба мати справу з відображеннями, які реалізуються за допомогою складних функцій. Нехай функція $w_1 = f_1(z)$ відображає точки множини E на множину G_1, а функція $w_2 = f_2(w_1)$ – множину G_1 на множину G. Таке відображення множини E на множину G реалізується складною функцією

$w = f_2(f_1(z))$, яку називають *суперпозицією функцій* (*відображень*) f_1 та f_2.

2.2.2. Границя функції комплексної змінної. Неперервність і рівномірна неперервність функцій комплексної змінної

Коротко зупинимось на основних положеннях теорії границь функцій комплексної змінної.

Нагадаємо, що проколотим δ-околом точки $z_0 \in \mathbb{C}$ називають відкриту множину $U'(z_0,\delta) = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < \delta\}$, якщо $z_0 \neq \infty$, або $U'(z_0,\delta) = \{z \in \overline{\mathbb{C}} : 0 < \rho(z, z_0) < \delta\}$, коли $z_0 = \infty$.

Означення границі функції за Коші. Нехай функція $f(z)$ визначена в деякому проколотому околі точки z_0. Точка $A \in \overline{\mathbb{C}}$ називається *границею функції* $f(z)$ при $z \to z_0$ $\left(\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = A\right)$, якщо $\forall \varepsilon > 0 \ \exists\ \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ таке, що коли $z \in U'(z_0,\delta)$, то $f(z) \in U(A,\varepsilon)$.

Отже, $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = A$, якщо $\forall \varepsilon > 0 \ \exists\ \delta(\varepsilon) > 0$ таке, що коли $|z - z_0| < \delta$, то $|f(z) - A| < \varepsilon$. Якщо ж $z_0 = \infty$, а A – скінченне, то означення залишається вірним за умови, що $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0$ таке, що при $\rho(z, z_0) < \delta$ маємо $|f(z) - A| < \varepsilon$, отже, $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = A$. Якщо ж $z_0 = \infty$ та A нескінченне, то відповідні околи потрібно розглядати у сферичній метриці $\rho(f(z), A) < \delta$, тобто ця нерівність має вигляд $|f(z)| > \sqrt{1/\left(\delta^2 - 1\right)}$.

Означення за Гейне. Комплексне число $A \in \overline{\mathbb{C}}$ є *границею функції* $f(z)$ при $z \to z_0$, якщо для довільної збіжної до z_0 послідовності $\{z_n\}$ $\left(\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0\right)$ та $\forall \varepsilon > 0$ існує $N = N(\varepsilon)$ таке, що $|f(z_n) - A| < \varepsilon \quad \forall n > N$, тобто послідовність $\{f(z_n)\}$ збігається до A $(\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n) = A)$.

Це означення легко переноситься на випадок, коли або $z_0 = \infty$, або $A = \infty$, а також на випадок, коли $z_0 = \infty$ та $A = \infty$ одночасно. Наприклад, при $z_0 = \infty$ потрібно розглядати окіл нескінченно віддаленої точки, тобто вибирати достатньо велике число $R = \dfrac{1}{\delta}$ і проводити дослідження $\forall z$ при $|z| > R$ (замість нерівності $0 < |z - z_0| < \delta$), а якщо $A = \infty$, то замість умови $|f(z) - A| < \varepsilon$ потрібно розглядати умову $|f(z)| > R$.

Наведені означення границі вірні для всіх функцій комплексної змінної. Зокрема, границя послідовності комплексних чисел є частинним випадком границі функції, коли множина визначення функції збігається з множиною $\mathbb{N}$.

Означення. Функція $f(z)$ називається *неперервною в точці* z_0, якщо вона визначена в деякому околі точки z_0, $\exists \lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ і виконується рівність $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$.

З означення випливає, що неперервна функція $f(z)$ прямує до свого граничного значення $f(z_0)$ незалежно від шляху прямування z до z_0. Причому існування границі модуля функції ніяк не впливає на її неперервність. Наприклад,

$f(z)=\dfrac{1}{2i}\left(\dfrac{z}{\bar{z}}-\dfrac{\bar{z}}{z}\right)$ обмежена в точці $z=0$, але не неперервна, оскільки в цій точці вона не має границі. Дійсно, поклавши $z=re^{i\,\varphi}$, маємо

$$f(z)=\frac{1}{2i}\left(\frac{re^{i\varphi}}{re^{-i\varphi}}-\frac{re^{-i\varphi}}{re^{i\varphi}}\right)=\frac{1}{2i}\left(e^{2i\varphi}-e^{-2i\varphi}\right)=\sin 2\varphi\,.$$

Отже, значення $\lim\limits_{r\to 0} f(z)=\sin 2\varphi$ не залежить від прямування r до нуля й може бути рівним довільній величині з проміжку $[-1,1]$.

Легко встановити: якщо $f(z)$ і $g(z)$ неперервні, то неперервні й функції $f(z)\pm g(z)$ та $f(z)g(z)$, а при $g(z)\neq 0$ неперервна й частка $f(z)/g(z)$. Очевидно, що аналогічне твердження вірне й для довільної скінченної кількості функцій.

Означення. Якщо $f(z)$ неперервна в кожній точці області, то вона називається *неперервною в області.*

Означення. Функція називається *неперервною в замкненій області* $D\bigcup L$, якщо вона неперервна в D, а при підході до границі L у кожній точці має граничне значення.

Означення. Функція $f(z)$ називається *рівномірно неперервною в замкненій області* $D\bigcup L$, якщо $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta(\varepsilon)$ таке, що $\forall z_1,z_2\in D\bigcup L$ $|f(z_1)-f(z_2)|<\varepsilon$ при $|z_1-z_2|<\delta$. Якщо області $D\bigcup L$ належить нескінченно віддалена точка, то використовується відповідна сферична метрика та з того, що $\rho(z_1,z_2)<\delta$, випливає: $\rho(f(z_1),f(z_2))<\varepsilon$ $\forall z_1,z_2\in D\bigcup L$.

Якщо точка z_0 є ізольованою точкою множини E, тобто існує δ-окіл цієї точки, який не містить жодної іншої точки множини E, і функція $f(z)$ визначена в цій точці, то вона вважається неперервною в ній.

З неперервності функції комплексної змінної $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ у скінченній частині комплексної площини випливає й неперервність функцій $u(x,y)$ та $v(x,y)$. Це твердження є наслідком того, що необхідною й достатньою умовою збіжності послідовності комплексних чисел є збіжність послідовностей їх дійсних та уявних частин. І навпаки, з неперервності дійсної та уявної частин випливає неперервність функції комплексної змінної. Отже, неперервність функції $f(z)$ комплексної змінної $z=x+iy$ еквівалентна неперервності двох дійсних функцій $u(x,y)=\operatorname{Re} f(z)$ і $v(x,y)=\operatorname{Im} f(z)$ дійсних змінних x та y.

Теорема Вейєрштрасса. Якщо функція $f(z)$ неперервна в обмеженій замкненій області $D\bigcup L$, то вона й рівномірно неперервна в ній, тобто для довільного $\varepsilon>0$ існує таке $\delta=\delta(\varepsilon)$, що для довільних $z,z'\in D\bigcup L$ при $|z-z'|<\delta$ маємо $|f(z)-f(z')|<\varepsilon$.

$\triangleleft$ З неперервності $f(z)$ у замкненій області випливає, що для довільної точки z і довільного $\varepsilon>0$ можна побудувати такий круг радіусом ρ_z із центром у точці z, що $|f(z)-f(z_1)|<\varepsilon/2$ при $|z-z_1|<\rho_z$ (рис. 2.5).

Поставимо у відповідність кожній точці області кружок з радіусом $\rho_z/2$. За лемою Гейне – Бореля з цієї нескінченної множини кругів виділимо скінченну кількість кругів, які покривають усю замкнену множину $D\bigcup L$. Нехай $\delta>0$ – найменше зі значень радіусів цих кругів. Тоді воно буде задовольняти умову теореми. Справді, якщо $|z-z_1|<\delta$ і точка z лежить у крузі з центром у точці z_2, то враховуючи, що $\delta\le\rho_z/2$, бачимо, що точка z_1 лежить у крузі радіусом ρ_{z_2} із центром у точці z_2.

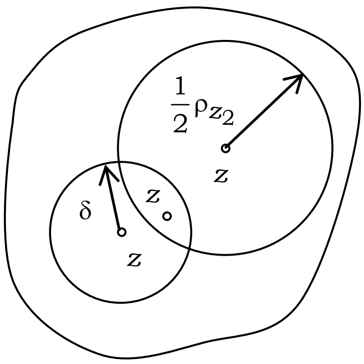


Рис. 2.5

Отже, $\left|f\left(z_2\right)-f\left(z_1\right)\right|\le\left|f\left(z_2\right)-f\left(z\right)\right|+\left|f\left(z\right)-f\left(z_1\right)\right|<\dfrac{\varepsilon}{2}+\dfrac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$ ▷

Якщо існує границя $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=f(z_0)$ і $f\left(z_0\right)$ є скінченною величиною, то говорять про неперервність у звичайному розумінні в комплексній площині $\mathbb{C}$ (у розумінні $\mathbb{C}$).

Якщо $f\left(z_0\right)$ неперервна в розумінні $\mathbb{C}$ на замкненій обмеженій множині комплексних чисел $E\subset\overline{\mathbb{C}}$, то вона має такі властивості:

а) обмежена, тобто $\exists A>0:\ \left|f(z)\right|<A\ \forall z\in E$;

б) її модуль досягає своїх границь, тобто існують такі точки $z_1, z_2\in E$, що $\left|f\left(z_1\right)\right|\le\left|f\left(z\right)\right|\le\left|f\left(z_2\right)\right|\ \ \forall z\in E$ (теорема Кантора);

в) рівномірно неперервна на E (теорема Вейєрштрасса).

До цього часу при визначенні неперервності функції $f(z)$ у точці z_0 вважали, що $f\left(z_0\right)\ne\infty$. Вивчаючи загальні відображення, одержані за допомогою функцій комплексної змінної, і враховуючи введену сферичну метрику, доцільно відмовитися від цього обмеження.

Означення. Будемо казати, що якщо функція $f(z)$ неперервна в точці z_0 і $f\left(z_0\right)=\infty$ ($\lim\limits_{\substack{z\to z_0\\ z\in E}} f(z)=\infty$), то вона *неперервна в точці* z_0 *в узагальненому розумінні* (у розумінні $\overline{\mathbb{C}}$). Таку функцію також називають *узагальнено-неперервною.*

Прикладом узагальнено-неперервної функції є $f(z)=\dfrac{1}{z}$. Очевидно, що ця функція, неперервна при $z\ne 0$, перетворюється на нуль $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)=0=f(\infty)$ при $z=\infty$, а при $z=0$ – на нескінченність $\lim\limits_{z\to 0} f(z)=\infty=f(0)$.

Зазначимо, що не всі властивості неперервної функції розповсюджуються на узагальнено-неперервну. Наприклад, якщо функції $f(z)$ та $g\left(z\right)$ узагальнено-неперервні та в деякій точці z_0 набувають нескінченно великих значень, то функція $f\left(z\right)+g\left(z\right)$ у цій точці може не тільки не бути неперервною, але й бути невизначеною.

Розглянемо послідовність функцій $\left\{f_k(z)\right\}$ $(k=\overline{1,n})$, кожен член якої визначений на множині E. Нагадаємо, що послідовність функцій називається *збіжною в точці* z, якщо $\forall\varepsilon>0$ існує такий номер N, залежний від ε, що при $k>N$ і $m>0$ має місце нерівність $|f_k(z)-f_{k+m}(z)|<\varepsilon$.

Розглянута послідовність називається *одностайно неперервною,* якщо $\forall\varepsilon>0$ існує таке $\delta>0$, залежне від ε, але незалежне від k, що для всіх $z\in E$, $z'\in E$ ($z\neq z'$) при $|z-z'|<\delta$ для всіх k мають місце нерівності $|f_k(z)-f_k(z')|<\varepsilon$.

Нагадаємо без доведення важливу відому теорему.

Теорема Арцела. З рівномірно обмеженої та одностайно неперервної послідовності функцій $\{f_k(z)\}$, заданих на множині E, можна виділити підпослідовність $\left\{f\left(z_{k_m}\right)\right\}$, рівномірно збіжну по z на цій множині.

У комплексній площині границі області визначення функцій можуть містити розрізи або виколоті точки. Вивчення функцій на розрізах ускладнюється тим, що використовувати введені вище поняття неперервності та рівномірної неперервності без додаткових припущень неправомірно. Тому доцільно визначити поняття, близьке до рівномірної неперервності, але менш обтяжливе для функції. Для цього введемо спочатку поняття відстані між точками z та z' з області визначення функції E як точну нижню грань довжин ламаних, які з'єднують ці точки й лежать усередині області E (не перетинають границі). Таке визначення відстані називають *метрикою Мазуркевича* та позначають $\rho_E\left(z,z'\right)$.

Означення. Нехай функція $f(z)$ неперервна в області E. Будемо казати, що $f(z)$ *неперервна в області аж до її межі*, якщо $\forall\varepsilon>0$ можна вказати таке $\delta>0$, що при $\rho_E\left(z,z'\right)<\delta$ має місце нерівність $|f(z)-f(z')|<\varepsilon$.

Оскільки $\rho_E(z,z')\geq|z-z'|$, то зрозуміло, що неперервність аж до межі є слабшою вимогою, ніж рівномірна неперервність функції в області. Разом з тим, якщо область E обмежена простою кривою, то з неперервності аж до межі випливає рівномірна неперервність в E. Цей результат майже очевидний для кусково-гладких кривих, які обмежують область, а для довільних простих кривих доведення цього факту достатньо складне й виходить за межі нашого викладу.

Для областей з розрізами неперервність аж до межі не рівносильна рівномірній неперервності, оскільки для області з розрізом існують точки z та z', для яких відстань $|z-z'|$ як завгодно мала, у той час як $\rho_E\left(z,z'\right)$ буде більше деякої додатної сталої, оскільки точки розрізу розташовані по різні його боки. Тому відмінність між рівномірною неперервністю й неперервністю аж до межі полягає в тому, що рівномірно неперервна в області функція повинна мати однакові граничні значення при прямуванні до точки межі, незалежно від того, з якого боку розрізу відбувається прямування до такої точки, а функція, неперервна аж до межі, може мати різні значення при прямування до межової точки з різних боків розрізу.

Надалі, якщо не буде сказано інше, вважатимемо: якщо функція $f(z)$ неперервна аж до межі в області з розрізом, то її значення в точках межі визначені як з одного, так і з іншого боків розрізу.

2.2.3. Багатозначні функції

Розглянемо клас функцій, обернені до яких не однозначні. Це так звані *багатозначні функції.* Для того, щоб до них можна було застосувати введені вище поняття й результати, потрібно вміти виділяти однозначні гілки багатозначних функцій. Основою загальної методики виділення однозначних гілок є визначення областей однолистості функції. Нехай функція $z=F(w)$ визначена й неперервна в узагальненому розумінні в області D з розширеної комплексної площини. Припустимо, що нам удалося розбити область D на скінченну або зліченну кількість областей D_k, які попарно не мають спільних точок, так, що довільна точка області D є внутрішньою точкою тільки однієї області D_k або ж спільною межовою точкою двох суміжних областей. При цьому відображення $z = F(w)$ взаємно однозначне в кожній з цих областей. Тоді, як буде показано дещо пізніше, для аналітичних функцій образ кожної області D_k також є деякою областю G_k, а весь образ області D – область G – буде покритим областями G_k та образами спільних частин меж областей D_k. Розглянемо тепер обернену до $z = F(w)$ функцію $w = f(z)$, визначену в кожній з областей G_k, вважаючи, що її значення належать області D_k. Багатозначна функція $f(z)$ буде поданою у вигляді скінченної або зліченної кількості однозначних і неперервних в узагальненому розумінні функцій $f_k(z)$. Кожну з таких функцій $f_k(z)$ будемо називати *однозначною гілкою багатозначної функції* $w = f(z)$ у відповідній області.

Необхідно зазначити, що таке розбиття області D на області D_k для довільної функції $z = F(w)$ не має місця. Проте для аналітичних в області D функцій (за винятком ізольованих особливих точок, у яких вона може бути не визначеною), як ми покажемо далі, подібне розбиття завжди можливе, і притому нескінченною кількістю способів.

Проілюструємо вказаний спосіб. Розглянемо функцію $w = \sqrt[n]{z}$, обернену до степеневої функції $z = w^n$. Для кожного фіксованого значення z, відмінного від нуля та нескінченності, ця функція має n різних значень, визначених формулою

$$w = \underset{+}{\sqrt[n]{|z|}}\left(\cos\frac{\operatorname{Arg} z}{n} + i \sin\frac{\operatorname{Arg} z}{n}\right).$$

Якщо ж $z = 0$ або $z = \infty$, то функція набуває тільки по одному значенню, а саме $w = 0$ або $w = \infty$, в інших точках – n значень. Значення, одержані за цією формулою, є точками площини $\mathbb{C}$, у яких w^n набуває одного й того самого значення. Такі точки z розташовані у вершинах правильного n-кутника, вписаного в коло $|w| = \sqrt[n]{|z|}$. Вірно й протилежне. Вершини правильного n-кутника з центром у початку координат можна розглядати як відповідні n значень функції $\sqrt[n]{z}$ (рис. 2.6). Тому множина D буде областю однолистості для функції $z = w^n$ тоді й тільки тоді, коли з n вершин довільного правильного n-кутника з центром у початку координат вона не міститиме більше однієї вершини, тобто має бути кутом з вершиною в початку координат і розхилом не більше $\frac{2\pi}{n}$.

Розбивши площину променями, які виходять з початку координат і проходять через вершини вказаних багатокутників, ми одержимо n областей однолистості таких, що в кожній з них багатолиста в усій площині функція $z = w^n$ є однолистою. Образом кожної з таких областей буде розширена комплексна площина з розрізом уздовж променя L, який виходить з початку координат (рис. 2.7). Цей розріз є межею області. Зокрема, якщо областю однолистості є кут, сторони якого нахилено до додатної дійсної півосі під кутами $\alpha + \frac{2k\pi}{n}$ та $\alpha + \frac{2(k+1)\pi}{n}$ відповідно, то промінь розрізу утворить з додатною дійсною піввіссю кут, рівний $n\alpha$.

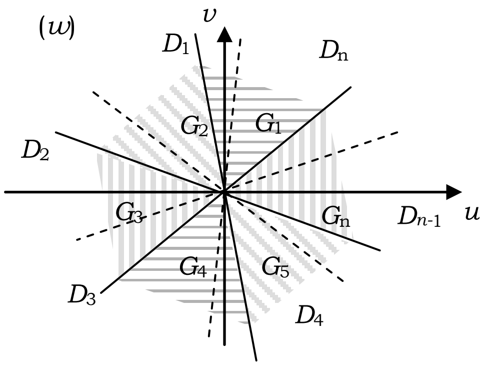


Рис. 2.6

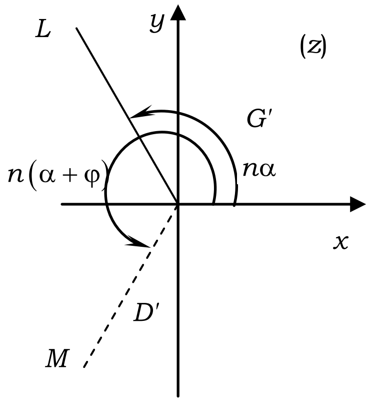


Рис. 2.7

Таким чином побудована область є областю однолистості для всіх n однозначних гілок функції $f(z)=\sqrt[n]{z}$. Легко переконатися, що довільна інша система областей, одержана з попередньої шляхом повороту променів на довільний кут $0<\varphi<2\pi$, приводить до нової системи областей однолистості нашої функції, а образом кожної з цих областей буде площина з розрізом уздовж променя M (рис. 2.6), який виходить з початку координат і напрямлений під кутом $n(\alpha+\varphi)$ до додатної дійсної півосі.

Оскільки функція $z=w^n$ усередині кожної з областей однолистості має відмінну від нуля похідну $z'=nw^{n-1}$, то кожна з однозначних гілок оберненої до неї функції $f(z)=\sqrt[n]{z}$ диференційовна, а їх похідні відмінні від нуля:

$$\left(\underset{k}{\sqrt[n]{z}}\right)'=\frac{1}{nw^{n-1}}=\frac{1}{n\left(\underset{k}{\sqrt[n]{z}}\right)^{n-1}},\ \left(k=\overline{0,n-1}\right).$$

Якщо тепер прослідкувати за рухом точки z при обході початку координат уздовж замкненого шляху, починаючи з точки $z_0=|z_0|e^{i\varphi_0}$, де $\underset{k}{\sqrt[n]{z_0}}=\sqrt[n]{|z_0|}\left(\cos\frac{\varphi_0+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi_0+2k\pi}{n}\right)$ є k-ю гілкою багатозначної функції, то при поверненні в початкову точку ми одержимо приріст аргументу, унаслідок чого значення функції буде рівним

$$\sqrt[n]{|z_0|}\left(\cos\frac{\varphi_0+2(k+1)\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi_0+2(k+1)\pi}{n}\right)=\underset{k+1}{\sqrt[n]{z_0}}.$$

Відбувся перехід від k-ї однозначної гілки функції до $(k+1)$-ї. Це відповідає повороту площини образів навколо початку координат на кут $\frac{2\pi}{n}$, або, що теж саме, переходу з образу k-ї області однолистості до образу $(k+1)$-ї області.

Отже, щоб повернутися до вихідного значення кореня, потрібно зробити рівно n обходів навколо початку координат уздовж довільного замкненого контуру. Саме з цієї причини точка нуль є точкою розгалужування функції порядку $n-1$.

Якщо деяка точка є точкою розгалужування скінченного порядку, а функція має в ній скінченну чи нескінченну границю, то таку точку називають *алгебраїчною точкою розгалужування.*

Очевидно, що точка $z=\infty$ також є точкою розгалужування порядку $n-1$ для функції $f(z)=\sqrt[n]{z}$. Дійсно, якщо зробити відповідні обходи вздовж замкненого контуру в напрямку за годинниковою стрілкою, то всередині контуру буде лежати не точка $z=0$, а точка $z=\infty$. Результат спостереження за поведінкою значень функції буде тим самим, що й у попередньому випадку. Отже, точка $z=\infty$ є алгебраїчною точкою розгалужування.

2.3. Диференційовність функцій комплексної змінної. Умови Коші – Рімана

Розглянуті вище питання побудови функцій комплексної змінної в основному збігалися з аналогічними підходами в теорії функцій дійсної змінної. Поняття диференційовності функцій комплексної змінної також має багато спільного з відомими твердженнями, але, разом з тим, воно істотно відрізняється від диференційовності у площині $\mathbb{R}^2$.

2.3.1. Похідна функції комплексної змінної

Нехай в області $D\subset\mathbb{C}$ задано однозначну функцію $w=f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ комплексної змінної z. В околі точки $z_0\in D$ розглянемо приріст цієї функції $\Delta w=f(z+\Delta z)-f(z)$.

Означення. Функція $w=f(z)$ комплексної змінної z називається *диференційовною* в точці z_0 з області визначення, якщо при $\Delta z=z-z_0\to 0$ існує скінченна границя відношення

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}=\frac{df}{dz}=f'(z), \tag{2.3}$$

яка не залежить від шляху прямування Δz до нуля. Ця границя, якщо вона існує, називається *похідною* функції $f(z)$ у точці z_0.

Якщо функція диференційовна в кожній точці області, то вона диференційовна в цій області.

Означення. Диференційовна в деякій області функція називається *моногенною в ній.*

Інакше можна сказати, що функція $f(z)$ диференційовна в точці z, якщо $\forall\varepsilon>0 \quad \exists\,\delta=\delta(z,\varepsilon)>0$ таке, що при $|\Delta z|<\delta$

$$\left|\frac{\Delta w}{\Delta z}-f'(z)\right|<\varepsilon. \tag{2.4}$$

З (2.4) випливає: якщо функція диференційовна, то

$$\Delta w=f'(z)\Delta z+\eta\Delta z, \tag{2.5}$$

де $\eta=\eta(z,\Delta z)\to 0$ при $\Delta z\to 0$. І навпаки, якщо

$$\Delta w=A\Delta z+\eta\Delta z, \tag{2.6}$$

де $A=\mathrm{const}$, та $\eta=\eta(z,\Delta z)\to 0$ при $\Delta z\to 0$, то така функція диференційовна в точці z_0.

Дійсно, розділивши обидві частини (2.6) на Δz, після переходу до границі при $\Delta z\to 0$ маємо $A=f'(z_0)$.

Якщо покласти $w=z$, то $\Delta w=\Delta z$, а $dw=dz=1\cdot\Delta z$. Отже, $dw=f'(z)dz$, а $\dfrac{dw}{dz}=f'(z)$.

З рівності (2.5) випливає, що диференційовна в точці z_0 функція $f(z)$ неперервна в ній.

Головна лінійна частина приросту Δw відносно Δz в околі точки z називається *диференціалом функції* в цій точці й позначається $dw=f'(z)dz$, а $dz=\Delta z$ – *диференціалом незалежної змінної.*

З визначення похідної та властивостей границь функції комплексної змінної випливає, що основні правила диференціювання, відомі з диференціального числення дійсної змінної, залишаються вірними й для функцій комплексної змінної. А саме:

1. Якщо $f(z)\equiv \text{const}$, то $\dfrac{d\,f(x)}{d\,z}=0$.

2. Для довільної диференційовної функції $f(z)$ і константи c маємо $\dfrac{d[c\,f(z)]}{d\,z}=c\dfrac{d\,f(z)}{d\,z}$.

3. Очевидно, що $\dfrac{dz}{dz}=1$.

4. Якщо $a_0,a_1,\ldots,a_n$ – комплексні сталі, то

$\dfrac{d}{dz}\left(a_0+a_1z+\ldots a_nz^n\right)=a_1+2a_2z+\ldots+n.a_nz^{n-1}$.

5. Якщо функції $f_k(z)$ диференційовні для всіх $k=\overline{1,N}$, то

$$\frac{d}{d\,z}\left(\sum_{k=1}^{N}f_k(z)\right)=\sum_{k=1}^{N}\frac{d\,f_k(z)}{d\,z}.$$

6Якщо функції $f_k(z)$ диференційовні для всіх $\forall k=\overline{1,n}$, то

$$\frac{d}{dz}[f_1(z)f_2(z)\ldots f_n(z)]=f_2(z)f_3(z)\ldots f_n(z)\frac{d}{dz}f_1(z)+$$
$$+f_1(z)f_3(z)\ldots f_n(z)\frac{d}{dz}f_2(z)+\ldots+f_1(z)f_2(z)\ldots f_{n-1}(z)\frac{d}{dz}f_n(z).$$

7Для диференційовних $f(z)$ справджується рівність

$$\frac{d}{dz}\left[f(z)\right]^n=n\left[f(z)\right]^{n-1}\frac{d\,f(z)}{dz}.$$

8. Якщо функції $f_1(z)$ та $f_2(z)$ диференційовні та $f_2(z)\neq 0$, то

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{f_1(z)}{f_2(z)}\right)=\frac{f_2(z)\dfrac{d\,f_1(z)}{dz}-f_1(z)\dfrac{d\,f_2(z)}{dz}}{\left(f_2(z)\right)^2}.$$

9. Нехай функція $w=f(z)$ диференційовна в кожній точці $z_0\in E$ та $w\in G$, а функція $F=\varphi(w)$ визначена й диференційовна на множині w. Тоді складна функція $F=\varphi(f(z))$ диференційовна на множині E та $\dfrac{d\varphi(f(z))}{dz}=\dfrac{d\varphi(w)}{dw}\cdot\dfrac{df(z)}{dz}$.

Це правило диференціювання складних функцій (суперпозицій).

10. Нехай функція $w=f(z)$ взаємно однозначно відображає множину E на F, а обернена функція $z=\varphi(w)$ неперервна на множині F. Тоді, якщо функція $f(z)$ у точці $z_0\in E$ диференційовна та $f'(z)\neq 0$, то обернена до неї функція $z=\varphi(w)$ теж диференційовна в точці $w_0=f(z_0)$ і $\dfrac{d\,\varphi}{d\,w}=\left(\dfrac{d\,f}{dz}\right)^{-1}$.

Доведення правил диференціювання повністю аналогічне їх доведенню в теорії функцій дійсної змінної.

Покладемо, що функція $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ диференційовна в околі точки $z_0=x_0+iy_0$. Вираз

$$D(x,y)=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y}\\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y}\end{vmatrix}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}$$

будемо називати *якобіаном функції* $f(z)$. Лінійне відображення

$$u = u(x_0, y_0) + \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x_0, y_0} (x - x_0) + \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{x_0, y_0} (y - y_0),$$

$$v = v(x_0, y_0) + \left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{x_0, y_0} (x - x_0) + \left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{x_0, y_0} (y - y_0)$$

є головною лінійною частиною відображення $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ у точці $z_0 = x_0 + iy_0$.

Умова $D(x,y) \neq 0$ означає, що головна лінійна частина відображення в точці z_0 є невиродженим відображенням.

2.3.2. Умови Коші – Рімана

Диференційовність функції комплексної змінної дуже схожа за формальним означенням на відповідну операцію для функцій дійсної змінної і, оскільки функцію $f(z)$ можна подати у вигляді суми дійсної та уявної частин, може скластися враження, що диференційовність функції $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ рівносильна диференційовності функцій $u(x,y)$ та $v(x,y)$. Покажемо, що це не так.

Нехай функція $f(z)$ визначена на множині E, яка є відрізком дійсної осі, а функція набуває комплексних значень $f(z) = u(x) + iv(x)$. Якщо $v(x) \equiv 0$, то наше визначення похідної збігається з визначенням похідної дійсної змінної. Якщо ж $v(x) \neq 0$, то, переписавши відношення приростів у вигляді $\frac{u(x) - u(x_0)}{\Delta x} + i\frac{v(x) - v(x_0)}{\Delta x}$, приходимо до висновку, що функція $v(x)$ має бути диференційовною.

Розглянемо тепер функцію $f(z) = u(x,y) + iv(x,y) = \mathrm{Re}\, z$, задану у площині $\mathbb{C}$, і деяку точку $z_0 \in \mathbb{C}$. Очевидно, що $u(x,y) = x$, а $v(x,y) \equiv 0$. Відношення приростів набуде вигляду

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{x - x_0}{(x - x_0) + i(y - y_0)}.$$

При $x = x_0$, а $y \to y_0$ це відношення прямує до нуля, а при $y = y_0$ та $x \to x_0$ – до одиниці. Отже, дана функція недиференційовна, хоча u та v диференційовні.

Іншим наочним і простим прикладом є функція $w = \bar{z} = x - iy$, де x, y – дійсні змінні. Ця функція недиференційовна. Дійсно,

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{\overline{z + \Delta z} - \overline{\Delta z}}{\Delta z} \to \begin{cases} 1 \;\; при \;\; \Delta y = 0,\; \Delta x \to 0 \\ -1 \;\; при \;\; \Delta x = 0,\; \Delta y \to 0 \end{cases}.$$

Отже, границя $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}$ не існує.

Ці приклади показують, що просто диференційовності дійсної та уявної частин не достатньо для диференційовності функції комплексної змінної. Для цього на поведінку функцій $u(x,y)$ та $v(x,y)$ накладаються в околі точки $z_0 = x_0 + iy_0$ додаткові умови, відомі під назвою умов Коші – Рімана.

Означення. Кажуть, що дві однозначні функції дійсних змінних $u(x,y)$ і $v(x,y)$ у точці (x_0, y_0) задовольняють *умови Коші – Рімана* (C–R) (або *умови Ейлера – Д'Аламбера*)*, якщо вони в даній точці мають скінченні частинні похідні та задовольняють систему диференціальних рівнянь

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}; \;\; \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \qquad (2.7)$$

---

* Ці умови раніше були отримані й застосовані в картографії та гідромеханіці Ейлером і Д'Аламбером ще в середині XVIII ст.

Теорема (*про необхідні умови диференційовності функцій комплексної змінної*). Для того, щоб функція $w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ була диференційовною в точці $z_0 = x_0 + iy_0$, необхідно, щоб її дійсна та уявна частини $u(x,y)$ і $v(x,y)$ у точці (x_0, y_0) задовольняли умови Коші – Рімана.

◁ За умовою теореми існує похідна $f'(z) = \lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x + i\Delta y}$, і ця границя не залежить від способу прямування $\Delta z \to 0$. Розглянемо два шляхи прямування $\Delta z \to 0$:

1. Покладемо $\Delta z = \Delta x \ (\Delta y = 0)$. Тоді

$$f'(z) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}.$$

2. Якщо ж $\Delta z = \Delta y \ (\Delta x = 0)$, то

$$f'(z) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u + i\Delta v}{i\Delta y} = -i\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Прирівнявши дійсні та уявні частини одержаних границь, приходимо до умов Коші –Рімана ▷

Теорема (*про необхідні й достатні умови диференційовності*). Для того, щоб функція $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ була диференційовною в точці z_0, необхідно й достатньо, щоб її дійсна та уявна частини $u(x,y)$ та $v(x,y)$ були диференційовні[4] в цій точці, а їх частинні похідні задовольняли умови Коші – Рімана в z_0.

◁ Необхідність. Нехай $f(z)$ – диференційовна функція в околі точки $z = z_0$. З диференційовності $f(z)$ випливає, що

$$\Delta w \equiv f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = f'(z_0)\Delta z + o(|\Delta z|).$$

Виділимо з приросту Δw дійсну та уявну частини

$$\Delta u = u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0) = a\Delta x + b\Delta y + o(|\Delta z|),$$

$$\Delta v = v(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0) = c\Delta x + d\Delta y + o(|\Delta z|).$$

Оскільки в точці $z = z_0$ існує границя

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \left(\frac{\Delta u}{\Delta z} + i\frac{\Delta v}{\Delta z} \right) = f'(z_0) = A + iB,$$

яка не залежить від прямування Δz до нуля, то, покладаючи $\Delta y = 0$, тобто $\Delta z = \Delta x$, маємо

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta u}{\Delta x} + i\frac{\Delta v}{\Delta x} \right) = A + iB,$$

а поклавши $\Delta x = 0$, $\Delta z = \Delta y$, одержимо

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \left(\frac{\Delta u}{i\Delta y} + \frac{\Delta v}{\Delta y} \right) = C + iD.$$

Звідси випливає, що

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x} = A, \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = \frac{\partial v}{\partial x} = B,$$

$$-\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta y} = -\frac{\partial u}{\partial y} = D, \quad \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta y} = \frac{\partial v}{\partial y} = C.$$

Маємо $a = d = A = C = \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}$, $c = -b = B = D = \dfrac{\partial v}{\partial x} = -\dfrac{\partial u}{\partial y}$.

А це означає, що функції $u(x,y)$ та $v(z,y)$ диференційовні й задовольняють умови

4 З існування частинних похідних ще не випливає диференційовність функції. Неперервність частинних похідних забезпечує її диференційовність.

Коші – Рімана.

Достатність. Оскільки $u(x,y)$ та $v(x,y)$ диференційовні в точці z_0, то в цій точці вони мають частинні похідні, а їх прирости можна виразити так:

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + o(|\Delta z|) = A\Delta x + B\Delta y + o(|\Delta z|),$$

$$\Delta v = \frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y + o(|\Delta z|) = C\Delta x + D\Delta y + o(|\Delta z|).$$

За умовою теореми виконуються умови Коші – Рімана, тобто

$$A = D = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y},\ B = \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = -C.$$

Розглянемо відношення приростів, одержимо

$$\frac{\Delta f}{\Delta z} = \frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta z} = \frac{(A + iC)\Delta x + (B + iD)\Delta y + o(\Delta z)}{\Delta z} =$$

$$= \frac{(A - iB)\Delta x + i(A - iB)\Delta y + o(\Delta z)}{\Delta z} =$$

$$= \frac{(A - iB)\Delta z + o(\Delta z)}{\Delta z} = (A - iB) + o(\Delta z)/\Delta z,$$

де $\dfrac{o(\Delta z)}{\Delta z} \underset{\Delta z \to 0}{\to} 0$.

Оскільки в точці z_0 існують скінченні частинні похідні від функцій $u(x,y)$ та $v(x,y)$ і виконуються умови Коші – Рімана, то в цій точці

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Отже, функція $f(z)$ диференційовна в точці z_0, а її похідну можемо обчислити за однією з чотирьох записаних вище формул ▹

Користуючись доведеною теоремою, з’ясуємо питання диференційовності та знайдемо похідні елементарних функцій $f(z) = x$ і $f(z) = e^z$.

Перша з них диференційовна як функція змінної x. Якщо ж розглядати її як функцію комплексної змінної z і записати у вигляді $f(z) = u(x,y) + v(x,y)$, де $u = x$, а $v \equiv 0$, то одержимо, що $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 1$, а $\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0$. Для неї умови Коші – Рімана не виконуються в жодній точці комплексної площини.

Розглядаючи функцію $f(z) = e^z$, запишемо її у вигляді $f(z) = e^x(\cos y + i\sin y) = u + iv$. Звідси $u = e^x\cos y$ та $v = e^x\sin y$. Очевидно, що ці функції диференційовні як функції дійсних змінних x та y (вони мають повні диференціали). Оскільки

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x\cos y = \frac{\partial v}{\partial y},\ \text{а}\ \frac{\partial u}{\partial y} = -e^x\cos y = \frac{\partial v}{\partial x},$$

то умови Коші – Рімана виконуються для всіх $x, y \in \mathbb{R}$, і похідну цієї функції можна записати за допомогою однієї з уведених вище формул, а саме

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial y} = e^x\cos y + ie^x\sin y = e^z = f(z).$$

Дамо читачу можливість самостійно переконатися в тому, що для функції $f(z) = \sqrt{|xy|}$ умови Коші – Рімана виконуються лише в точці $z = 0$, і довести, що вона не буде диференційовною в цій точці.

2.3.3. Диференціювання функцій, записаних у криволінійних

координатах

Досить часто функція $f(z)=u(\rho,\varphi)+iv(\rho,\varphi)$ виражається в полярній системі координат $|z|=r$, а $\operatorname{Arg} z=\varphi+2k\pi$. З теореми про необхідні й достатні умови диференційовності функцій комплексної змінної випливає, що для того, щоб функція $f(z)=u(\rho,\varphi)+iv(\rho,\varphi)$ була диференційовною, необхідно й достатньо, щоб:

1) u та v були диференційовними функціями змінних r та φ;

2) їх частинні похідні пов'язувались співвідношеннями

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \varphi},\quad \frac{\partial v}{\partial r}=-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi}. \tag{2.8}$$

$\triangleleft$ Дійсно, якщо $u(x,y)$ та $v(x,y)$ диференційовні як функції змінних x та y, то, урахувавши заміну змінних $x=r\cos\varphi$ та $y=r\sin\varphi$ і правило диференціювання складних функцій, установлюємо диференційовність функцій $u(\rho,\varphi)$ та $v(\rho,\varphi)$.

Виконання умови (2.8) встановимо безпосередньою перевіркою:

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\varphi+\frac{\partial u}{\partial y}\sin\varphi;\quad \frac{\partial v}{\partial \varphi}=r\frac{\partial v}{\partial y}\cos\varphi-r\frac{\partial v}{\partial x}\sin\varphi, \tag{2.9}$$

$$\frac{\partial v}{\partial r}=\frac{\partial v}{\partial x}\cos\varphi+\frac{\partial v}{\partial y}\sin\varphi;\quad \frac{\partial v}{\partial \varphi}=r\frac{\partial u}{\partial y}\cos\varphi-r\frac{\partial u}{\partial x}\sin\varphi. \tag{2.10}$$

Якщо виконуються умови Коші – Рімана $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y};\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$, то з (2.9) і (2.10) випливають умови (2.8).

Зворотна дія, тобто перехід від умов (2.8) до умов Коші – Рімана (2.7), проводиться аналогічно.

Необхідність умов (2.9), (2.10) доведемо, виходячи з таких міркувань*. Через точку $z_0=r_0(\cos\varphi_0+i\sin\varphi_0)$ проведемо промінь, що виходить з початку координат, і коло, яке перетинає в точці z побудований промінь. Дослідимо величину границі відношення приростів функції до приросту аргументу при прямуванні точки z до точки z_0 уздовж променя $\arg z=\varphi_0$ і кола $|z|=r_0$. У першому випадку одержимо

$$f'(z_0)=\lim_{r\to r_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{(r-r_0)[(\cos\varphi_0+i\sin\varphi_0)]}=\lim_{r\to r_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{(r-r_0)}\frac{r_0}{r_0(\cos\varphi_0+i\sin\varphi_0)}=$$

$$=\frac{r_0}{z_0}\lim_{r\to r_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{(r-r_0)}=\frac{r_0}{z_0}\frac{\partial f}{\partial\varphi}\bigg|_{z_0}.$$

Аналогічно, рухаючись уздовж кола, отримаємо

$$f'(z_0)=\lim_{\varphi\to\varphi_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{r_0[(\cos\varphi+i\sin\varphi)-(\cos\varphi_0+i\sin\varphi_0)]}=$$

$$=\lim_{\varphi\to\varphi_0}\left(\frac{f(z)-f(z_0)}{(\varphi-\varphi_0)}:\frac{z-z_0}{\varphi-\varphi_0}\right)=\frac{\partial f}{\partial\varphi}\bigg|_{z_0}:\frac{\partial z}{\partial\varphi}\bigg|_{z_0}=$$

$$=\frac{\partial f}{\partial\varphi}\bigg|_{z_0}:r_0(-\sin\varphi_0+i\cos\varphi_0)=\frac{1}{iz_0}\frac{\partial f}{\partial\varphi}\bigg|_{z_0}.$$

Оскільки, за визначенням похідної, ці величини рівні, то, опускаючи індекс "0",

* Див. [6].

одержимо $\dfrac{r}{z}\dfrac{\partial f}{\partial r}=\dfrac{1}{iz}\dfrac{\partial f}{\partial \varphi}$. Отже, $i\dfrac{\partial f}{\partial r}=\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial f}{\partial \varphi}$. Ураховуючи, що $\dfrac{\partial f}{\partial \varphi}=\dfrac{\partial u}{\partial \varphi}+i\dfrac{\partial v}{\partial \varphi}$, а $\dfrac{\partial f}{\partial r}=\dfrac{\partial u}{\partial r}+i\dfrac{\partial v}{\partial r}$, після підстановки цих значень у рівність $i\dfrac{\partial f}{\partial r}=\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial f}{\partial \varphi}$ приходимо до умови Коші – Рімана.

З одержаних вище формул знаходимо вирази для обчислення похідних, коли $z=re^{i\varphi}$:

$$f'(z)=\frac{r}{z}\frac{\partial f}{\partial r}=\frac{r}{z}\left(\frac{\partial u}{\partial r}+i\frac{\partial v}{\partial r}\right) \text{ та } f'(z)=\frac{r}{iz}\frac{\partial f}{\partial \varphi}=\frac{1}{z}\left(\frac{\partial v}{\partial \varphi}-i\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right).$$

Нехай тепер маємо довільну диференційовну в точці z функцію $f(z)$ і два напрямки, задані одиничними векторами $\vec{s}$ та $\vec{n}$ такими, що при повороті вектора $\vec{s}$ на прямий кут проти руху стрілки годинника ми одержимо вектор $\vec{n}$ ($\vec{n}=i\vec{s}$). Оскільки значення похідної не залежить від шляху прямування приросту аргументу до нуля, то, обчисливши похідні перший раз уздовж напрямку $\vec{s}$, а другий – уздовж $\vec{n}$ і провівши міркування, аналогічні викладеним вище, одержимо $f'(z)=\dfrac{1}{\vec{s}}\left(\dfrac{\partial u}{\partial \vec{s}}+i\dfrac{\partial v}{\partial \vec{s}}\right)=\dfrac{1}{\vec{n}}\left(\dfrac{\partial u}{\partial \vec{n}}+i\dfrac{\partial v}{\partial \vec{n}}\right)$. Однак $\vec{n}=i\vec{s}$, отже,

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{s}}=\frac{\partial v}{\partial \vec{n}},\ \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}=-\frac{\partial v}{\partial \vec{s}}.$$

Ці рівняння є *узагальненням рівнянь Коші – Рімана на випадок довільної ортогональної системи координат.*

2.3.4. Диференціювання багатозначних функцій

Проілюструємо процес диференціювання багатозначних функцій на прикладі $f(z)=z^{\frac{m}{n}}$. Покладемо $z=r\cos\varphi+ir\sin\varphi$, де m – ціле, а n – натуральне числа. Цю функцію визначено в довільній області D, яка не містить початку координат. Якщо число $\dfrac{m}{n}$ не ціле, то $f(z)=z^{\frac{m}{n}}$ є багатозначною відносно аргументу φ. Нехай маємо точку $z\in D$. Для того, щоб виділити однозначну гілку цієї функції, у даній точці зафіксуємо одне зі значень аргументу φ у ній. Побудуємо навколо неї деякий окіл, що не містить початку координат, і будемо брати в усіх інших точках z_1 з цього околу значення φ_1 так, щоб виконувалась умова $|\varphi-\varphi_1|<\dfrac{\pi}{2}$ (рис. 2.8).

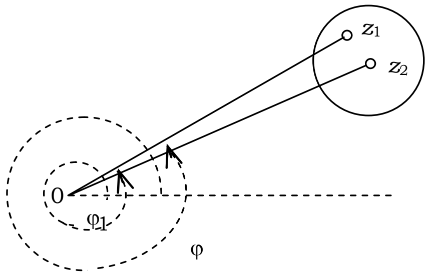


Рис. 2.8

Таким чином ми виділили однозначну неперервну гілку багатозначної функції, тобто

$$f(z)=r^{\frac{m}{n}}\left(\cos\frac{m\varphi}{n}+i\sin\frac{m\varphi}{n}\right)=u(r,\varphi)+iv(r,\varphi).$$

Звідси одержимо, що $u=r^{\frac{m}{n}}\cos\frac{m\varphi}{n}$ та $v=r^{\frac{m}{n}}\sin\frac{m\varphi}{n}$. Після диференціювання цих функцій маємо

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{m}{n}r^{\frac{m}{n}-1}\cos\frac{m\varphi}{n}=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial\varphi},\text{ а }\frac{\partial v}{\partial r}=\frac{m}{n}r^{\frac{m}{n}-1}\sin\frac{m\varphi}{n}=-\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial\varphi}.$$

Отже, однозначна гілка $f(z)=r^{\frac{m}{n}}\left(\cos\frac{m\varphi}{n}+i\sin\frac{m\varphi}{n}\right)$ багатозначної функції $f(z)=z^{\frac{m}{n}}$ диференційовна, а її похідна

$$f(z)=\frac{r}{z}\left(\frac{m}{n}r^{\frac{m}{n}-1}\cos\frac{m\varphi}{n}+i\frac{m}{n}r^{\frac{m}{n}-1}\cos\frac{m\varphi}{n}\right)=$$

$$=\frac{1}{z}\frac{m}{n}r^{\frac{m}{n}}\left(\cos\frac{m\varphi}{n}+i\cos\frac{m\varphi}{n}\right)=\frac{f(z)}{z}\frac{m}{n}.$$

Одержаний результат показує, що формальне правило диференціювання раціонального степеня аналогічне відомим з математичного аналізу правилам. Однак при цьому потрібно попередньо виділити однозначну гілку. Умову $z\neq 0$ можна опустити лише при додатному значенні відношення $\frac{m}{n}$.

Аналогічно диференціюється будь-яка інша багатозначна функція.

2.3.5. Операторні похідні

Нехай $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ – диференційовна в деякій області D функція. Якщо використати так звані *формальні* або *операторні похідні*, то умови Коші – Рімана можна записати у вигляді $\frac{\partial f}{\partial\bar{z}}=0$. Для того, щоб це показати, уведемо нові дійсні змінні ξ та η і сталі $\alpha,\beta,\gamma,\delta$. Зробимо заміну змінних $x=\alpha\xi+\beta\eta$, та $y=\gamma\xi+\delta\eta$ і знайдемо похідні

$$\frac{\partial f}{\partial\xi}=\alpha\frac{\partial f}{\partial x}+\gamma\frac{\partial f}{\partial y},\quad\frac{\partial f}{\partial\eta}=\beta\frac{\partial f}{\partial x}+\delta\frac{\partial f}{\partial y}.$$

Далі покладемо $\alpha=\beta=\frac{1}{2}$, $\gamma=-\delta=-\frac{i}{2}$. Тоді $x=\frac{1}{2}(\xi+\eta)$, $y=\frac{1}{2i}(\xi-\eta)$. Звідси випливає, що $\xi=x+iy=z$, а $\eta=x-iy=\bar{z}$. Отже,

$$\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}-i\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\frac{i}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right),\qquad(2.11)$$

$$\frac{\partial f}{\partial\bar{z}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}+i\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\frac{i}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right).\qquad(2.12)$$

Записана вище система називається системою *формальних (операторних) похідних*.

З формули (2.12) випливає, що виконання умов Коші – Рімана еквівалентне умові $\frac{\partial f}{\partial\bar{z}}=0$.

Виходячи з останніх формул, можемо записати диференціал функції $f(z)$ через операторні похідні у вигляді

$$df = \frac{\partial f}{\partial z}dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}d\bar{z}. \qquad (2.13)$$

Дійсно, нехай $df = Adz + Bd\bar{z}$, де $dz = dx + idy$, а $d\bar{z} = dx - idy$, $dx = \frac{1}{2}(dz + d\bar{z})$, $dy = \frac{1}{2i}(dz - d\bar{z})$. Ураховуючи, що $df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$, після підстановки dx та dy маємо $\frac{\partial f}{\partial x} = A + B$, а $\frac{\partial f}{\partial y} = i(A - B)$. Розв'язавши цю систему відносно A та B, знаходимо

$$A = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right),\ B = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

З формул (2.11) та (2.12) бачимо, що $A = \frac{\partial f}{\partial z}$, $B = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$.

Якщо виконуються умови Коші – Рімана, то з рівності (2.12) випливає, що $B = 0$. У такому разі ми отримали означення диференційовності функції, еквівалентне раніше введеному. Тому, використовуючи формулу (2.13) та умови Коші – Рімана, можна дати таке означення.

Означення[5]. Функція $f(z)$ *називається диференційовною в точці* z_0 *у розумінні комплексного аналізу* (коротше – у розумінні $\mathbb{C}$), якщо вона диференційовна в цій точці у розумінні $\mathbb{R}^2$, а її диференціал пропорційний dz, тобто в точці z_0 маємо $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$.

Таке означення підкреслює, що, незважаючи на велику схожість, диференціювання в комплексній площині істотно відрізняється від диференціювання в $\mathbb{R}^2$.

Наприклад, функція $f(z) = z\bar{z}$ диференційовна в $\mathbb{R}^2$, але в розумінні $\mathbb{C}$ вона диференційовна тільки при $z = 0$. Дійсно, $\frac{\partial (z\bar{z})}{\partial \bar{z}} = z$, і ця величина дорівнює нулю тільки при $z = 0$.

Іншим прикладом недиференційовної функції може бути $f(z) = x + 2iy$. Очевидно, що $\frac{\partial u}{\partial x} = 1$, а $\frac{\partial v}{\partial y} = 2$. Умови Коші – Рімана не виконуються.

Покладаючи $\Delta z = |\Delta z|e^{i\varphi}$, $\Delta\bar{z} = |\Delta z|e^{-i\varphi}$ і використовуючи очевидну рівність $\Delta f = \frac{\partial f}{\partial z}\Delta z + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\Delta\bar{z} + o(\Delta z)$, знаходимо $\frac{\Delta f}{\Delta z} = \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\frac{\Delta\bar{z}}{\Delta z} + \eta(\Delta z)$, або $\frac{\Delta f}{\Delta z} = \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}e^{-2i\varphi} + \eta(\Delta z)$, де $\eta(\Delta z) = \frac{o(\Delta z)}{\Delta z}$ прямує до нуля при $\Delta z \to 0$.

Звідси випливає, що для існування границі цього відношення при $\Delta z \to 0$ необхідно, щоб величина $\varphi = \arg\Delta z$ прямувала до певної границі ϑ (рис. 2.9). Границя величини $\frac{\Delta f}{\Delta z}$ при такому прямуванні називається *похідною за напрямком* ϑ функції $f(z)$ у точці $z = z_0$. Отже, похідна за напрямком у точці визначається за формулою

[5] Це означення прийняте як основне у книзі Б.В. Шабата [8].

$$\frac{\partial f}{\partial z_\theta} = \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial \bar z} e^{-2i\theta} .$$

Отже, якщо в точці $z = z_0$ величина $\frac{\partial f}{\partial \bar z} \neq 0$, то похідна в ній залежить від напрямку прямування точки z до точки z_0. Геометричним місцем точок (годографом) похідних за напрямком $\frac{\partial f}{\partial z_\theta}$ є коло з центром у точці $\frac{\partial f}{\partial z}$ з радіусом, рівним $\left|\frac{\partial f}{\partial \bar z}\right|$ (рис. 2.10).

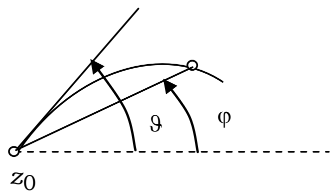


Рис. 2.9

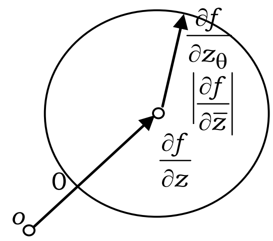


Рис. 2.10

Якщо ж функція $f(z)$ диференційовна в точці z_0 у розумінні $\mathbb{C}$, то $\frac{\partial f}{\partial \bar z} = 0$, і коло вироджується в точку $\frac{\partial f}{\partial z}$, а всі похідні за напрямками збігаються, оскільки вони рівні $\frac{\partial f}{\partial z}$.

Означення. Функція $f(z)$ *диференційовна в області D* комплексної площини, якщо вона диференційовна як функція змінної z у кожній точці цієї області.

Підкреслимо, що наші визначення й теореми про диференційовність стосуються тільки точок скінченної частини комплексної площини.

2.4. Аналітичні функції

Серед функцій комплексної змінної важливе місце займає клас аналітичних функцій. Ці функції широко застосовуються в наукових дослідженнях і є ефективним апаратом при розв'язуванні багатьох прикладних задач. Теорія аналітичних функцій включає хоча й значну частину, але далеко не всі функції комплексної змінної. Початок систематичного дослідження в області сучасної теорії аналітичних функцій пов'язують з фундаментальними роботами О. Коші та Б. Рімана. Проте ще раніше в роботах Ейлера та Д'Аламбера були встановлені необхідні й достатні умови диференційовності функцій комплексної змінної, які пізніше стали базовими умовами аналітичності функцій. Великий внесок у подальший розвиток сучасної теорії функцій зробили К. Вейерштрасс, а пізніше – математики Ю. Сохоцький, О. Маркушевич, І. Векуа, Г. Положій та ін.

2.4.1. Поняття аналітичної функції та її дослідження

У цьому підрозділі ми детально зупинимося на вивченні аналітичних функцій у класичному їх розумінні.

Означення. Функцію $f(z)$ називають *аналітичною* (інколи – регулярною, голоморфною або правильною) *в однозв'язній області* D, якщо вона диференційовна в кожній точці цієї області та однозначна в ній. Наприклад:

1) Функція $f(z)=z^2$ у крузі $|z|<1$ аналітична, оскільки вона однозначна й диференційовна.

2) Функція $f(z)=e^z$ також аналітична в довільній скінченній частині комплексної площини, однозначна і, як було показано вище, диференційовна.

3) Функція $f(z)=z^{3/2}$ у крузі $|z|<1$ диференційовна, але, як відомо, не однозначна, отже, вона не аналітична.

Означення. Функція $f(z)$ називається *аналітичною в неоднозв'язній області*, якщо вона аналітична в кожній однозв'язній підобласті, повністю розташованій у даній неоднозв'язній області.

Наприклад, функція $f(z)=z^{3/2}$ у кільці $1<|z|<2$ аналітична, оскільки вона однозначна й диференційовна в кожній однозв'язній підобласті кільця (рис. 2.11). Однозначність випливає з того, що всі однозв'язні області, які лежать у даному кільці, не дозволяють зробити повний обхід навколо точки $z=0$, а отже, одержати ненульовий приріст.

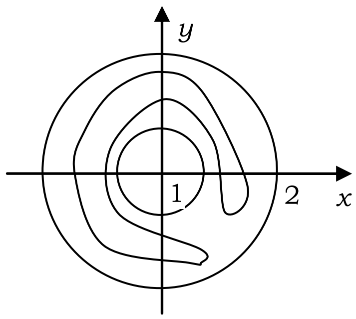


Рис. 2.11

Означення. Функція $f(z)$ *аналітична в точці*, якщо існує деякий окіл цієї точки, де функція аналітична.

Означення. Функція $f(z)$ *аналітична вздовж кривої* γ, якщо існує деяка область, що містить цю криву, і функція аналітична в цій області.

З диференційовності в точці не випливає аналітичність у ній. Справді, функція $z\operatorname{Re}z$ диференційовна в точці $z=0$, оскільки $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{\Delta z\operatorname{Re}\Delta z}{\Delta z}=0$, але вона не диференційовна в жодному δ-околі точки $z=0$.

Це твердження випливає з того, що при $z\neq 0$ відношення

$$\frac{(z+\Delta z)\operatorname{Re}(z+\Delta z)-z\operatorname{Re}z}{\Delta z}=$$

$$=\frac{z\operatorname{Re}\Delta z+\Delta z\operatorname{Re}z+\Delta z\operatorname{Re}\Delta z}{\Delta z}\to\begin{cases}x & \text{коли} \quad \Delta x=0,\quad \Delta y\to 0,\\ x+z & \text{коли} \quad \Delta y=0,\quad \Delta x\to 0.\end{cases}$$

Отже, оскільки функція $z\operatorname{Re}z$ не має похідної в довільній точці $z\neq 0$, то вона в околі жодної точки не диференційовна, а отже, ніде не аналітична.

Розглянемо *основні властивості аналітичних функцій.*

1. Сума, добуток, різниця й частка (якщо знаменник не дорівнює нулю) скінченної кількості аналітичних функцій є функцією аналітичною.

Вірність твердження встановлюється безпосередньо перевіркою його справедливості для двох функцій і для довільної скінченної кількості функцій за допомогою методу математичної індукції.

2. Композиція аналітичних функцій (аналітична функція від аналітичної) є аналітичною функцією.

◁ Розглянемо дві аналітичні функції: $f: N \mapsto M$ (однозначну) і $F: M \mapsto W$ (теж однозначну). Отже, $F(f): N \mapsto W$ є однозначним відображенням. Крім того,

$$\frac{\partial F}{\partial z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta z} = \lim_{\Delta f \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta f} \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} = \frac{\partial F}{\partial f} \frac{\partial f}{\partial z}.$$

Оскільки через диференційовність функцій $f(z)$ та $F(z)$ дві останні границі існують і не залежать від шляху прямування до нуля приростів Δf та Δz, то існує похідна $\dfrac{\partial F}{\partial z} = \dfrac{\partial F}{\partial f} \dfrac{\partial f}{\partial z}$ ▷

3. Якщо функція $f(z)$ аналітична в області D, $\forall z \in D$ $|f'(z)| \neq 0$ і набуває значення з області G, то на множині G можна визначити аналітичну функцію $z = \varphi(\varsigma) = f^{-1}(\varsigma)$, $\varsigma \in G$, обернену до $f(z)$.

◁ Якщо $f(z)$ аналітична та $|f'(z)| \neq 0$, то виконуються умови Коші – Рімана, а отже, якобіан

$$D(x,y) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 = |f(z)|^2 \neq 0$$

у всіх точка $z \in D$.

За теоремою про обернену функцію в кожній точці існує однозначна обернена до $f(z)$ функція $\varphi = f^{-1}(\varsigma)$, $\varsigma \in G$, яка є диференційовною, а її похідна дорівнює $\varphi'(\varsigma) = (f'(z))^{-1}$ ▷

4. Якщо $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ – аналітична функція, то сім'ї ліній рівня $u(x,y) = \text{const}$ і $v(x,y) = \text{const}$ ортогональні.

◁ Розглянемо вектори

$$\text{grad}\, u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) \text{ та } \text{grad}\, v = \left(\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}\right).$$

Сприймаючи $\mathbb{C}$ як евклідів простір і враховуючи умови Коші – Рімана, одержимо

$$\langle \text{grad}\, u, \text{grad}\, v \rangle = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

Оскільки вектор-градієнт функції ортогональний до її ліній рівня, то сім'ї кривих $u(x,y) = \text{const}$ та $v(x,y) = \text{const}$ ортогональні ▷

З наведених властивостей випливає, що аналітичними функціями, зокрема, є:

1) алгебраїчні багаточлени $P_n = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1} z + a_n$, $a_k \in \mathbb{C}$;

2) раціональні функції в тих точках, де знаменник дробу $\dfrac{Q_m(z)}{P_n(z)}$ $\forall z \in \mathbb{C}$ не дорівнює нулю;

3) експоненти $e^z = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$ $\forall z \in \mathbb{C}$;

4) тригонометричні функції $\sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$, $\cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$ $\forall z \in \mathbb{C}$, $\text{tg} z = \dfrac{\sin z}{\cos z}$ та $\text{ctg} z = \dfrac{\cos z}{\sin z}$ у всіх точках визначення цих функцій;

5) гіперболічні функції $\text{sh} z = \dfrac{e^z - e^{-z}}{2}$, $\text{ch} z = \dfrac{e^z + e^{-z}}{2}$ та ін.

Окремо розглянемо логарифмічну функцію

$$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i \arg z + i2k\pi, \ k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Вона та її головне значення $\ln z = \ln|z| + i \arg z$ є неоднозначними функціями в комплексній площині. Однак, якщо зафіксувати значення k, то в довільній області, яка не містить точки $z = 0$, кожна гілка цієї функції однозначна. Розглянемо такі випадки.

1. Нехай $k = k_0$, а область D містить початок координат і деякий замкнений контур обходу γ, який охоплює точку $z = 0$. Тоді функція $w = \ln|z| + i \arg z + i2k_0\pi$ при обході в додатному напрямку вздовж контуру γ одержить приріст $[w]\big|_\gamma = \left[\ln|z| + i \arg z\right]\big|_\gamma = 2\pi i$.

Це пояснюється тим, що при обході навколо точки $z = 0$, починаючи з точки z_0 і повернувшись до неї, значення дійсної частини $\operatorname{Re} w = \ln|z|$ не змінюється, а уявна частина $\operatorname{Im} w = \arg z$ збільшує своє початкове значення на один повний оберт, тобто на 2π (рис. 2.12).

2. Якщо ж точка $z = 0$ не належить області D, то при обході точкою z довільного контуру γ, який лежить усередині D, точка $z = 0$ лежить поза контуром, а отже, величина $\arg z$ буде змінюватися, починаючи з деякого фіксованого значення $\arg z_0$ (зростати, як на рис. 2.13, або спадати, як на рис. 2.14), у певній точці z_1 досягне свого найбільшого (найменшого) значення $\arg z_1$, далі буде спадати (зростати) до найменшого $\arg z_2$ у точці z_2 і, нарешті, повернеться в точку z_0 з початковим значенням. У цьому разі приріст $\operatorname{Im} w$ буде рівним нулю.

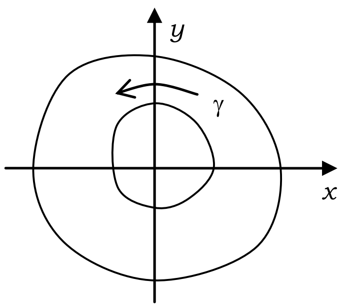


Рис. 2.12

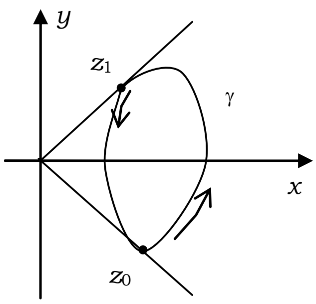


Рис. 2.13

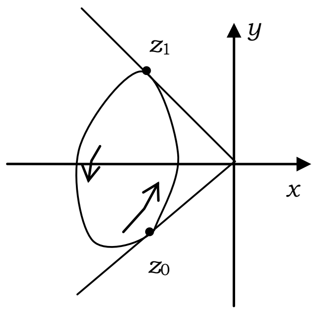


Рис. 2.14

Отже, функція $w = \operatorname{Ln} z$ аналітична в довільній частині комплексної площини, яка не містить точки $z = 0$.

Означення. Функція $f(z)$ аналітична в замкненій області D, якщо існує деяка область D_1 така, що $D \subset D_1$ і функція $f(z)$ аналітична в D_1.

Якщо область $D \subset \overline{\mathbb{C}}$, то вищевведені означення потрібно доповнити поняттям аналітичності в точці $z = \infty$.

Означення. Функція $f(z)$ аналітична в точці $z_0 = \infty$, якщо при розгляді її як функції аргументу $z' = \dfrac{1}{z}$ вона буде аналітичною в точці $z'_0 = 0$. Це рівносильно тому, що функція $\varphi(z') = f\left(\dfrac{1}{z}\right)$ аналітична в точці $z' = 0$.

Справедливість цього твердження випливає безпосередньо з розгляду функції на сфері Рімана.

Наприклад, дослідження функції $f(z)=\dfrac{1}{z^2}$ в околі точки $z=\infty$ еквівалентне дослідженню функції $\varphi(z')=f\left(\dfrac{1}{z}\right)=z'^2$ в околі точки $z'_0=0$. Оскільки $\varphi(z')=z'^2$ аналітична в точці $z'_0=0$, то $f(z)=\dfrac{1}{z^2}$ аналітична в околі точки $z=\infty$.

З доведених вище теорем і введених означень випливають такі висновки:

1) якщо $f(z)$ аналітична в області D, то умови Коші – Рімана виконуються в кожній точці області D;

2) якщо $f(z)$ однозначна в області D, а $\operatorname{Re} f(z)$ і $\operatorname{Im} f(z)$ диференційовні в D і задовольняють умови Коші – Рімана, то $f(z)$ аналітична в D.

Загальнішою є така теорема.

Теорема Лумена – Меншова. Для аналітичності функції f умови Коші – Рімана в класі неперервних функцій є достатніми. (Довести це твердження пропонуємо читачам самостійно.)

Розглянемо деякі приклади дослідження аналітичності функцій. Нехай умова теореми Лумена порушується в одній точці, наприклад, для функції $f(z)=e^{-1/z^4}$ – у точці $z=0$, тобто ця функція неперервна в усіх точках комплексної площини, окрім $z=0$. Покладемо, що $f(0)=0$.

$$w=f(z)=\begin{cases} e^{-1/z^4} & z\neq 0,\\ 0 & z=0.\end{cases}$$

Позначимо $z=x+iy$ $e^z=e^x(\cos y+i\sin y)$, запишемо приріст $f(z)$ в околі точки $z=0$ $\Delta w=e^{\frac{-1}{(\Delta x+i\Delta y)^4}}=\Delta u+i\Delta v$ і знайдемо границю відношення приростів $\dfrac{\Delta w}{\Delta z}=\dfrac{\Delta u+i\Delta v}{\Delta z}$ при різних шляхах прямування $\Delta z\to 0$.

1. Нехай $\Delta y=0$, а $\Delta x\to 0$. Тоді

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y=0}}\frac{e^{-1/\Delta x^4}}{\Delta x}+i0=0+i0=0,$$

і отже, $\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{(0,0)}=\left.\dfrac{\partial v}{\partial x}\right|_{(0,0)}=0$.

2. Якщо $\Delta x=0$, а $\Delta y\to 0$, то

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}=\lim_{\substack{\Delta x=0\\ \Delta y=0}}\frac{e^{-1/\Delta y^4}}{\Delta y}=0+i0=0,$$

звідки $\left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{(0,0)}=\left.\dfrac{\partial v}{\partial y}\right|_{(0,0)}=0$.

Отже, умови Коші – Рімана в точці $z=0$ виконуються.

3. У разі прямування до нуля вздовж прямої $y=x$ одержимо $\Delta z=\Delta x(1+i)$, а

$$(\Delta z)^4=(\Delta x)^4(1+i)^4=4(\Delta x)^4\left(\cos\left(4\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(4\frac{\pi}{4}\right)\right)=-4(\Delta x)^4.$$

Отже,

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}=\lim_{\Delta x=\Delta y\to 0}\frac{e^{-1/\Delta x^4(1+i)^4}}{\Delta x(i+1)}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{1/4\Delta x^4}}{\Delta x(1+i)}=\infty .$$

Функція $f(z)=e^{-1/z^4}$ задовольняє умови Коші – Рімана в точці $z=0$, але не диференційовна в ній.

Уведені вище операторні похідні в деяких випадках дозволяють значно спростити дослідження функції комплексної змінної. Нехай функція $f(z)$ аналітична. Назвавши функцію $\overline{f(z)}$ *антианалітичною*, доведемо важливу властивість цієї пари функцій.

Теорема. Якщо головна лінійна частина приросту функції комплексної змінної $f(z)$

$$f(z)-f(z_0)=\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)\Big|_{z=z_0}(z-z_0)+\left(\frac{\partial f}{\partial \bar z}\right)\Big|_{z=\bar z_0}(\bar z-\bar z_0) \qquad (2.14)$$

відображає круг $|z-z_0|=r$ на круг $|f(z)-f(z_0)|=R$, то $f(z)$ або $\overline{f(z)}$ є аналітичною функцією.

◁ Дійсно, якщо до (2.14) приєднати умову

$$\overline{f(z)}-\overline{f(z_0)}=\left(\frac{\partial \bar f}{\partial z}\right)\Big|_{z=z_0}(\bar z-\bar z_0)+\left(\frac{\partial \bar f}{\partial \bar z}\right)\Big|_{z=\bar z_0}(z-z_0)$$

і розв'язати одержану систему відносно $z-z_0$, то отримаємо

$$z-z_0=\left\{\left(\frac{\partial \bar f}{\partial z}\right)\Big|_{z=z_0}\big(f(z)-f(z_0)\big)-\left(\frac{\partial f}{\partial \bar z}\right)\Big|_{z=z_0}\left(\overline{f(z)}-\overline{f(z_0)}\right)\right\}\times$$

$$\times\left[\left|\frac{\partial f}{\partial z}\right|^2_{z=z_0}-\left|\frac{\partial f}{\partial \bar z}\right|^2_{z=\bar z_0}\right]^{-1}.$$

Звідси випливає, що

$$|z-z_0|^2=(z-z_0)(\bar z-\bar z_0)=\left\{\left(\left|\frac{\partial f}{\partial z}\right|^2_{z=z_0}+\left|\frac{\partial f}{\partial \bar z}\right|^2_{z=\bar z_0}\right)|f(z)-f(z_0)|^2-\right.$$

$$\left.-2\,\mathrm{Re}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)\Big|_{z=z_0}\left(\frac{\partial f}{\partial \bar z}\right)\Big|_{z=z_0}\left(\overline{f(z)}-\overline{f(z_0)}\right)^2\right]\right\}\left[\left|\frac{\partial f}{\partial z}\right|^2_{z=z_0}-\left|\frac{\partial f}{\partial \bar z}\right|^2_{z=\bar z_0}\right]^{-1}.$$

Для виконання умови твердження, тобто щоб з рівності $|z-z_0|=r$ випливала рівність $|f(z)-f(z_0)|=R$ $\forall z\in\mathbb{C}$, потрібно, щоб $2\,\mathrm{Re}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)\Big|_{z=z_0}\left(\frac{\partial f}{\partial \bar z}\right)\Big|_{z=z_0}\left(\overline{f(z)}-\overline{f(z_0)}\right)^2\right]=0$. Однак, оскільки $\overline{f(z)}\neq\overline{f(z_0)}$, то рівність має місце, коли $\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)\Big|_{z=z_0}=0$ або $\left(\frac{\partial f}{\partial \bar z}\right)\Big|_{z=z_0}=0$. Тому в першому випадку $\overline{f(z)}$ аналітична (див (2.11)), а в другому аналітичною є функція $f(z)$. Якщо ж умови $\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)\Big|_{z=z_0}=0$ та $\left(\frac{\partial f}{\partial \bar z}\right)\Big|_{z=z_0}=0$ виконуються одночасно, то це свідчить, що $f(z)=\mathrm{const}$ ▷

2.4.2. Гармонічні функції. Зв'язок між аналітичною та гармонічними функціями

Означення. Двічі неперервно диференційовна функція $\varphi(x,y)$ дійсних змінних x та y називається *гармонічною в області* D, якщо вона задовольняє рівняння Лапласа $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0$ в D.

Означення. Дві гармонічні функції $u(x,y)$ та $v(x,y)$ називаються *гармонічно спряженими,* якщо вони задовольняють умови Коші – Рімана.

Теорема. Дійсна $u(x,y)$ та уявна $v(x,y)$ частини аналітичної в області D функції $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ гармонічні в цій області.

$\triangleleft$ Нехай функція $f(z)$ аналітична в області D. Отже, її дійсна та уявна частини $\operatorname{Re} f=u$, $\operatorname{Im} f=v$ задовольняють умови Коші – Рімана (2.7) у кожній точці області. Далі, у п'ятому розділі, буде доведено, що аналітичні функції області у своїй аналітичності мають похідні довільного порядку, зокрема другі похідні. Отже, у цій області існують і другі частинні похідні їх дійсної та уявної частин. Покажемо, що функції $u(x,y)$ та $v(x,y)$ гармонічно спряжені, тобто кожна з них є розв'язком рівняння Лапласа. Для цього продиференціюємо перше рівняння системи (2.7) по x, а друге – по y та додамо почленно продиференційовані рівняння $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 v}{\partial y\partial x}$.

Оскільки функції $u(x,y)$ та $v(x,y)$ мають повні диференціали, то зміна порядку диференціювання правомірна. Отже,

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 v}{\partial y\partial x}=0 \text{ і } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$$

Аналогічно встановлюється гармонічність функції $v(x,y)$ $\triangleright$

Проте, якщо $u(x,y)$ та $v(x,y)$ – дві довільні гармонічні функції, визначені в одній області, то функція $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ не обов'язково буде аналітичною. Для того, щоб функція $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ була аналітичною, крім гармонічності функцій $u(x,y)$ та $v(x,y)$, вони мають ще задовольняти умови Коші – Рімана, тобто бути гармонічно спряженими. Ця вимога випливає з умов диференційовності аналітичної функції.

Отже, необхідними та достатніми умовами аналітичності однозначної функції комплексної змінної $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ є гармонічна спряженість функцій дійсних змінних $u(x,y)=\operatorname{Re} f(z)$ та $v(x,y)=\operatorname{Im} f(z)$.

Теорема. Для довільної гармонічної функції $u(x,y)$ в околі деякої точки $z_0\in D$ можна побудувати функцію $f(z)$, аналітичну в цьому околі, для якої функція $u(x,y)$ буде дійсною або уявною частиною.

$\triangleleft$ Нехай відома функція $u(x,y)$ є дійсною частиною аналітичної функції $f(z)$. Визначимо $v(x,y)=\operatorname{Im} f(z)$. Оскільки функції $u(x,y)$ та $v(x,y)$ гармонічно спряжені, то вони задовольняють умови Коші – Рімана, а для $v(x,y)$ існує повний диференціал

$$dv=\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy=-\frac{\partial u}{\partial y}dx+\frac{\partial u}{\partial x}dy.$$

Звідси

$$v=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} -\frac{\partial u}{\partial y}dx+\frac{\partial u}{\partial x}dy+C\,.$$

Аналогічно розв'язується задача відновлення дійсної частини аналітичної функції за відомою уявною частиною ▹

Зауваження. Очевидно, що наведене твердження вірне не тільки для околу точки, але й для довільної однозв'язної області. Разом з тим, якщо область D багатозв'язна, то відновлена дійсна чи уявна частини можуть бути неоднозначними.

Теорема. Нехай $u(x,y)$ – гармонічна в області D і $z=x+iy=\varphi(\varsigma)$ – аналітична в деякий області G функція, значення якої лежать в області D. Тоді функція $u(\varphi(\varsigma))=U(\varsigma)$ гармонічна в G.

◃ Для доведення теореми побудуємо аналітичну в D функцію f, дійсною частиною якої буде функція u. Тоді $U(\varsigma)=\operatorname{Re} f(z)$ і, оскільки $f(\varphi(\varsigma))=F(\varsigma)$ аналітична в області G як суперпозиція двох аналітичних функцій, її дійсна частина $U(\varsigma)$ є гармонічною функцією ▹

Гармонічні функції часто використовуються в задачах механіки, фізики та прикладних задачах техніки. Зокрема, температура однорідної пластини, яка знаходиться в тепловій рівновазі, електричний потенціал плоского провідника, потенціал швидкостей плоского усталеного потоку однорідної, нестисливої рідини тощо є гармонічними функціями.

2.4.3. Геометричний зміст модуля та аргументу похідної

Уведемо поняття кривої з дотичною в комплексній площині. Нехай $\varphi(t)=\alpha(t)+i\beta(t)$ – комплекснозначна функція дійсної змінної t, визначена й неперервна на деякому сегменті $[a,b]$ дійсної осі. Така функція визначає деяку неперервну криву γ у комплексній площині. Покладемо, що в деякій точці $t_0\in(a,b)$ існує похідна $\varphi(t)$ і $\varphi'(t)\neq 0$ у цій точці. Тоді в точці $z_0=\varphi(t_0)$ кривої γ існує дотична до кривої γ [6].

Для доведення твердження проведемо через точки $z_0=\varphi(t_0)$ та $z_1=\varphi(t_1)$, які лежать на кривій γ, січну. Оскільки напрямок січної збігається з напрямком вектора $\dfrac{z_1-z_0}{t_1-t_0}$, то січна має граничне положення при $t_1\to t_0$ $(z_1\to z_0)$, тоді функція $\operatorname{Arg}\dfrac{z_1-z_0}{t_1-t_0}$ має границю при $t_1\to t_0$. Однак, оскільки існує похідна функції $\varphi(t)$ і $\varphi'(t)\neq 0$, то $\lim\limits_{t_1\to t_0}\operatorname{Arg}\dfrac{z_1-z_0}{t_1-t_0}=\operatorname{Arg}\varphi'(t_0)\neq 0$. Отже, якщо похідна комплекснозначної функції дійсної змінної відмінна від нуля в деякій точці, то це означає, що в цій точці існує дотична до кривої, яку описує дана функція, і кут нахилу дотичної дорівнює куту, утвореному похідною з дійсною віссю.

Нехай функція $f(z)$ диференційовна в околі точки $z_0\in D\subset\mathbb{C}$. Тоді кожній точці $z_0\in D$ у площині w відповідає деяке одне комплексне число w_0 з області значень функції $w=f(z)$, тобто $f(z)$ відображає множину точок D із площини змінної $z=x+iy$ у множину D' із площини $w=u+iv$. Знайдемо якобіан відображення функції $w=f(z)$:

---

[6] Під дотичною розуміємо граничне положення січної, яка проходить через точку z_0.

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = u_x v_y - u_y v_x = {u_x}^2 + {v_x}^2 = \left| f'(z) \right|^2 \neq 0 .$$

З умови $\left| f'(z) \right| = 0$ не випливає, що $f'(z) = \text{const}$, оскільки $\operatorname{Arg} f(z) \neq \text{const}$, а отже, значення функції може змінюватись.

Проведемо через точку $z_0 \in D$ деяку гладку криву Жордана $\gamma \subset D$, яка описується рівняннями $z = z(t)$, $t \in [a,b]$ і $z' \neq 0$. При відображенні $w = f(z)$ вона відобразиться в криву $\gamma' \subset D'$ (образ кривої γ). При цьому γ' буде описуватися функцією $w = f(z(t))$, де $t \in [a,b]$. Отже, $w = f(z(t))$ диференційовна як складна функція змінної t. Якщо це вірно для довільної точки $t \in [a,b]$, то існує $w'(t) = f'(z(t)) \cdot z'(t)$ для всіх $a \le t \le b$ і, крім того, $w(a) = f(z(a))$, $f(z_0) = w_0$, $w'(t) = f'(z) \cdot z'(t) \neq 0$. Міркуючи аналогічно вищенаведеному, легко впевнитися, що при такому відображенні криві з дотичними відображаються у криві з дотичними.

Візьмемо на γ точку $z = z_0 + \Delta z$, образом якої буде точка $w = w_0 + \Delta w \in \gamma'$ (рис. 2.15, 2.16).

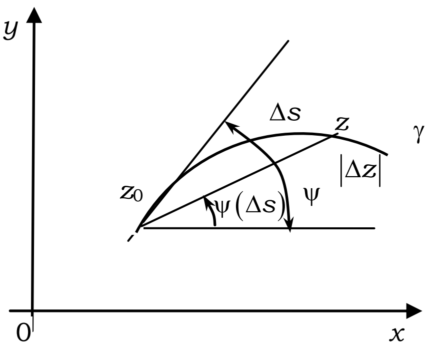


Рис. 2.15

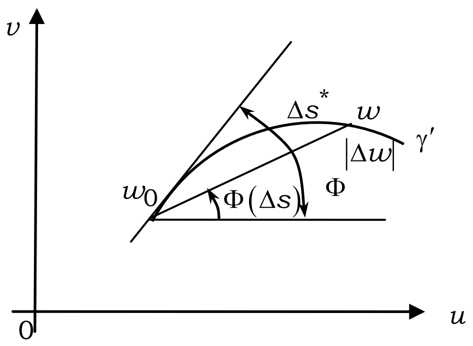


Рис. 2.16

Тоді $\dfrac{\Delta w}{\Delta z} = \left| \dfrac{\Delta w}{\Delta z} \right| \cdot e^{i \arg[\Delta w / \Delta z]}$.

Числу Δz відповідає вектор, який сполучає точки z_0 і $z_0 + \Delta z$, а числу Δw – вектор, який сполучає точки w_0 і $w_0 + \Delta w$.

За умовою існує похідна

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \left| \frac{\Delta w}{\Delta z} \right| \cdot \lim_{\Delta z \to 0} \arg\left(\frac{\Delta w}{\Delta z} \right),$$

а отже, існує границя $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \left| \dfrac{\Delta w}{\Delta z} \right| = k(z_0)$, яка не залежить від шляху прямування Δz до нуля.

З'ясуємо зміст величини $k(z_0)$. Для цього покладемо, що Δz прямує до нуля, рухаючись уздовж кривої γ. Якщо покласти, що Δs – приріст дуги γ, а ΔS – приріст дуги кривої γ', то

$$\lim_{\Delta z \to 0} \left| \frac{\Delta w}{\Delta z} \right| = \lim_{\Delta s \to 0} \left| \frac{\Delta S}{\Delta s} \right| = \lim_{\Delta s \to 0} \left| \frac{\textit{приріст} \quad \textit{дуги} \quad \gamma'}{\textit{приріст} \quad \textit{дуги} \quad \gamma} \right| = k(z_0) .$$

Отже, величина модуля похідної функції комплексної змінної $k(z_0) = \left| f'(z_0) \right|$ є *коефіцієнтом розтягу елемента дуги* γ *при відображенні* $w = f(z)$ *у точці* $z = z_0$.

Оскільки значення похідної не залежить від прямування $\Delta z \to 0$, то величина k є функцією тільки точки z_0.

Нагадаємо, що *кутом між двома кривими* в деякій точці називається кут між їх дотичними, узятий у напрямку руху проти годинникової стрілки.

Розглянемо іншу границю: $\lim\limits_{\Delta z\to 0} \arg\dfrac{\Delta w}{\Delta z} = \lim\limits_{\Delta z\to 0}\left[\arg\Delta w - \arg\Delta z\right]$.

При $\Delta z = \Delta s \to 0$ січні, що сполучають точки z_0 з точкою $z_0 + \Delta z$ та w_0 з $w_0 + \Delta w$, переходять у дотичні, що виходять з точок z_0 та w_0, а отже,

$$\lim_{\Delta z\to 0} \arg\frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z\to 0}\left[\arg\Delta w - \arg\Delta z\right] =$$
$$= \lim_{\Delta s\to 0} \underbrace{\left(\Phi(\Delta S) - \Psi(\Delta s)\right)}_{\textit{аргументи січних}} = \underbrace{\Phi - \Psi}_{\substack{\textit{аргументи}\\ \textit{дотичних}}} = \theta$$

Аргумент похідної функції комплексної змінної є кутом повороту θ дотичної до кривої γ, визначеної в точці z_0 при відображенні $w = f(z)$.

Зауваження. Якщо відображення $w = f(z)$ деякого околу точки z_0 реалізується неаналітичною, але узагальнено-диференційовною функцією, для якої існують похідні вздовж напрямків γ, що виходять з точки z_0, то в загальному випадку коефіцієнт розтягу й кут повороту відображення будуть функціями точки z_0 і напрямку виходу кривої γ з неї.

2.4.4. Узагальнення поняття аналітичних функцій комплексної змінної

Поняття диференційовності функції комплексної змінної може бути узагальненим. В основі сучасних досліджень узагальнення класичної теорії аналітичних функцій комплексної змінної лежать або загальніше означення похідної функції (І. Векуа), або система рівнянь, яка встановлює зв’язок дійсної та уявної частин цієї функції і є більш узагальненою, ніж система рівнянь Коші – Рімана (Г. Положій).

Розглянемо перший підхід. Нагадаємо, що функція $\varphi(z)$ називається неперервною за Гельдером (задовольняє умову Гельдера) по z в області D_0, якщо $|\varphi(z) - \varphi(z_0)| \le K|z - z_0|^{\alpha}$, де z, z_0 – довільні точки з D_0, $K > 0$ та α – сталі, причому $0 < \alpha < 1$.

Покладемо, що $F(z)$ та $G(z)$ – довільні, визначені в області D_0 функції, не обов’язково аналітичні. Нехай для цих функцій в області D_0 виконуються такі умови:

- $\mathrm{Im}\{F(z)G(z)\} > 0$;
- частинні похідні $\dfrac{\partial F}{\partial z}$, $\dfrac{\partial F}{\partial \bar z}$, $\dfrac{\partial G}{\partial z}$, $\dfrac{\partial G}{\partial \bar z}$ існують і неперервні за Гельдером в області D_0.

Тоді для кожної точки z_0 з області D_0 можна записати функцію
$$w(z_0) = \lambda_0 F(z_0) + \mu G(z_0), \tag{2.15}$$
де λ_0 та μ_0 – дійсні сталі.

Означення. Кажуть, що функція $w(z)$ (2.15) у точці z_0 *має* (F,G) *похідну* $\dot w(z_0)$, якщо існує скінченна границя
$$\dot w(z_0) = \lim_{z\to z_0} \frac{w(z) - \lambda_0 F(z_0) - \mu_0 G(z_0)}{z - z_0}.$$

Виходячи з цього означення, Л. Берс довів таку теорему.

Теорема Берса. Якщо існує (F,G) *похідна* $\dot{w}(z_0)$, то в точці z_0 існують операторні похідні $\frac{\partial w}{\partial z}$ та $\frac{\partial w}{\partial \bar{z}}$ і виконуються умови

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = aw + b\bar{w}, \tag{2.16}$$

$$\dot{w} = \frac{\partial w}{\partial z} - Aw - B\bar{w}, \tag{2.17}$$

де $a = \frac{\bar{F}G_{\bar{z}} - F_{\bar{z}}\bar{G}}{F\bar{G} - \bar{F}G}$, $b = \frac{-F_{\bar{z}}G + G_{\bar{z}}G}{F\bar{G} - \bar{F}G}$, $A = \frac{\bar{F}G_z - F_z\bar{G}}{F\bar{G} - \bar{F}G}$, $B = \frac{FG_z - F_zG}{F\bar{G} - \bar{F}G}$, $F_z = \frac{\partial F}{\partial z}$, $F_{\bar{z}} = \frac{\partial F}{\partial \bar{z}}$, $G_z = \frac{\partial G}{\partial z}$, $G_{\bar{z}} = \frac{\partial G}{\partial \bar{z}}$.

Якщо $\frac{\partial w}{\partial z}$ та $\frac{\partial w}{\partial \bar{z}}$ існують і неперервні в деякому околі точки z_0, а в точці z_0 виконуються умови (2.16), то $\dot{w}(z_0)$ існує та має місце умова (2.17).

Якщо $w = u + iv$, то очевидно, що рівняння (2.17) еквівалентне системі

$$\begin{cases} u_x - v_y = \alpha_{11} + \alpha_{21}v, \\ u_y + v_x = \alpha_{12} + \alpha_{22}v, \end{cases} \tag{2.18}$$

у якій $\alpha_{kj}(x,y)$ $(k,j = 1,2)$ – дійсні, неперервні за Гельдером функції.

Системи диференціальних рівнянь типу (2.18) як самостійні об'єкти досліджувалися Д. Гільбертом і Т. Карлеманом. У роботах І. Векуа досліджені такі системи за загальних припущень з метою побудови узагальнених аналітичних функцій. Якщо у визначенні (F,G) похідної покласти $F \equiv 1$, а $G \equiv i$, то $\dot{w}$ стане звичайною похідною, тобто $\dot{w} = \frac{dw}{dz}$, а умови (2.16) перетворяться на умови Коші – Рімана $\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = 0$. Отже, $(1,i)$ – похідна функції $w(z)$ – є похідною аналітичної функції у звичайному розумінні.

Іншим підходом до побудови узагальнених аналітичних функцій є теорія p,q-аналітичних функцій, розроблена Г. Положієм. Вона виявляється найповнішим аналогом із класом аналітичних функцій вигляду $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, у яких дійсна та уявна частини задовольняють систему рівнянь

$$\begin{cases} pu_x + qu_y - v_y = 0, \\ -qu_x + pu_y + v_x = 0, \end{cases} \tag{2.19}$$

де $p = p(z,y) > 0$, а $q = q(x,y)$. Такі функції називаються (p,q)-аналітичними. Якщо $p \equiv 1$, а $q \equiv 0$, то система рівнянь (2.19) перетворюється на систему рівнянь Коші – Рімана, а сама функція стає аналітичною.

У сучасній науці розроблена професором Г. Положієм теорія p,q-аналітичних функцій має фундаментальне теоретичне значення та широке практичне застосування.

ТЕМА III. ОСНОВНІ ПОЛОЖЕННЯ КОНФОРМНИХ ВІДОБРАЖЕНЬ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ

При вивченні загальних властивостей функцій комплексної змінної широко використовується їх геометричне трактування. Досліджуються питання збереження тих чи інших властивостей образів кривих при їх відображенні за допомогою аналітичних функцій. Сучасна геометрична теорія функцій комплексної змінної знайшла широке використання в різноманітних прикладних галузях, зокрема в механіці та фізиці.

Тут ми стисло зупинимося на основних положеннях геометричного трактування відображень областей з комплексної площини за допомогою аналітичних функцій – конформних відображень. Основні задачі, які виникають при побудові таких відображень, можна сформулювати так.

Пряма задача. У площині комплексної змінної z задано певну область, обмежену достатньо гладкою межею, і функцію, визначену в ній. Потрібно знайти образ області при відповідному відображенні та встановити основні характеристики відображення, наприклад такі, як консерватизм кутів і сталість коефіцієнта розтягу та ін.

Обернена задача полягає в побудові функції, яка б область, задану в площині комплексної змінної z, відображала на цілком певну область, а її відображення задовольняло б задані умови (властивості). При цьому природно постають питання існування такого відображення, його єдиності тощо. У цьому розділі коротко викладені основні положення конформних відображень, їх властивості та найуживаніші застосування.

3.1. Загальні положення неперервних відображень

Нагадаємо деякі необхідні означення та твердження.

Поняття відображення є узагальненням поняття числової функції.

Означення. Нехай A та B – два топологічні простори. Якщо кожній точці $a \in A$ поставлено у відповідність певну точку $b \in B$, то тим установлено *відображення (перетворення) A у B*. Якщо при цьому кожній точці $b \in B$ відповідає принаймні одна точка $a \in A$, то цим задано *відображення A на B*.

Для вказаних відображень загальноприйнятим є позначення $f : A \mapsto B$.

Означення. Якщо відображення області $D \subset \mathbb{C}$ на область $G \subset \mathbb{C}$ *однолисте*, тобто $\forall\ z_1 \neq z_2,\ z_1,\ z_2 \in D \subset \mathbb{C},\ f(z_1) \neq f(z_2),\ f(z_1),\ f(z_2) \in G$, то в цьому випадку можна говорити про *обернене відображення* $f^{-1}:\ G \mapsto D$, при якому $z = f^{-1}(w)$, де $w \in G$.

Означення. Будемо казати, що множина $f(A) = \{f(z) : z \in A\}$ утворює сукупність *образів* точок множини A при відображенні f, а множина $f^{-1}(w) = \{z : w = f(z) \in W\}$ є множиною *прообразів* множини G при відображенні f.

За означенням Коші *відображення f називається неперервним у точці z*, якщо для довільного околу $V(w)$ точки w існує такий окіл $U(z)$ точки z, що $f(U(z)) \subset V(w)$.

Якщо відображення $w = f(z)$ неперервне в кожній точці множини A, то кажуть. що воно неперервне на A. Очевидно, що ці означення можна звести до означення вказаного відображення за допомогою послідовностей.

Відображення буде неперервним у точці, якщо відображальна функція f неперервна в кожній точці $z \in A \subset \mathbb{C}$.

З математичного аналізу відомі таки важливі твердження:

Теорема. Якщо відображення $f : X \mapsto Y$ неперервне на X, то для довільної відкритої множини $G \subset Y$ множина $f^{-1}(G)$ відкрита.

Теорема. Якщо $f: X \mapsto Y$ неперервне на X, то для довільної компактної в X множини $A \subset X$ образ множини A $(B = f(A))$ є компактною множиною в Y.

Теорема. Якщо $f: X \mapsto Y$ неперервне на X, то образ довільної зв'язної множини $A \subset X$ є зв'язною множиною.

Означення. Однолисте неперервне *відображення* f *називається топологічним* або *гомеоморфним відображенням* X на Y, якщо відображення f^{-1} неперервне на Y.

Означення. Властивості множин, які зберігаються при топологічних відображеннях, називаються *топологічними властивостями* або *топологічними інваріантами.*

Неперервні відображення, які залишають інваріантами відкриті множини, називаються *відкритими відображеннями.*

Довільне відкрите відображення залишає відкритими інваріантами області.

Властивості множин мати граничні точки, бути відкритими, зв'язними або компактними є топологічними інваріантами.

Важливу роль відіграють взаємно однозначні відображення, тобто такі, які однозначні самі та їх обернені відображення теж однозначні. При таких відображеннях двом різним точкам однієї множини відповідають два різні образи.

Часто виникає необхідність мати справу із суперпозицією двох відображень $w = f(z) = f_1(f_2(z))$ або більшої їх кількості. Такі відображення реалізуються послідовно й на кожному етапі зберігають властивості відображальної функції.

Зазначимо, що введення на деякій множині D функції $w = f(z)$ рівнозначне введенню двох функцій дійсних змінних

$$\begin{cases} u(x,y) = \operatorname{Re} f(z), \\ v(x,y) = \operatorname{Im} f(z), \end{cases}$$

які задані на тій самій множині.

У практиці побудови відображень досить часто трапляються випадки, коли множини, на яких задано функції, є областями на сфері комплексних чисел Рімана.

3.2. Конформні відображення

3.2.1. Конформні відображення першого роду (аналітичні)

З усіх відомих класів відображень одним з найуживаніших у прикладних галузях математики є конформні відображення. У теорії Рімана поняття конформного відображення має першочергове значення. З використанням конформних відображень пов'язана велика кількість розв'язаних задач фізики, механіки, теплотехніки тощо.

Означення. Конформним відображенням першого роду (*аналітичним*) називається взаємно однозначне й неперервне відображення однієї області в іншу, яке криві з дотичними переводить у криві з дотичними та має такі властивості:

кути між відповідними кривими, що виходять з однієї точки, зберігаються як за величиною, так і за напрямком (кут повороту в кожній точці є сталою величиною, яка не залежить від напрямку виходу пари кривих з точки);

коефіцієнт розтягу є функцією тільки точки (у кожній точці він є сталою величиною).

З наведеного означення випливає, що при конформному відображенні зберігається властивість взаємної ортогональності системи кривих на площині. Дійсно, нехай в області D площини змінної $z = x + iy$ задано дві ортогональні сім'ї кривих $\varphi(z,y)=c$ та $\phi(x,y)=c$ такі, що через кожну точку області D проходить по одній кривій з кожної сім'ї. Тоді при конформному відображенні області D на деяку область у площині w $(w=f(z)=u+iv)$ образами цих кривих будуть сім'ї $\Phi(u,v)=c$ і $\Psi(u,v)=c$. Оскільки при конформному відображенні кути між кривими зберігаються, то криві сімей образів теж будуть ортогональними. Це, зокрема, стосується відображення ортогональних систем координат.

Нехай функція $w=f(z)$ конформно відображає область D на область G. В області G площини $w=u+iv$ уведемо сім'ю прямих, паралельних осям координат. Очевидно, що прообразами цих сімей у площині змінної z є криві, які описуються рівняннями

$$u(x,y)=c_1,\ v(x,y)=c_2.$$

Одержану сім'ю кривих у площині z будемо називати *конформно-еквівалентною декартовій координатній сітці.* Ураховуючи властивість збереження кутів при конформному відображенні, можемо стверджувати, що сітка, конформно-еквівалентна декартовій, утворюється двома ортогональними сім'ями кривих.

З'ясуємо, які функції можуть здійснювати конформне відображення першого роду.

Теорема. Якщо функція $w=f(z)$ здійснює конформне відображення області D в область D' з коефіцієнтом розтягу $k(z)<\infty$, то ця функція аналітична в D.

$\lhd$ Нехай функція $w=f(z)$ реалізує конформне відображення області D. Тоді $f(z)$ однозначна в D. Доведемо, що вона диференційовна, тобто існує скінченна границя $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{\Delta f}{\Delta z}=\lim\limits_{\Delta z\to 0}\left|\dfrac{\Delta f}{\Delta z}\right|\cdot e^{i\arg\frac{\Delta f}{\Delta z}}$, яка не залежить від прямування $\Delta z\to 0$. Безпосередньо з умови теореми випливає існування $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\left|\dfrac{\Delta f}{\Delta z}\right|=k(z_0)<\infty$, а з умови збереження кутів – існування границі $\lim\limits_{\Delta z\to 0}(\arg\Delta f-\arg\Delta z)=\alpha$, яка не залежить від прямування $\Delta z\to 0$. Отже, існує границя

$$f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\left|\frac{\Delta f}{\Delta z}\right|\cdot e^{i\lim\limits_{\Delta z\to 0}(\arg\Delta f-\arg\Delta z)}$$

для $\forall z\in D$, тобто $f(z)$ є аналітичною функцією $\rhd$

Теорема. Будь-яка аналітична в області функція $w=f(z)$ з похідною, відмінною від нуля, здійснює конформне відображення області своєї аналітичності на деяку іншу область D' у площині w.

$\lhd$ Нехай функція $f(z)$ аналітична в області D, тоді в ній вона однозначна (відображення однозначне) і диференційовна. Отже, існує границя $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{\Delta f}{\Delta z}$, незалежна від прямування $\Delta z\to 0$ і скінченна. За умовою $k\neq 0$, $\forall z_0\in D$. Існують границі $\lim\limits_{\Delta z=0}\left|\dfrac{\Delta f}{\Delta z}\right|=k(z_0)$ і $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\left(\arg\dfrac{\Delta f}{\Delta z}\right)=\alpha(z_0)$, де k та α – функції тільки точки z_0. Отже, для $w=f(z)$ виконуються всі умови означення конформності відображення.

Якщо $k(z_0)=0$, то в цій точці аргумент похідної не визначений $\rhd$

Для вивчення геометричних властивостей відображення $f(z)$ у розширеній комплексній площині потрібно ввести поняття кута між кривими в точці $z=\infty$.

Для цього приймають очевидну, з погляду відображення на сфері Рімана, домовленість.

Кут між кривими, які перетинаються в нескінченно віддаленій точці, приймається рівним куту, який утворюють образи цих кривих при відображенні $\varsigma = \frac{1}{z}$ у точці $\varsigma = 0$.

Поширюючи поняття конформного відображення на розширену комплексну площину, уведемо такі означення.

Означення. Функція $f(z)$ конформно відображає окіл U_{z_0} точки z_0 на окіл точки $w = \infty$, якщо функція $\frac{1}{f(z)}$ конформно відображає окіл U_{z_0} на окіл точки $w = 0$.

Означення. Функція $f(z)$ конформно відображає окіл точки $z = \infty$ на окіл точки $w = w_0$, якщо функція $w = f\left(\frac{1}{\varsigma}\right)$ конформно відображає окіл точки $\varsigma = 0$ на окіл точки $w = w_0$.

Означення. Функція $f(z)$ конформно відображає окіл точки $z = \infty$ на окіл точки $w = \infty$, якщо функція $w = \frac{1}{\varphi(\varsigma)}$ при $\varphi(\varsigma) = f\left(\frac{1}{\varsigma}\right)$ конформно відображає окіл точки $\varsigma = 0$ на окіл точки $w = 0$.

3.2.2. Відображення другого роду

Якщо при відображенні області виконуються всі умови конформного відображення, але напрямок відліку кутів змінюється на протилежний, то відображення є *конформним відображенням другого роду*. Очевидно, що всі такі відображення реалізуються за допомогою функцій, тісно пов'язаних з аналітичними. Визначимо клас таких функцій.

Розглянемо відображення функції $f(z) = \bar{z}$. Очевидно, що таке відображення довільну криву чи її частину (а отже, і довільну область, обмежену цією кривою) відображає дзеркально відносно дійсної осі (рис. 3.1, 3.2). При цьому кути між кривими зберігаються за величиною, але напрямок їх відліку змінюється на протилежний. Отже, якщо $w = f(z)$ реалізує конформне відображення першого роду, то функція $w = \overline{f(z)}$ здійснює конформне відображення другого роду.

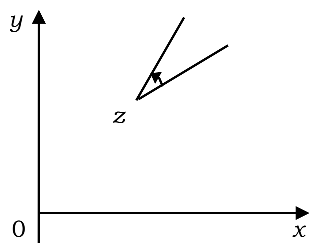


Рис. 3.1

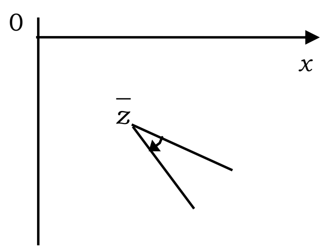


Рис. 3.2

Якщо ж $f(z)$ є аналітичною функцією, то, як легко переконатися, відображення $w = \overline{f(z)}$ буде конформним відображенням другого роду. Його можна реалізувати у два етапи. Перший етап – відображення аналітичною функцією $\Psi = f(z)$. Воно є конформним відображенням першого роду. При такому відображенні кути між кривими зберігаються як за величиною, так і за напрямком. Другий етап – відображення $w=\bar{\Psi}$, яке є відображенням другого роду, оскільки воно змінює напрямок відліку кутів на протилежний. Отже, довільне перетворення, яке реалізується за допомогою функції, значення якої є комплексно-спряженими до значень аналітичної функції, є конформним відображенням другого роду. Якщо ж функція $w=\varphi(z)$ установлює конформне відображення другого роду деякої області на іншу, то $w=\overline{\varphi(z)}$ має встановлювати відображення першого роду, а сама функція $w=\overline{\varphi(z)}$ – бути аналітичною.

Таким чином ми встановили вірність наступних тверджень.

Теорема *(пряма).* Якщо відображення встановлено за допомогою функції, значення якої комплексно-спряжені до значень деякої аналітичної функції, то таке відображення є конформним другого роду.

Теорема *(обернена).* Довільне конформне відображення другого роду реалізується за допомогою функції, комплексно-спряженої до деякої аналітичної функції.

У процесі дослідження виникають природні питання: чи буде довільне неперервне відображення, яке має властивість консерватизму кутів, аналітичним? Чи випливає з цієї властивості сталість коефіцієнта розтягу? Якщо так, то за яких умов? Якщо маємо неперервне відображення з властивістю збереження коефіцієнта розтягу, то чи буде воно конформним відображенням першого або другого роду?

Оскільки ці питання виходять за межі нашого розгляду, то ми лише зазначимо, що на них можна одержати позитивну відповідь, якщо вимагати, щоб відображення $w=u(x,y)+iv(x,y)$ мало неперервні частинні похідні від функцій u та v за змінними x та y. В іншому випадку проблема ускладнюється.

Багатьма вченими одержані окремі результати відносно загальної постановки задачі. Зокрема, доведено, що довільне неперервне та взаємно однозначне відображення з властивістю консерватизму кутів обов'язково має бути конформним першого роду, а довільне неперервне та взаємно однозначне відображення з властивістю сталості коефіцієнта розтягу – конформним відображенням першого або другого роду.

Те, що умова взаємної однозначності суттєва, випливає з відомого прикладу. Функція

$$f(z)=\begin{cases} z, \text{ якщо } \operatorname{Im} z>0; \\ \bar{z}, \text{ якщо } \operatorname{Im} z<0 \end{cases}$$

є неперервною зі сталим коефіцієнтом розтягу, але її відображення не є конформним відображенням ні першого, ні другого роду. Отже, навіть якщо відображення неперервне, однозначне, але не взаємно однозначне, то воно не буде конформним.

3.2.3. Правило обходу області

Довільна аналітична функція відображає область своєї аналітичності D на деяку область D' у площині значень w. При цьому образом межі області γ буде крива γ', яка є межею області D'. Якщо в процесі відображення ми знайшли образ межі області D, то виникає питання: у яку частину комплексної площини відносно кривої γ' відобразилась область D?

Відповідь легко одержати, скориставшись фундаментальною властивістю конформних відображень – властивістю збереження кутів, виходячи з якої, маємо правило обходу області.

Якщо при обході в додатному напрямку області D уздовж її межі γ область лежить зліва (справа), то при русі вздовж образу межі цієї області γ' (у напрямку, який відповідає напрямку руху при відображенні) образ області D (область D') має знаходитись зліва (справа) від γ'.

Довести це твердження ми пропонуємо читачу.

Зокрема, якщо область D однозв'язна, то для визначення її образу, обмеженого кривою γ', достатньо знайти образ довільної точки $z \in D$, а саме $w = f(z)$.

3.3. Геометричний зміст головної частини відображення. Квазіконформні відображення

У деякій області $G \subset \mathbb{C}$ розглянемо функцію $w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$. Будемо вимагати, щоб функції дійсних змінних $u(x,y)$ та $v(x,y)$ були диференційовні (мали повні диференціали) у деякому достатньо малому околі U точки $z_0 = x_0 + iy_0$. Тоді відображення $w = f(z)$ наближено можна подати у вигляді $w = w_0 + du + idv$, а його приріст $\Delta w = f'(z)\Delta z + \eta\Delta z$, де $\eta\Delta z$ є величиною вищого порядку малості, тобто $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \eta = 0$.

Під *головною лінійною частиною відображення* $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$ будемо розуміти вираз $w - w_0 = f'(z_0)(z - z_0)$, або, у розгорнутому вигляді,

$$\begin{cases} u - u_0 = a_1(x - x_0) + b_1(y - y_0), \\ v - v_0 = a_2(x - x_0) + b_2(y - y_0), \end{cases} \qquad (3.1)$$

де

$$u_0 = u(x_0, y_0),\ a_1 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0,\ b_1 = \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0,$$

$$v_0 = v(x_0, y_0)\ \ a_2 = \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_0,\ b_2 = \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_0.$$

Зазначимо, що в околі кожної точки, де $f'(z) \neq 0$, конформне відображення першого роду $w = f(z)$ у нескінченно малому є відображенням подібності. Дійсно, якщо в площині $\mathbb{C}$ побудуємо нескінченно малий трикутник (рис. 3.3), одна з вершин якого лежить у точці z_0, і відобразимо його конформно функцією $w = f(z)$ у площину w, то йому буде відповідати нескінченно малий криволінійний трикутник з фіксованою вершиною в точці $w_0 = f(z_0)$ (рис. 3.4). Відповідні кути цього трикутника будуть рівні кутам трикутника образу, а відношення його відповідних сторін з точністю до нескінченно малих вищих порядків будуть дорівнювати одному й тому самому сталому значенню.

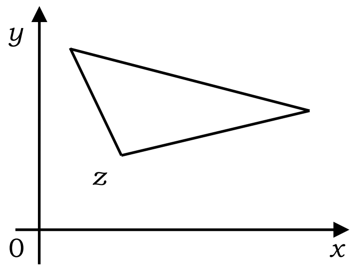


Рис. 3.3

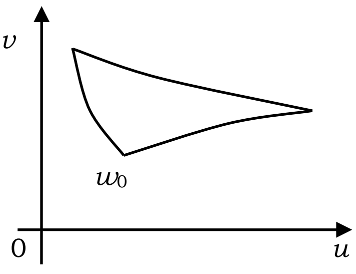


Рис. 3.4

У загальному випадку для диференційовного відображення легко довести твердження.

Теорема. Якщо функція $w = f(z)$ диференційовна в околі точки z_0 і $f'(z_0) \neq 0$, то в достатньо малому околі цієї точки відображення, що реалізується функцією $f(z)$ з точністю до малих вищих порядків, є лінійним, тобто зводиться до:

паралельного перенесення з точки z_0 у точку w_0;

повороту на кут $\arg f'(z_0)$;

розтягу (стиснення) з коефіцієнтом $k = |f'(z_0)|$.

◁ Оскільки головна лінійна частина відображення в околі точки z_0 записується у вигляді $w - w_0 = f'(z_0)(z - z_0)$, то, увівши позначення $A = f'(z_0) = \text{const} = ke^{i\alpha} \in \mathbb{C}$, $B = w_0 - f'(z_0)z_0 = \text{const} = \beta_1 + i\beta_2 \in \mathbb{C}$, запишемо $w = Az + B$. Це лінійна функція.

У четвертому розділі ми детально дослідимо такі функції та покажемо, що доданок $B = \beta_1 + i\beta_2$ реалізує паралельне перенесення з точки z_0 у точку w_0, множник $e^{i\alpha}$ – поворот на кут $\alpha = \arg f'(z_0)$, а $k = |f'(z_0)|$ – розтяг ▷

Зрозуміло, що образ довільної точки $z = x + iy$ з околу U при відображенні (3.1) буде віддалений від точки $w = f(z)$ на відстань, рівну $\varepsilon|z - z_0|$, де $\varepsilon \to 0$ при $z \to z_0$.

У нескінченно малому околі U точки z_0 розглянемо довільне коло радіусом ρ із центром у точці z_0:

$x - x_0 = \rho\cos\theta$, $y - y_0 = \rho\sin\theta$, $\rho = \text{const}$, $\theta \in [0, 2\pi]$.

У площині (u,v) образом цього кола при відображенні (3.1) буде крива

$$\begin{cases} u - u_0 = \rho(a_1\cos\theta + b_1\sin\theta) \\ v - v_0 = \rho(a_2\cos\theta + b_2\sin\theta) \end{cases}. \tag{3.2}$$

Після виключення із системи змінної θ (піднесення до квадрата й елементарних перетворень) одержимо

$$\{a_2(u - u_0) - a_1(v - v_0)\}^2 + \{b_2(u - u_0) - b_1(v - v_0)\}^2 = c^2\rho^2, \tag{3.3}$$

де $c = (a_1b_2 - a_2b_1) = \dfrac{D(u,v)}{D(x,y)}$ – якобіан відображення.

Останнє рівняння описує еліпс із центром у точці (u_0, v_0). Отже, якщо $c \neq 0$, то образом нашого кола з радіусом ρ є еліпс, який за умови рівності півосей переходить у коло, а при $c = 0$ вироджується у здвоєний відрізок. Якщо ж $a_1 = a_2 = b_1 = b_2 = 0$, то вказане коло відобразиться в точку (u_0, v_0).

З'ясуємо характер зміни відстані між точками w та w_0 при відображенні (3.2). Для цього розглянемо відношення

$$\frac{|w - w_0|}{\rho} = |(a_1\cos\theta + b_1\sin\theta) + i(a_2\cos\theta + b_2\sin\theta)| =$$

$$= \sqrt{(a_1\cos\theta + b_1\sin\theta)^2 + (a_1\cos\theta + b_1\sin\theta)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2}B + \frac{1}{2}\sqrt{B^2 - 4c^2}\sin(2\theta + \theta_0)}.$$

Тут під коренем квадратним розуміємо його арифметичне значення, $B = a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2$, а θ_0 визначається з рівняння

$$\operatorname{tg}\theta_0 = \frac{a_1^2 + a_2^2 - (b_1^2 + b_2^2)}{2(a_1b_1 + a_2b_2)}.$$

Оскільки

$$\max_{|z-z_0|=\rho}|w-w_0| = \rho\sqrt{\frac{1}{2}B+\frac{1}{2}\sqrt{B^2-4c^2}}\,,$$

$$\min_{|z-z_0|=\rho}|w-w_0| = \rho\sqrt{\frac{1}{2}B-\frac{1}{2}\sqrt{B^2-4c^2}}\,,$$

то відношення $g(z_0)$ великої півосі еліпса до малої визначається так:

$$1 \le g(z_0) = \frac{\max\limits_{|z-z_0|=\rho}|w-w_0|}{\min\limits_{|z-z_0|=\rho}|w-w_0|} = \sqrt{\frac{B+\sqrt{B^2-4c^2}}{B-\sqrt{B^2-4c^2}}} = \frac{B+\sqrt{B^2-4c^2}}{2c}\,.$$

З останньої рівності випливає, що умовою переходу побудованого еліпса в коло є $B^2-4c^2=0$, тобто

$$a_1^2+b_1^2+a_2^2+b_2^2 = 2|a_1a_2-b_1b_2|\,. \tag{3.4}$$

При $c=0$ коло стягується в точку (центр кола). Це випливає з тотожності $\left(a_1^2+b_1^2\right)\left(a_2^2+b_2^2\right)-(a_1a_2+b_1b_2)^2=(a_1b_2-a_2b_1)^2=c^2$ та умови (3.4). Оскільки при $c=0$ $a_1=a_2=b_1=b_2=0$, то перетворення (3.1) вироджується й набуває вигляду $u=u_0, v=v_0$, тобто $w=f(z)=w_0$.

Ураховуючи, що a_1,a_2,b_1,b_2 відповідають значенням частинних похідних функцій $u(x,y)$ та $v(x,y)$ у точці z_0, приходимо до висновку, що цей частинний випадок відповідає тому, що $f'(z)=0$ у точці z_0.

У випадку $c\ne 0$, якому відповідає $a_2=-\alpha b_1,\ b_2=\alpha a_1,$ з умови (3.4) знаходимо $\alpha^2\left(a_1^2+b_1^2\right)=a_1^2+b_1^2,\ c=\alpha(a_1^2+b_1^2)\ne 0$, якщо $\alpha\ne 0$. Оскільки $c\ne 0$, то $a_1^2+b_1^2\ne 0$, отже, на цю величину можна розділити обидві частини останньої рівності. Тоді одержимо $\alpha^2=1$, або $\alpha=\pm 1$. Отже, умови переходу еліпса в коло (3.4) набувають вигляду

$$a_2=-b_1,\ a_1=b_2,\ \text{при}\ \alpha=1 \tag{3.5}$$

або

$$a_2=b_1,\ a_1=-b_2,\ \text{при}\ \alpha=-1. \tag{3.6}$$

Система рівнянь (3.5) збігається з умовами Коші – Рімана в точці z_0, а $c>0$. У цьому випадку перетворення (3.1) запишеться так:

$$u=u_0+a_1(x-x_0)+b_1(y-y_0)\,, \tag{3.7}$$

$$v=v_0-b_1(x-x_0)+a_1(y-y_0)\,, \tag{3.8}$$

або

$$w=w_0+(a_1-ib_1)(z-z_0)\,. \tag{3.9}$$

Геометричний зміст такого лінійного відображення полягає в паралельному перенесенні, гомотетії та обертанні. Довільне коло з центром у точці z_0 переходить у коло з центром у точці $w_0=f(z_0)$ зі збереженням напрямку обходу.

Отже, якщо обмежитися лінійною частиною відображення $w=f(z)$, то для того, щоб однозначна функція, яка має повний диференціал у точці z_0, мала похідну за змінною z, відмінну від нуля $f'(z)\ne 0$, необхідно й достатньо, щоб довільному колу в площині змінної z із центром у точці z_0 відповідало коло в площині змінної w із центром у точці $w_0=f(z_0)$ з тим самим напрямком обходу. Легко переконатися, що в цьому випадку відображення має властивість сталості розтягу й консерватизму кутів.

Використовуючи лінійну частину відображення, просто з'ясувати геометричне трактування рівності похідної нулю в точці z_0. Оскільки в цьому випадку $a_1 = a_2 = b_1 = b_2 = 0$, то з (3.9) випливає, що відображення реалізується за формулою $w(z) = w_0$. Довільний нескінченно малий круговий окіл точки z_0 стягується в точку w_0.

Якщо ж виконуються умови (3.8), то відображення (3.1) набуває вигляду

$$w = w_0 + (a_1 + ib_1)(\bar{z} - \bar{z}_0). \tag{3.10}$$

Одержана функція комплексно-спряжена до (3.9). Вона здійснює конформне відображення другого роду. У даному випадку $c < 0$. Геометрично таке лінійне перетворення трактується як відображення круга з центром у точці z_0 у площині змінної z у круг площини змінної w із центром у точці w_0, що збігається з першою частиною відображення (3.9). Однак умова спряженості (3.10) до (3.9) указує на те, що напрямки обходу в них протилежні.

У загальному випадку (3.1) відображає коло в еліпс з відношенням великої півосі еліпса до малої, рівним $g(z_0)$. Якщо це відношення близьке до одиниці, то можна чекати, що відображення буде близьким до конформного.

Дослідження Лаврентьєва показали, що для збереження багатьох важливих властивостей аналітичних функцій достатньо обмеженості відношення $g(z_0)$ у всіх точках області G.

Клас відображень $w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, у якому функції $u(x,y)$ та $v(x,y)$ мають повні диференціали, а якобіан $\dfrac{D(u,v)}{D(x,y)} = c > 0$ у кожній точці відображуваної області, називають класом *квазіконформних* (Q-*квазіконформних*) відображень, якщо

$$0 < g(z) = \frac{B}{2c} + \sqrt{\frac{B^2}{4c^2} - 1} \le Q,$$

де Q – скінченне число.

3.4. Застосування конформних відображень при розв'язуванні крайових задач для рівняння Лапласа

Методи теорії функцій комплексної змінної мають широке застосування як у самій математиці, так і в прикладних задачах, які виникають у інших галузях науки, техніки та виробництва. Завдяки теорії аналітичних функцій було розв'язано багато важливих наукових і виробничих задач, які виникали в гідро- та аеродинаміці, теорії пружності, електростатиці тощо. Незважаючи на широке використання сучасної комп'ютерної техніки, апарат теорії функцій комплексної змінної залишається одним з потужніших методів дослідження теоретичних і прикладних задач.

Тут ми покажемо деякі можливості застосування методу конформних відображень при розв'язуванні крайових задач для рівняння Лапласа. Зокрема, доведемо властивість інваріантності конформного відображення відносно оператора Лапласа.

3.4.1. Збереження оператора Лапласа при конформному відображенні

Нехай в області $D \subset \mathbb{R}^2$ задано гармонічну функцію $\varphi(x,y)$, тобто

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0, \quad \forall (x,y) \in D.$$

За допомогою невиродженого неперервного відображення

$$\begin{cases} u = u(x,y), \\ v = v(x,y), \end{cases} \quad (x,y) \in D, \tag{3.11}$$

якобіан якого не рівний нулю

$$\frac{D(u,v)}{D(x,y)} \neq 0, \tag{3.12}$$

область D відобразимо на деяку іншу область D_1. Такому перетворенню координат можна однозначно поставити у відповідність функцію

$$w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y) \tag{3.13}$$

комплексної змінної $z = x + iy$, яка буде відображати область D на область D_1. Оскільки виконується умова (3.12), то система рівнянь (3.11) однозначно розв'язується відносно $x = x(u,v)$ та $y = y(u,v)$, тобто в області D_1 визначено функцію $\Phi(u,v) = \varphi(x(u,v), y(u,v))$. Установимо умови, які потрібно накласти на відображення (3.11), щоб $\Phi(u,v)$ була гармонічною функцією змінних u,v. Покладемо, що функції u та v двічі неперервно диференційовні в області D_1, і виразимо другі похідні φ за змінними x та y через похідні від функції Φ за новими змінними

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 \Phi}{\partial u \partial v}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v^2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial \Phi}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial \Phi}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 \Phi}{\partial u \partial v}\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v^2}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial \Phi}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial \Phi}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}. \tag{3.14}$$

Після підстановки знайдених виразів в оператор Лапласа одержимо

$$\Delta\Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u^2}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right) + 2\frac{\partial^2 \Phi}{\partial u \partial v}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right) +$$

$$+ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v^2}\left(\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right) + \frac{\partial \Phi}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + \frac{\partial \Phi}{\partial v}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right). \tag{3.15}$$

Щоб функція Φ була гармонічною, мають виконуватись умови

$$\Delta u(x,y) = 0, \quad \Delta v(x,y) = 0, \tag{3.16}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} = 0, \tag{3.17}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 \neq 0. \tag{3.18}$$

Проаналізуємо одержані умови. З рівностей (3.16) випливає, що функції $u(x,y)$ та $v(x,y)$ гармонічні в області D. З умови (3.17) знаходимо, що

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) / \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) = -\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) / \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) = \lambda(x,y), \tag{3.19}$$

де $\lambda(x,y)$ – деяка невідома функція з дійсними значеннями. Ураховуючи (3.19), із (3.18) одержимо подвійну рівність

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = \lambda^2(x,y)\left\{\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right\} \neq 0.$$

Звідси випливає, що $\lambda^2(x,y) \equiv 1$. Отже, $\lambda(x,y) = \pm 1 \ \ \forall (x,y) \in D$. Повертаючись до (3.19), при $\lambda(x,y) = 1$ знаходимо

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Гармонічні функції $u(x,y)$ та $v(x,y)$ мають задовольняти умови Коші – Рімана, або, що те ж саме, функція $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ має бути аналітичною в області D, а її відображення – конформним.

Якщо покласти $\lambda(x,y) = -1$, то з (3.19) одержимо

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y}, \ \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}.$$

З цих умов випливає, що функція $\overline{f(z)} = u(x,y) - iv(x,y)$ аналітична, тому відображення, яке реалізується функцією $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, є конформним другого роду.

Резюмуючи одержані результати, сформулюємо твердження.

Теорема. Якщо область D із площини комплексної змінної z відображається на область D_1 площини w за допомогою функції $w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, то для того, щоб рівняння Лапласа для функції $\varphi(x,y)$, визначеної в області D, переходило в рівняння Лапласа для функції $\Phi(u,v) = \varphi(x(u,v), x(u,v))$ (було інваріантним відносно відображення), потрібно, щоб відображення $w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ було конформним першого або другого роду.

Зауважимо, що при такому відображенні зберігається тільки рівняння Лапласа, а навіть простіше рівняння еліптичного типу $\Delta\varphi(x,y) + c\varphi(x,y) = 0$ зі сталим коефіцієнтом $c = \text{const} \neq 0$ після конформного відображення області переходить у рівняння зі змінним коефіцієнтом $\Delta\Phi + \varsigma(u,v)\Phi = 0$, де дійсна функція $\varsigma(u,v)$ виражається через квадрат модуля оберненої функції $z = f^{-1}(w)$.

Доведена теорема дозволяє суттєво розширити клас задач математичної фізики, які можна розв'язати точно.

Дійсно, розв'язки крайових задач для рівняння Лапласа в так званих канонічних областях (півплощина, круг) знаходяться достатньо просто.

Ураховуючи те, що при конформному відображенні рівняння Лапласа є інваріантом, достатньо побудувати конформне відображення канонічної області на ту область, у якій шукається розв'язок задачі, використати відомий розв'язок задачі для канонічної області та зробити над ним перетворення, яке відповідає відображальній функції.

В одній з наступних лекцій ми встановимо загальні умови, за яких існує відображення одиничного круга на однозв'язну область, та доведемо принципи побудови таких відображень.

ТЕМА IV. ЕЛЕМЕНТАРНІ АНАЛІТИЧНІ ФУНКЦІЇ ТА ЇХ ВІДОБРАЖЕННЯ

Вивчемо важливу тему – елементарні аналітичні функції у комплексній площині та відображення за їх допомогою характерних областей. Буде введено поняття таких основних аналітичних функцій, як лінійна та дробово-лінійна, степенева та показникова, тригонометричні та гіперболічні, а також обернені до них функції – корінь n-го степеня, логарифмічна, обернені тригонометричні та обернені гіперболічні функції. Ми розглянемо їх основні властивості, області аналітичності та однолистості, детально зупинимось на конформних відображеннях, які реалізуються за допомогою цих функцій при $f'(z) \neq 0$. Уведемо поняття поверхонь Рімана й побудуємо їх для розглянутих функцій.

4.1. Лінійна та дробово-лінійна функція в комплексній площині

4.1.1. Відображення лінійною функцією

Найпростішою з функцій, які ми будемо розглядати, є лінійна.

Означення. Функція вигляду

$$f(z) = az + b, \tag{4.1}$$

де a, b, $z \in \mathbb{C}$ та $a \neq 0$, називається *лінійною функцією* (або *цілою лінійною функцією*).

Очевидно, що $f'(z) = a \neq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$, і лінійна функція однозначна. Покладемо $a = ke^{i\alpha}$, $k = \text{const} > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $b = \beta_1 + i\beta_2$ – $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$. Тоді лінійне відображення можна розглядати як результат послідовного виконання трьох відображень: гомотетії, повороту та паралельного перенесення.

1. *Відображення гомотетії* $w_1 = kz$ з коефіцієнтом $k \in R$. Переходячи до полярної системи координат $z = re^{i\varphi}$, відображення запишемо у вигляді $w_1 = kre^{i\varphi}$. Отже, $|w_1| = \rho = kr$, $\arg w_1 = \theta = \varphi$. Тут у загальному випадку потрібно записати $\theta = \varphi + 2k\pi$. Проте робити це не доцільно, оскільки додавання періоду в даному випадку нічого не змінить у побудові відображення. Точка залишається на промені, який виходить з початку координат під кутом φ, а відстань від початку координат збільшується (якщо $k > 1$) або зменшується (якщо $k < 1$) у k разів (рис. 4.1, 4.2).

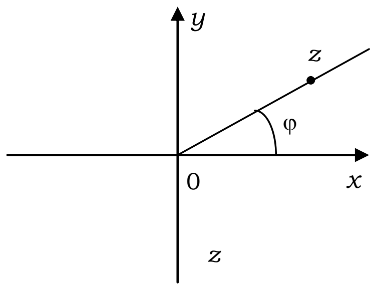


Рис. 4.1

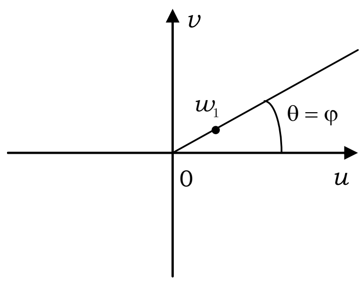


Рис. 4.2

2. *Відображення повороту на кут* α: $w_2 = w_1 e^{i\alpha}$. У цьому випадку $w_2 = |w_2| e^{i \arg w_2} = |w_1| e^{i(\arg w_1 + \alpha)}$. Отже,

$$|w_2| = |w_1| = \rho, \text{ а } \arg w_2 = \arg w_1 + \alpha.$$

При такому відображенні кут кожного з комплексних чисел w_1 збільшується на величину α, відстань від початку координат залишається незмінною (рис. 4.3).

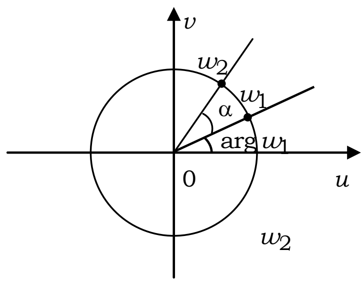


Рис. 4.3

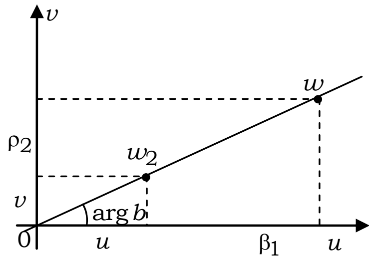


Рис. 4.4

3. *Відображення паралельного перенесення на вектор* b. Якщо покласти $w_2 = u + iv$, а $b = \beta_1 + i\beta_2$, то при паралельному перенесенні маємо

$$w = w_2 + b = u + \beta_1 + i(v + \beta_2).$$

При такому відображенні кожне комплексне число переміщується на величину β_1 уздовж дійсної осі та на β_2 – уздовж уявної. Якщо комплексні числа записати в показниковій формі, то паралельне перенесення геометрично можна тлумачити як перенесення комплексного числа z уздовж напрямку $\arg b$ на величину $|b|$ (рис. 4.4).

Наведемо деякі характерні приклади відображення цілою лінійною функцією.

I. Знайдемо загальну форму цілого лінійного відображення, яке переводить:

1) верхню півплощину на себе;
2) верхню півплощину на нижню півплощину;
3) верхню півплощину на праву півплощину;
4) праву півплощину на себе.

Доведемо, що в усіх випадках відображення однозначно визначається заданням однієї пари відповідних внутрішніх точок або двох пар граничних.

◁ 1) Розглянемо цілу лінійну функцію $w = az + b$. Для того, щоб вона переводила верхню півплощину на себе, потрібно, по-перше, щоб дійсна вісь перейшла в дійсну, тобто $w(z) \in \mathbb{R}$, якщо $z \in \mathbb{R}$. Тому $a, b \in \mathbb{R}$. По-друге, за правилом обходу границі має виконуватись умова збереження монотонності, а саме, $w'(z) = a > 0$. Отже, функція, яка відображає верхню півплощину на себе, має вигляд $w = az + b$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R} \wedge a > 0$.

2) Міркуючи аналогічно, установлюємо, що відображенням верхньої півплощини на нижню є функція $w = -az + b$, $b \in \mathbb{R} \wedge a > 0$.

3) Спочатку відобразимо верхню півплощину на себе, а потім виконаємо перетворення повороту на кут $-\frac{\pi}{2}$. У підсумку одержимо

$$w = e^{-i\frac{\pi}{2}}(az + b) = -i(az + b), \; b \in \mathbb{R} \wedge a > 0.$$

4) У цій задачі чисто уявним значенням $z = iy$ мають відповідати чисто уявні значення $w = iv$, тобто $w = az + ib$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$. Для того, щоб права півплощина переходила в себе, потрібно виконання умови $w'(z) = a > 0$. Отже, шукане відображення $w = az + ib$, $b \in \mathbb{R} \wedge a > 0$.

Оскільки в усіх прикладах функція містить два параметри, то для однозначного визначення відображення в площинах змінної z та площині відображення w потрібно задати відповідність двох пар граничних точок. Якщо встановлено відповідність внутрішніх точок, то їх достатньо задати одну пару, оскільки інша пара визначиться за властивістю симетричних точок ▷

II. Побудуємо загальну форму цілого лінійного відображення, яке переводить:

1) смугу $D = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Re} z < 1\}$ на себе;

2) смугу $G=\{z\in\mathbb{C}:-2<\operatorname{Im}z<1\}$ на себе;

3) смугу, обмежену прямими $y=x$ та $y=x-1$, на себе.

З'ясуємо, які пари точок можуть при цих відображеннях відповідати одна одній і в якому випадку ця відповідність буде однозначно визначати відображення.

$\triangleleft$ 1) Оскільки відображення $w=az+b$ має перевести D у себе, то пара прямих $x=0$ і $x=1$ перейде в пару прямих $u=0$ та $u=1$. Можливі два випадки: а) $x=0\to u=0$, $x=1\to u=1$; б) $x=0\to u=1$, $x=1\to u=0$. Розглянемо їх окремо.

а) Якщо $z=iy$, то $w=iv$, тому $iv=iay+b$, зокрема при $y=0$, $iv=b$, отже, $b=ib_1$, $a\in\mathbb{R}$, а при $z=1+iy$ маємо $w=1+iv$, $1+iv=a(1+iy)+ib_1$. Звідси знаходимо $a=1$, і шукане перетворення набуває вигляду $w=z+ib$, $b\in\mathbb{R}$.

б) При $z=iy$ $w=1+iv$ маємо $1+iv=iay+b$, зокрема при $y=0$ $1+iv=b$. Отже, $b\in\mathbb{C}$ і $b=1+ib_1$, $b_1\in\mathbb{R}$, $a\in\mathbb{R}$. При $z=1+iy$ та $w=iv$ знаходимо $iv=a(1+iy)+1+ib_1$. Звідси випливає $a=-1$. Остаточно одержуємо $w=-z+1+bi$, $b\in\mathbb{R}$.

У випадку а) прямі $x=c$, паралельні граничним прямим, переходять самі в себе, а у випадку б) одна одній відповідають паралельні прямі, симетричні відносно середньої лінії смуги $x=\frac{1}{2}$. Звідси бачимо, що для однозначного визначення відображення варто задавати відповідність пари точок, які або лежать на одній і тій самій прямій $x=\mathrm{const}\neq\frac{1}{2}$, або на прямих, симетричних відносно прямої $x=\frac{1}{2}$. Відображення не буде визначено однозначно, якщо відповідні точки будуть лежати на середній лінії смуги. Таким чином, шуканим відображенням буде або $w=z+ib$, або $w=-z+1+ib$, $b\in\mathbb{R}$.

2) З попередньої задачі відображення $w_1=z+bi$, $b\in\mathbb{R}$ або $w_2=-z+1+bi$ переводить смугу D саму в себе. Нехай w – шукане відображення смуги G у себе. Тоді відображення $w_3=-\frac{i}{3}(w+2i)$ (паралельне перенесення, поворот і розтяг) переведе смугу G у D. Таким чином, відображення w знаходимо з одного з рівнянь

$$-\frac{i}{3}(w+2i)=-\frac{i}{3}(z+2i)+bi \text{ або } -\frac{i}{3}(w+2i)=-\frac{i}{3}(z+2i)+1+bi.$$

У першому випадку $w=z-3b=z+b_1$, $b_1\in\mathbb{R}$, у другому маємо $w=-z-i-3b=-z-i+b_2$, $b_2\in\mathbb{R}$.

Щодо відповідності точок для однозначного визначення відображення, міркування аналогічні, оскільки ми звели випадок 2) до випадку 1).

3) Ширина смуги дорівнює $\cos\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}$. Розглянемо відображення повороту та розтягу $z_1=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}z=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{i}{\sqrt{2}}\right)z=(1+i)z$.

Одержали розглянуту в задачі 1) смугу D. Якщо w – шукане перетворення, то, аналогічно розглянутому вище випадку, маємо два можливі відображення: $(1+i)w=(1+i)z+bi$ або $(1+i)w=-(1+i)z+1+bi$, $b\in\mathbb{R}$. У першому випадку одержуємо $w=z+\frac{b}{2}(1+i)=z+b_1(1+i)$, $b_1\in\mathbb{R}$, у другому –

$$w=-z+\frac{b+1}{2}+i\frac{b-1}{2}=-z+1+\frac{b+1}{2}-1+\frac{i(b-1)}{2}=$$

$$= -z + 1 + \frac{b-1}{2}(1+i) = -z + 1 + \tilde{b}(1+i), \quad \tilde{b} \in \mathbb{R}.$$

Оскільки й випадок 3) зводиться до випадку 1), то проведені раніше міркування про встановлення відповідності точок для однозначного визначення відображення залишаються вірними ▹

III. Знайдемо цілу лінійну функцію $w = w(z)$, яка відображає смугу, укладену між указаними прямими, на смугу $E = \{w \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Re} w < 1\}$ при зазначеному нормуванні:

1) $x = a, \quad x = a + h; \quad w(a) = 0$;

2) $x = a, \quad x = a + h; \quad w\left(a + \frac{h}{2}\right) = \frac{1}{2} + i, \quad \operatorname{Im} w\left(a + \frac{h}{2} + i\right) < 1$;

3) $y = kx, \quad y = kx + b; \quad w(0) = 0$;

4) $y = kx + b_1, \quad y = kx + b_2; \quad w(ib_1) = 0$.

◃ 1) Оскільки ширина смуги дорівнює h, то відображення $w_1 = (z-a)\frac{1}{h}$ переводить дану смугу в множину D із задачі 2. Отже, відображення $w_1 + bi$, $b \in \mathbb{R}$ переводить смугу D у себе. З умови нормування $w(a) = 0$ одержуємо, що $b = 0$, тобто $w = \frac{z-a}{h}$.

2) Функція $w = \frac{z-a}{h} + bi$ або $w = -\frac{z-a}{h} + 1 + bi$, $b \in \mathbb{R}$ відображає вказану смугу на множину D (див. зад. 2). Тут перша умова нормування задана на середній лінії смуги, тому шукане ціле лінійне перетворення задається неоднозначно. Друга умова $\operatorname{Im} w\left(a + \frac{h}{2} + i\right) < 1$ приводить до випадку б) задачі 1. Отже, пряма $x = a$ переходить у пряму $u = 1$, а пряма $x = a + h$ – у пряму $u = 0$ (обходи прямих у площинах z і w протилежні). Тому $w(z) = -\frac{z-a}{h} + 1 + ib$.

З умови $w\left(a + \frac{h}{2}\right) = \frac{1}{2} + ib = \frac{1}{2} + i$ отримуємо $b = 1$. Отже, $w = \frac{a - z + h}{h} + i$ – шукане ціле лінійне відображення.

3) Знайдемо ширину смуги в площині z. Оскільки $\operatorname{tg}\alpha = k$, де α – кут нахилу прямих до осі Ox, то

$$h = b\cos\alpha = \frac{b}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{b}{\sqrt{1+k^2}} \text{ і } \frac{1}{h} = \frac{\sqrt{1+k^2}}{b}.$$

Повернувши смугу на кут $-\left(\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} k\right)$ і помноживши результат на $\frac{1}{h}$, одержимо смугу D із задачі 2: $w = \frac{\sqrt{1+k^2}}{b} z e^{-i\left(\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} k\right)}$.

Очевидно, що тут умова нормування виконується.

4) Якщо покласти $z_1 = z - ib_1$ і прийняти до уваги, що, як і в 3), $\operatorname{tg}\alpha = k$, то, аналогічно 3), одержимо $w = \frac{\sqrt{1+k^2}}{b_2 - b_1} e^{-i\left(\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} k\right)}(z - ib_1)$.

Умова нормування виконується ▹

IV. Знайти цілу лінійну функцію, за допомогою якої можна відобразити круг $K_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ на круг $K_R = \{w \in \mathbb{C} : |w - w_0| < R\}$ так, щоб центри кругів відповідали один одному, а горизонтальний діаметр переходив у діаметр, що утворює з напрямком дійсної осі кут α.

◁ Шукаємо функцію у вигляді $w = az + b$. За умовою точка $z = 0$ відображається в точку $w = w_0$, точка 1 – у точку $w = w_0 + Re^{i\alpha}$. З цих умов маємо систему двох рівнянь $w_0 = b,\ a + b = w_0 + Re^{i\alpha}$, з якої знаходимо: $b = w_0\ \ a = Re^{i\alpha}$. Шукана функція $w = Re^{i\alpha}z + w_0$ ▷

4.1.2. Дробово-лінійна функція

Означення. Функція вигляду

$$w = \frac{az + b}{cz + d}, \tag{4.2}$$

яку визначено в $\mathbb{C}$ при $z \neq -\dfrac{d}{c}$ та $z \neq \infty$, а при $z = -\dfrac{d}{c}$ – у розширеній комплексній площині $\overline{\mathbb{C}}$ зі значенням $w = \infty$ і така, що точці $z = \infty$ поставлено у відповідність точку $w = \dfrac{a}{c}$, називається *дробово-лінійною функцією*. Очевидним обмеженням є вимога $ad - bc \neq 0$, оскільки в такому випадку $w' = \dfrac{ad - bc}{(cz + d)^2} \equiv 0$, а отже, функція буда сталою.

Очевидно, що так побудована функція однозначна. Легко переконатися, що дробово-лінійне відображення взаємно однозначне, а функція, обернена до дробово-лінійної, також є дробово-лінійною. Дійсно, розв'язавши рівняння $f(z) = w = \dfrac{az + b}{cz + d}$ відносно z, маємо

$$f^{-1}(w) = z = \frac{-dw + b}{cw - a}.$$

Оскільки ця функція однозначна, то дробово-лінійне відображення взаємно однозначне за винятком, можливо, точки $z = -\dfrac{d}{c}$, у якій $w = \infty$, і точки $z = \infty$, у якій $w = \dfrac{a}{c}$, а обернене відображення не обмежене.

Переконаємося, що композиція дробово-лінійних функцій є дробово-лінійною функцією. Для цього покладемо $f(z) = w = \dfrac{\alpha\xi + \beta}{\gamma\xi + \delta}$, вважаючи, що $\varphi(z) = \xi = \dfrac{az + b}{cz + d}$. Після підстановки функції ξ у дробово-лінійну функцію w і нескладних перетворень одержимо

$$w(z) = \frac{Az + B}{Cz + D},$$

де $A = \alpha a + \beta c$, $B = \alpha b + \beta d$, $C = \gamma a + \delta c$, $D = \gamma b + \delta d$. Звідси

$$AD - BC = (\alpha\gamma - \beta\delta)(ad - bc) \neq 0.$$

Очевидно, що дробово-лінійна функція здійснює *гомеоморфне* (взаємно однозначне й неперервне) відображення розширеної комплексної площини на розширену комплексну площину.

Якщо чисельник дробово-лінійної функції розділити на знаменник і записати її у вигляді $w = \dfrac{a}{c} + \dfrac{bc - ad}{c}\dfrac{1}{cz + d}$, то легко бачити, що дробово-лінійне відображення складається з таких чотирьох елементарних відображень:

• гомотетії з коефіцієнтом $k = \left|\dfrac{bc - ad}{c}\right|$;

• повороту на кут $\alpha = \arg\dfrac{bc - ad}{c}$;

• паралельного перенесення на вектор $h = \dfrac{a}{c}$;

• *відображення інверсії* $\varsigma = \dfrac{1}{cz + d}$.

Оскільки з трьома першими відображеннями ми детально ознайомилися в п. 4.1.1, то розглянемо тільки відображення інверсії. Очевидно, що досить розглянути інверсію $w = \dfrac{1}{z}$. Покладемо $z = re^{i\varphi}$, а $w = \rho e^{i\phi}$. Тоді із запису $w = \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{r}e^{-i\varphi}$ одержимо $\rho = |w| = \dfrac{1}{r}$ і $\arg w = \phi = -\arg z = -\varphi$. Відображення цією функцією взаємно однозначне в усіх точках розширеної комплексної площини, причому точці $z = 0$ (або $w = 0$) відповідає точка $w = \infty$ (або $z = \infty$), а зображення інверсії можна подати у вигляді

$$w = \frac{1}{r}e^{-i\varphi}. \qquad (4.3)$$

Зі зробленого аналізу бачимо, що, на відміну від паралельного перенесення, повороту та гомотетії, які зберігають кути при відображенні, інверсія зберігає значення величини кутів, але змінює їх напрямок.

З точки $z = 0$ опишемо коло γ з одиничним радіусом. При відображенні інверсії $w = \dfrac{1}{z}$ кожна точка кола $|z| = 1$ переходить у точку кола з теж одиничним радіусом, яка симетрична відображуваній відносно дійсної осі. Одиничне коло відображається саме на себе. Точки, які знаходяться всередині кола, відображаються в точки, які знаходяться зовні кола, а точки, які лежать на промені, що виходить з початку координат під заданим кутом φ, відображаються на промінь, який виходить з початку координат під кутом $\theta = -\varphi$ (рис. 4.5, 4.6). Тому відображення $w = \dfrac{1}{z}$ називається *відображенням інверсії відносно одиничного кола.*

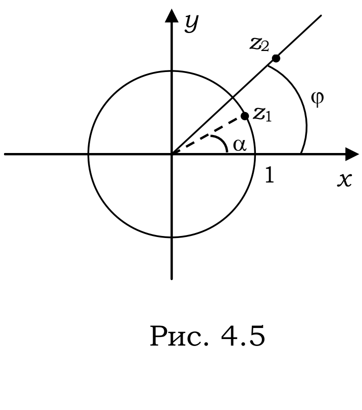


Рис. 4.5

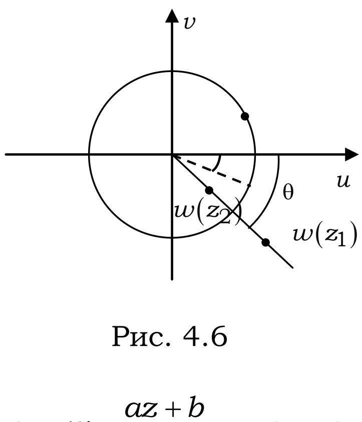


Рис. 4.6

Довільну дробово-лінійну функцію $w = \dfrac{az + b}{cz + d}$ можна подати у вигляді $w = A + B\xi$, де $A = \dfrac{a}{c}$, $B = \left|\dfrac{bc - ad}{c}\right| e^{i\left(\arg\frac{bc-ad}{c}\right)}$, $\xi = \dfrac{1}{cz + d}$.

Ураховуючи аналіз елементарних складових дробово-лінійного відображення, робимо висновок, що в $\mathbb{C}$ воно неперервне, а коефіцієнт розтягу та кут повороту є функціями тільки точки й не залежать від напрямку виходу з неї. Це відображення конформне в $\mathbb{C}$.

Для того, щоб з'ясувати питання конформності даного відображення в $\overline{\mathbb{C}}$, уведемо природне для тлумачення комплексних чисел на сфері Рімана означення.

Означення. Під кутом між довільними гладкими кривими γ_1 та γ_2 у точці $z_0 = \infty$ будемо розуміти кут між образами цих кривих у точці $w_0 = 0$ при відображенні інверсії $w = \dfrac{1}{z}$.

Це означення дозволяє стверджувати, що дробово-лінійна функція реалізує конформне відображення в усій розширеній комплексній площині $\overline{\mathbb{C}}$.

Зазначимо також таке твердження.

Теорема. Сукупність усіх дробово-лінійних відображень утворює групу, якщо за групову операцію прийняти композицію відображень.

◁ Доведення цього факту випливає безпосередньо з перевірки групових властивостей (асоціативності, існування одиниці та оберненого елемента).

Асоціативність випливає з того, що для довільних трьох дробово-лінійних відображень f_1, f_2, f_3, маємо $f_1 \circ (f_2 \circ f_3) = (f_1 \circ f_2) \circ f_3$.

Дійсно, обидві частини останньої рівності є дробово-лінійними відображеннями, які можна записати у вигляді $f_1\{f_2[f_3(z)]\}$.

Існування одиничного елемента. Одиницею є тотожне відображення $E : z \mapsto z$.

Існування оберненого елемента випливає з того, що для довільного дробово-лінійного відображення f існує таке відображення g, що $f \circ g = E$. Це відображення g і буде оберненим до f ▷

Далі розглянемо деякі необхідні поняття.

4.1.3. Точки, симетричні відносно кола

Означення. Дві точки z та z^* назвемо *симетричними відносно кола* γ радіусом R із центром у точці z_0 $(\gamma = \{z : |z - z_0| = R\})$, якщо вони лежать на промені, який виходить із центра кола, тобто $\arg(z - z_0) = \arg(z^* - z_0)$, а добуток їх відстаней від центра кола дорівнює квадрату радіуса кола

$$|z - z_0||z^* - z_0| = R^2.$$

Не порушуючи загальності міркувань, покладемо, що центр кола лежить у точці $z_0 = 0$. Тоді $z = re^{i\varphi}$, $z^* = r^* e^{i\varphi^*}$. Отже, $\varphi = \varphi^*$, а $rr^* = R^2$. Звідси випливає, що

$$z^* = \frac{R^2}{r} e^{i\varphi} = \frac{R^2}{re^{-i\varphi}} = \frac{R^2}{\bar{z}}.$$

Означення. Дві точки симетричні відносно кола з нескінченним радіусом (прямої), якщо вони розташовані на одному й тому самому перпендикулярі до цієї прямої, на однаковій відстані від неї, але по різні боки.

Якщо ж точка $z_0 = a \neq 0$, то легко бачити, що точки z та $z^* = a + \dfrac{R^2}{\overline{\overline{z - a}}}$ симетричні відносно кола $|z - a| = R$, а точку z^{**}, симетричну точці z відносно прямої, яка проходить через точку $z_0 = a \neq 0$ у напрямку, заданому одиничним вектором $\alpha = \cos\varphi + i\sin\varphi$, можна визначити з рівності $z^{**} = a + \alpha^2\left(\overline{z - a}\right)$.

Теорема (*про необхідні та достатні умови симетричності пари точок відносно кола*). Для того, щоб дві точки z та z^* були симетричними відносно кола γ, необхідно й достатньо, щоб вони були вузлами пучків кіл γ', ортогональних до кола γ.

⊲ *Необхідність*. Нехай точки z та z^* симетричні відносно кола γ радіусом R із центром у точці O. Побудуємо пучок кіл γ', які проходять через точки z та z^*, а точка $z = A$ є точкою перетину γ і γ'. Оскільки точки z та z^* симетричні, то вони лежать на одному промені, який виходить із центра кола O (рис. 4.7.) і $|Oz||Oz^*| = |OA|^2 = R^2$. Скористаємося відомою теоремою з елементарної геометрії про січну та дотичну: якщо з точки O проведено січну Oz^* і дотичну OA до кола γ', то квадрат дотичної дорівнює добутку січної Oz^* на її зовнішню частину Oz. Звідси випливає, що відрізок OA є дотичною до кола γ', а одночасно за побудовою – і радіусом кола γ. Отже, кола γ та γ' ортогональні. Через довільний вибір кола γ' можна стверджувати, що будь-яке коло, яке проходить через точки z та z^*, ортогональне до кола γ, а отже, ці точки є пучками кіл, ортогональних до кола γ.

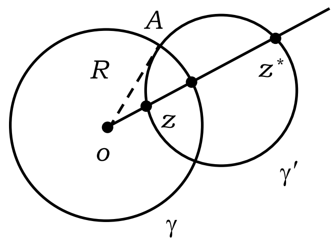


Рис. 4.7

Достатність. За умовою теореми точки z та z^* є пучками кіл, ортогональних до кола γ. Коло γ' ортогональне до кола γ, а радіус OA дотикається до γ'. За тією самою теоремою про січну та дотичну маємо, що $|Oz||Oz^*| = |OA|^2 = R^2$. Те, що ці точки лежать на промені, який проходить через центр кола, випливає з того, що одним з кіл ортогонального пучка є пряма, яка проходить через точки z та z^*, а отже, вона проходить і через точку O ⊳

Користуючись наведеним теоретичним матеріалом, розглянемо методику побудови симетричних точок на таких прикладах.

1) Знайти точки, симетричні точці $2+i$ відносно кіл:

а) $\gamma_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$; б) $\gamma_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z - i| = 3\}$.

⊲ Якщо точки z та z^* симетричні відносно кола $|z - z_0| = R$, то має місце співвідношення $z^* = z_0 + \dfrac{R^2}{\overline{\overline{z - z_0}}}$.

У випадку а) $z_0 = 0$, $R = 1$, отже, $z^* = \dfrac{1}{\overline{z}} = \dfrac{1}{\overline{\overline{2+i}}} = \dfrac{1}{2-i} = \dfrac{1}{5}(2+i)$.

У випадку б) $z_0 = i$, $R = 3$, отже, $z^* = i + \dfrac{9}{\overline{\overline{2+i-i}}} = \dfrac{9}{2} + i$ ⊳

2) Знайти симетричні образи відносно кола $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ ліній:

а) $\gamma_1 = \left\{z \in \mathbb{C} : |z| = \dfrac{1}{2}\right\}$; б) $\gamma_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z - 1| = 1\}$; в) $y = 2$.

⊲ Скористаємося формулою з попереднього прикладу.

а) Оскільки точками кола γ_1 є $z = \dfrac{e^{i\theta}}{2}$, то точками образу кола γ_1 будуть точки

$z^* = \frac{1}{\bar{z}} = 2e^{i\theta}$. Вони є точками кола з радіусом 2, з центром на початку координат.

б) Оскільки $z = 1 + e^{i\theta}$ належить заданому колу, то $z^* = x^* + iy^* = = \frac{1}{1+e^{-i\theta}} = \frac{1}{2} + \frac{i}{2}\text{tg}\frac{\theta}{2}$. Отже, симетричним образом кола γ_2 відносно кола γ є пряма, рівняння якої $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{i}{2} tg\frac{\theta}{2}$, $0 \le \theta \le 2\pi$.

в) Пряму, задану на площині рівнянням $y = 2$, зобразимо у вигляді $\gamma_3 = \{z \in \mathbb{C} \mid -\infty < \text{Re}z < +\infty, \text{Im}z = 2\}$, тобто $z = x + 2i$ (сума векторів x та $2i$ у комплексній площині). Тоді

$$z^* = x^* + iy^* = \frac{1}{x-2i} = \frac{x+2i}{x^2+4} = \frac{x}{x^2+4} + i\frac{2}{x^2+4},$$

або

$$x^* = \frac{x}{x^2+4}, \quad y^* = \frac{2}{x^2+4}.$$

Оскільки $x = \frac{2x^*}{y^*}$, то, підставивши це значення в праву частину рівності $x^* = \frac{x}{x^2+4}$, після нескладних перетворень одержимо

$$(x^*)^2 + \left(y^* - \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}, \text{ тобто } \left|z - \frac{i}{4}\right|^2 = \frac{1}{16}.$$

У даному випадку симетричним образом прямої $y = 2$ відносно γ є коло з радіусом $\frac{1}{4}$, з центром у точці $z = \frac{i}{4}$ ▹

4.1.4. Основні властивості дробово-лінійного відображення

1. *Кругова властивість.*

Теорема. (*Про кругову властивість)* При дробово-лінійному відображенні довільне коло в узагальненому розумінні відображається в коло в узагальненому розумінні.

◃ Оскільки паралельне перенесення, поворот і гомотетія довільне коло в узагальненому розумінні відображають у коло в узагальненому розумінні, то ми розглянемо тільки відображення інверсії.

Запишемо рівняння кола в комплексній площині

$$A\left(x^2 + y^2\right) + Bx + Cy + D = 0, \quad A, B, C, D \in \mathbb{R}.$$

При $A = 0$ це рівняння є рівнянням прямої, тобто кола з нескінченним радіусом.

Покладемо $z = x + iy$, а $w = u + iv$. Тоді при відображенні інверсії $w = \frac{k}{z}$ одержимо

$$z = \frac{k}{w} = \frac{k}{u+iv} = \frac{k(u-iv)}{u^2+v^2} = \frac{ku}{u^2+v^2} - i\frac{kv}{u^2+v^2}.$$

Звідси $x = \frac{ku}{u^2+v^2}$, $y = \frac{-kv}{u^2+v^2}$. Підставивши ці значення в рівняння кола, отримаємо

$$A\left(\frac{k^2u^2}{\left(u^2+v^2\right)^2}+\frac{k^2v^2}{\left(u^2+v^2\right)^2}\right)+B\frac{ku}{\left(u^2+v^2\right)}-C\frac{kv}{\left(u^2+v^2\right)}+D=0,$$

або

$$Ak^2+Bku-Ckv+D\left(u^2+v^2\right)=0.$$

Ми одержали рівняння кола у площині w, яке при $D=0$ вироджується в рівняння прямої ▹

2. *Інваріантність ангармонічного відношення четвірки точок.*

Означення. Під *ангармонічним відношенням четвірки точок у комплексній площині* будемо розуміти відношення

$$\left(z_1,z_2,z,z_3\right)=\frac{z-z_1}{z-z_2}:\frac{z_3-z_1}{z_3-z_2}.$$

Теорема *(про інваріантність ангармонічного відношення четвірки точок).* При дробово-лінійному відображенні $w=\dfrac{az+b}{cz+d}$ ангармонічне відношення четвірки точок зберігає свої значення, тобто має місце рівність

$$\left(z_1,z_2,z,z_3\right)=\frac{z-z_1}{z-z_2}:\frac{z_3-z_1}{z_3-z_2}=\frac{w-w_1}{w-w_2}:\frac{w_3-w_1}{w_3-w_2}=\left(w_1,w_2,w,w_3\right), \quad (4.4)$$

де $w_k=w\left(z_k\right)$, $(k=1,2,3)$.

◃ Розглянемо різниці

$$w-w_1=\frac{az+b}{cz+d}-\frac{az_1+b}{cz_1+d}=\frac{azcz_1+bcz_1+adz+bd-az_1cz-bcz-adz_1-bd}{(cz+b)(cz_1+b)}=$$

$$=\frac{bc(z_1-z)-ad(z_1-z)}{(cz+b)(cz_1+b)}=\frac{\left(z-z_1\right)(ad-bc)}{(cz+b)(cz_1+b)}.$$

Аналогічно

$$w-w_2=\frac{\left(z-z_2\right)(ad-bc)}{(cz+b)(cz_2+b)},\quad w_3-w_1=\frac{\left(z_3-z_1\right)(ad-bc)}{(cz_3+b)(cz_1+b)},$$

$$w_3-w_2=\frac{\left(z_3-z_2\right)(ad-bc)}{(cz_3+b)(cz_2+b)}.$$

Тоді

$$\frac{w-w_1}{w-w_2}=\frac{z-z_1}{z-z_2}\frac{(cz_2+b)}{(cz_1+b)},\quad \frac{w_3-w_1}{w_3-w_2}=\frac{z_3-z_1}{z_3-z_2}\frac{(cz_2+b)}{(cz_1+b)}.$$

Отже,

$$\frac{w-w_1}{w-w_2}:\frac{w_3-w_1}{w_3-w_2}=$$

$$=\left(\frac{z-z_1}{z-z_2}\frac{cz_2+b}{cz_1+b}\right):\left(\frac{z_3-z_1}{z_3-z_2}\frac{cz_2+b}{cz_1+b}\right)=\frac{z-z_1}{z-z_2}:\frac{z_3-z_1}{z_3-z_2} \quad ▹$$

Дробово-лінійне відображення (4.4) трьом різним точкам зі скінченної частини комплексної площини z_1,z_2,z_3 ставить у відповідність три різні точки-образи $w_1,w_2,w_3\in\mathbb{C}$. Якщо одне з чисел, z_k або w_k, перетворюється на нескінченність, то легко переконатися шляхом граничного переходу відповідних значень до нескінченності, що різниці в чисельнику й знаменнику, які містять це число, потрібно замінити одиницею. Наприклад, якщо $z_3=\infty$, $w_1=\infty$, то з (4.4) маємо

$$\frac{z-z_1}{z-z_2}:\frac{1}{1}=\frac{1}{w-w_2}:\frac{1}{w_3-w_2}.$$

Покажемо тепер, що відображення (4.4), яке встановлює відповідність між точками z_k та w_k, єдине. Припустимо від супротивного, що існують два різні дробово-лінійні відображення $w = f_1(z)$ та $w = f_2(z)$, які переводять точки z_k у w_k відповідно. Побудуємо ще одне дробово-лінійне перетворення $w = f(z)$, яке переводить точки w_k у точки 0, 1, ∞, і розглянемо суперпозиції

$$\tilde{w} = f[f_1(z)] = F_1(z), \quad \tilde{\tilde{w}} = f[f_2(z)] = F_2(z).$$

Це знов-таки дробово-лінійні функції, які переводять точки z_k у 0, 1, ∞. Розглянемо тепер відображення $\tilde{\tilde{w}} = F_2\left[F_1^{-1}(\tilde{w})\right]$, де F_1^{-1} –відображення, обернене до F_1. Воно теж є дробово-лінійним $\tilde{\tilde{w}} = \dfrac{\tilde{a}\tilde{w} + \tilde{b}}{\tilde{c}\tilde{w} + \tilde{d}}$ і переводить точки 0, 1, ∞ самі в себе. Звідси випливає, що $\tilde{\tilde{w}} = \tilde{w}$, тобто F_1^{-1} обернене до F_2. Дійсно, оскільки при $\tilde{w} = \infty$ $\tilde{\tilde{w}} = \dfrac{\tilde{a}}{\tilde{c}} = \infty$, то $\tilde{c} = 0$, $\tilde{a} \neq 0$, а оскільки при $\tilde{w} = 0$ $\tilde{\tilde{w}} = \dfrac{\tilde{b}}{\tilde{d}} = 0$, то $\tilde{b} = 0$, $\tilde{d} \neq 0$. Отже, $\tilde{\tilde{w}} = \dfrac{\tilde{a}}{\tilde{d}}\tilde{w}$. Однак при $\tilde{w} = 1$ $\tilde{\tilde{w}} = \dfrac{\tilde{a}}{\tilde{d}} = 1$. Звідси випливає, що $F_1 = F_2$ і, отже, $f_1 = f_2$.

Таким чином, ми довели наступне твердження.

Теорема. Існує одне й тільки одне дробово-лінійне відображення, яке довільно задані три різні точки z_1, z_2, z_3 переводить відповідно в довільно задані різні точки w_1, w_2, w_3.

З останньої теореми випливає, що при дробово-лінійному відображенні трійки точок z_k переходять відповідно в точки w_k $(k = 1,2,3)$, а отже, коло γ, проведене через ці точки, буде відображено в коло γ', яке проходитиме через образи цих точок. Довільне коло за допомогою дробово-лінійної функції можна однозначно відобразити на довільне коло.

Зауваження. Дробово-лінійне відображення, яке переводить коло γ у γ' і ставить у відповідність точкам z_k площини $\mathbb{C}$ точки w_k $(k = 1,2,3)$ площини w, відображає внутрішню відносно γ область на внутрішню або зовнішню відносно γ' область. Дійсно, дві точки z_1 та z_2, які лежать усередині γ, не можуть мати серед своїх образів одну точку, розташовану всередині γ', а другу зовні, оскільки образ відрізка, який сполучає точки z_1 та z_2 усередині γ, повинен би був мати спільну точку з γ', що неможливо, оскільки відображення неперервне, а γ' є образом γ.

Отже, внутрішність кола γ буде мати своїм образом внутрішність γ', якщо трійки точок z_1, z_2, та z_3 і w_1, w_2, w_3, узяті в цьому порядку, визначають на відповідних колах однакові напрямки обходу. У цьому легко переконатися, якщо розглянути кут між внутрішньою нормаллю до кола γ у точці z_1 та дугою іншого кола, яке проходить через цю точку в додатному напрямку, а потім порівняти його з напрямком обходу відповідного кута в точці w_1, який має збігатися з напрямком обходу першого кута, оскільки дробово-лінійне відображення конформне.

Користуючись ангармонічним відношенням, установимо умови, які задовольняють чотири точки, що лежать на одному колі.

Теорема. Чотири точки z_1, z_2, z_3, z_4 лежать на одному колі тоді й тільки тоді, коли їх ангармонічне відношення

$$\left(z_1, z_2, z_3, z_4\right) = \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} : \frac{z_4 - z_1}{z_4 - z_2}$$

є дійсним числом.

$\triangleleft$ Нехай чотири різні точки лежать на одному колі. Позначимо

$$\alpha = \arg\frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} = \arg\left(z_3 - z_1\right) - \arg\left(z_3 - z_2\right),$$

$$\beta = \arg\frac{z_4 - z_1}{z_4 - z_2} = \arg\left(z_4 - z_1\right) - \arg\left(z_4 - z_2\right),\ \left(0 < \alpha < 2\pi,\ 0 < \beta < 2\pi\right).$$

Очевидно, що α є тим кутом, на який потрібно повернути проти годинникової стрілки відрізок $\left(z_3, z_1\right)$ навколо точки z_3 для того, щоб він потрапив на промінь, який виходить з точки z_3 і проходить через точку z_2. Кут β має аналогічний зміст відносно другого відрізка при формальній заміні z_3 на z_4. З рис. 4.8, 4.9 видно, що $\alpha = \beta$, якщо

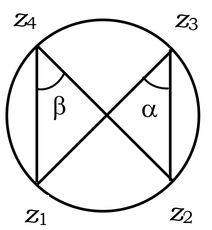


Рис. 4.8

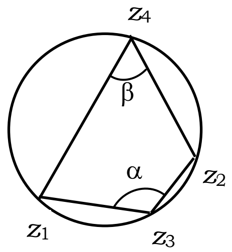


Рис. 4.9

точки z_3 та z_4 лежать на одній дузі кола, яка сполучає точки z_1 та z_2 (як вписані кути, що спираються на одну й ту саму дугу). Якщо ж точки z_3 і z_4 лежать на різних дугах, то $\alpha = \beta \pm \pi$, а $e^{i\alpha} = e^{i\beta}$, або $e^{i\alpha} = -e^{i\beta}$. У будь-якому випадку число

$$\left(z_1, z_2, z_3, z_4\right) = \left|\frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} : \frac{z_4 - z_1}{z_4 - z_2}\right| \frac{e^{i\alpha}}{e^{i\beta}}$$

є дійсним. Зворотне твердження доводиться аналогічно $\triangleright$

3. *Інваріантність симетричних точок.*

Теорема. При довільному дробово-лінійному відображенні точки, симетричні відносно кола γ, переходять у точки, симетричні відносно образу цього кола Γ.

$\triangleleft$ Ураховуючи кругову властивість (теорема про кругову властивість, п. 4.1.4) дробово-лінійного відображення та властивість збереження кутів при конформному відображенні, установлюємо, що образами ортогональних кіл γ і γ' є ортогональні кола Γ та Γ'. Отже, за теоремою про необхідні та достатні умови симетричності пари точок відносно кола з п. 4.1.3 маємо, що образи точок z та z^*, симетричних відносно кола γ, є точками w та w^*, які є вузлами пучків кіл Γ', ортогональних до кола Γ. Отже, ці точки будуть симетричними відносно кола Γ $\triangleright$

4.1.5. Існування нерухомих точок при лінійному та дробово-лінійному відображенні та класифікація невироджених дробово-лінійних відображень

Означення. Під *нерухомими точками відображення* будемо розуміти точки комплексної площини, які при відображенні переходять самі в себе.

Як лінійне, так і дробово-лінійне відображення мають такі точки.

Легко переконатися, що загальна лінійна функція $w = az + b$ при довільних

$a \in \mathbb{C}, a \neq 0$ та $b \in \mathbb{C}, b \neq 0$ має одну нерухому точку $z = \infty$. Зокрема, при $a = 1$ це відображення відповідає паралельному перенесенню. Якщо ж $b = 0$, то нерухомою точкою є $z = 0$. Це відображення складається з розтягу та повороту навколо початку координат. Покладемо тепер $a \neq 0, a \neq 1$. Тоді з рівняння $z = az + b$ маємо, що нерухомою точкою лінійної функції є точка

$$z^* = \frac{b}{1-a}.$$

З'ясуємо питання існування нерухомих точок для дробово-лінійних функцій

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}. \tag{4.5}$$

Для цього запишемо рівняння $z = \dfrac{az+b}{cz+d}$, яке при $ad - bc \neq 0$ описує всі нерухомі точки. Його розв'язком будуть два значення:

$$z_{1,2} = \frac{a-d \pm \sqrt{(a-d)^2 + 4bc}}{2c}. \tag{4.6}$$

У загальному випадку ці значення дають нам дві нерухомі точки відображення. Якщо ж підкореневий вираз дорівнює нулю, то ці значення збігаються й ми маємо одну подвійну нерухому точку. Легко бачити, що при $c = 0$ і $b \neq 0$ обидві точки зливаються з точкою $z = \infty$, яка буде нерухомою.

Нехай деяка дробово-лінійна функція $w = f(z)$ має дві нерухомі точки $z_k = w_k$ $(k = 1,2)$, а $w_3 = f(z_3) \in \mathbb{C}$ – відоме число. Запишемо ангармонічне відношення четвірки точок у вигляді

$$(z - z_1)\left(\frac{z_3 - z_2}{z - z_2}\frac{1}{z_3 - z_1}\right) = (w - z_1)\left(\frac{w_3 - z_2}{w - z_2}\frac{1}{w_3 - z_1}\right).$$

Якщо $z_2 = \infty$, то $\dfrac{z_3 - z_2}{z - z_2} = \dfrac{w_3 - z_2}{w - z_2} = 1$. Відношення четвірки точок набуває вигляду

$$z - z_1 = k(w - z_1), \tag{4.7}$$

де

$$k = \frac{z_3 - z_1}{w_3 - z_1}. \tag{4.8}$$

Якщо дробово-лінійна функція має нескінченно віддалену нерухому точку, то вона вироджується в лінійну функцію. Нехай, крім того, $z_1 = 0$ – друга нерухома точка. Тоді функцію (4.7) потрібно записати так:

$$w = \frac{1}{k} z. \tag{4.9}$$

У загальному випадку дробово-лінійне відображення, яке має дві довільні нерухомі точки z_1 та z_2, доцільно визначати у вигляді

$$\frac{w - z_1}{w - z_2} = k \frac{z - z_1}{z - z_2}. \tag{4.10}$$

Така форма запису називається *нормальною формою* запису дробово-лінійного відображення з двома нерухомими точками.

Виразимо k з формули (4.10):

$$k = \frac{w - z_1}{w - z_2}\frac{z - z_2}{z - z_1}. \tag{4.11}$$

Оскільки, як випливає з (4.8), значення k не залежить від z та w, то у формулі (4.11) покладемо $z = 0$, $w = b/d$. Ураховуючи (4.6), з (4.11) одержимо

$$k=\frac{a+d-\sqrt{(a-d)^2+4dc}}{a+d+\sqrt{(a-d)^2+4dc}}. \tag{4.12}$$

Якщо ж нерухомою точкою є $z=\infty$, то $k=\dfrac{a}{d}$.

Означення. Сім'ю кривих Γ назвемо *інваріантом відображення* $f(z)$, якщо це відображення переводить довільну криву $\gamma\in\Gamma$ у криву з цієї самої сім'ї.

Розглянемо загальний вигляд дробово-лінійного відображення, яке має дві нерухомі точки z_1 і z_2 (4.10). Залежно від значення коефіцієнта k розрізняють такі випадки:

1) Коефіцієнт k – дійсне додатне число. Таке перетворення залишає інваріантами всі прямі, які проходять через початок координат та сім'ю кіл із центром у початку координат. Очевидно, що перетворення (4.10) з дійсним коефіцієнтом k має інваріантами також кола γ, які проходять через обидві нерухомі точки z_1 та z_2. Отже, це відображення залишає інваріантами й сім'ї кіл γ', ортогональних до γ, оскільки точки z_1 та z_2 симетричні відносно γ'. Таке відображення називають *гіперболічним.*

2) Якщо $|k|=1$, тобто $k=e^{i\varphi}$, то результат відображення (4.10) відрізняється від попереднього можливим поворотом образу на кут φ. Таке відображення має назву *еліптичного.*

3) Якщо $k\in\mathbb{C}$, тобто $k=re^{i\varphi}$, причому $r\neq 1$, то легко переконатися, що для такого відображення не існує інваріантних кіл. Це відображення переводить самі в себе логарифмічні спіралі з фокусами в нерухомих точках. Воно має назву *локсодромічного.*

Якщо дві нерухомі точки z_1 та z_2 збігаються, наприклад $z_1=z_2=z_0$, то таке дробово-лінійне відображення називають *параболічним.* Зрозуміло, що тоді (4.10) не має змісту.

Побудуємо загальну формулу параболічного відображення. Нехай точка z_0 є двократною нерухомою точкою. Тоді з формули (4.6) випливає, що $(a-d)^2+4bc=0$. Для побудови загального вигляду відображення врахуємо, що оскільки функція (4.6) переводить точку z у точку w і має двократну нерухому точку z_0, то вона має відображати $z-z_0$ у $w-w_0$, а отже, повинна мати двократну нерухому точку $z^*=0$. Ураховуючи рівність дискримінанта нулю, маємо $a=d$, $b=0$, $c\neq 0$. Отже, $w-z_0=\dfrac{a(z-z_0)}{c(z-z_0)+a}$. Позначаючи $\beta=\dfrac{c}{a}$, одержимо

$$\frac{1}{w-z_0}=\frac{1}{z-z_0}+\beta.$$

Якщо $z_0=\infty$, то загальна формула дробово-лінійного відображення з подвійною нерухомою точкою набуває вигляду $w=z+\beta$. Геометрично таке параболічне відображення можна розглядати як граничний випадок перетворення з двома різними нерухомими точками z_1 та z_0, коли $z_1\to z_0$. При $z_1\to z_0$ уздовж деякої прямої Γ сім'я кіл, які проходять через точки z_1 і z_0, відображається в сім'ю кіл, які дотикаються одне до одного в точці z_0, а також до прямої, уздовж якої $z_1\to z_0$. Сім'я кіл γ' у цьому випадку перетворюється на сім'ю кіл, які дотикаються у тій самій точці до прямої Γ. Якщо $z_0=\infty$, то ці сім'ї переходять у дві сім'ї ортогональних прямих.

4.1.6. Побудова відображення канонічних областей за допомогою дробово-лінійної функції

4.1.6.1. Відображення півплощини на півплощину

Відобразимо верхню півплощину $\operatorname{Im} z > 0$ на нижню півплощину $\operatorname{Im} w < 0$. Оскільки межею як верхньої, так і нижньої півплощини є дійсна вісь, то значення функції $w \equiv u + iv = \dfrac{az+b}{cz+d}$ при зміні z уздовж дійсної осі мають бути дійсними. Це можливо лише при $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Для того, щоб визначити, куди перейде верхня півплощина, потрібно скористатися правилом обходу. Якщо монотонному зростанню x відповідає монотонне зростання значення функції u, то напрямок обходу області залишиться незмінним і верхня півплощина відобразиться сама на себе. Для того, щоб верхня півплощина відобразилась на нижню, необхідно, щоб напрямок обходу змінився на протилежний, тобто щоб відображальна функція була спадною. Похідна від дробово-лінійної функції $w' = \dfrac{ad - bc}{(cx+d)^2}$ буде додатною, якщо $ad - bc > 0$. Отже, для відображення верхньої півплощини $\operatorname{Im} z > 0$ на нижню $\operatorname{Im} w < 0$ дробово-лінійна функція повинна мати вигляд $w = \dfrac{az+b}{cz+d}$, де $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, а $ad - bc < 0$.

Легко бачити, що довільна дробово-лінійна функція залежить від трьох параметрів та її можна записати так:

$$w = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c}\frac{z-\alpha}{z-\beta} = k\frac{z-\alpha}{z-\beta}, \qquad (4.13)$$

де $k = \dfrac{a}{c}$, $\alpha = -\dfrac{b}{a}$, $\beta = -\dfrac{d}{c}$. Знаючи відповідність трьох точок у площинах z та w, можна однозначно визначити параметри дробово-лінійної функції. Наприклад, нам потрібно відобразити три точки A, B, C, розташовані на дійсній осі площини z у порядку зростання, відповідно у три точки $0, 1, \infty$ площини w (рис. 4.10).

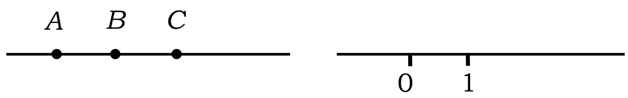


Рис. 4.10

Для визначення трьох невідомих параметрів функції складемо систему з трьох рівнянь:

$$\begin{cases} w(A) = k\dfrac{A-\alpha}{A-\beta} = 0, \\ w(B) = k\dfrac{B-\alpha}{B-\beta} = 1, \\ w(C) = k\dfrac{C-\alpha}{C-\beta} = \infty. \end{cases}$$

З першого та третього рівнянь знаходимо, що $\alpha = A$, $\beta = C$, а з другого – $k = \left(\dfrac{B-A}{B-C}\right)^{-1}$. Одержана дробово-лінійна функція

$$w = \left(\frac{B-A}{B-C}\right)^{-1}\frac{z-A}{z-C} = \frac{B-C}{B-A}\cdot\frac{z-A}{z-C}$$

відображає верхню (нижню) півплощину на верхню (нижню) півплощину при вказаному нормуванні. Якщо ми змінимо порядок розташування образів точок A, B, C, наприклад так: $A \to 0, C \to \infty, B \to 1$, то вищеотримана функція буде відображати верхню півплощину на нижню (або, відповідно, нижню на верхню).

4.1.6.2. Відображення верхньої півплощини на одиничний круг

Побудуємо функцію, яка відображає область $\mathrm{Im} z > 0$ на круг $|w| < 1$.

Оскільки межами цих областей є кола в узагальненому та звичайному розумінні (дійсна вісь відображається в одиничне коло), то для відображення виберемо дробово-лінійну функцію $w = k\dfrac{z-\alpha}{z-\beta}$. Очевидно, що при такому відображенні комплексної площини деяка точка $a \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Im} a > 0$, відобразиться в центр круга $w(a) = 0$, а симетрична їй відносно дійсної осі точка $\bar{a}$ – у точку, симетричну центру круга, тобто у нескінченно віддалену точку $|w(\bar{a})| = \dfrac{1}{|w(a)|}$. Отже, відображення набуде вигляду $w = k\dfrac{z-a}{z-\bar{a}}$. З умови, що дійсна вісь $z = x$ відображається в одиничне коло $|w| = 1$, маємо $|w(x)| = |k|\left|\dfrac{x-a}{x-\bar{a}}\right| = 1$. Оскільки $|x-a| = |x-\bar{a}|$, то $|k| = 1$. З цього випливає, що $k = e^{i\varphi}$, де φ – довільне дійсне число, яке визначає кут повороту при відображенні.

Отже, дробово-лінійна функція

$$w = e^{i\varphi}\frac{z-a}{z-\bar{a}} \tag{4.14}$$

реалізує відображення верхньої півплощини на одиничний круг так, що точка $z = a$ відображається в центр круга, а параметр φ, який визначає кут повороту, можна визначити, якщо задати додаткову умову, наприклад, кут повороту в точці $z = a$ $\arg w'(a) = \beta$ або деяку відповідність між точками границь відображених областей.

Дійсно, оскільки значення похідної дробово-лінійної функції в точці $z = a$ дорівнює

$$w'(a) = e^{i\varphi}\frac{a-\bar{a}}{(a-\bar{a})^2} = e^{i\varphi}\frac{1}{a-\bar{a}} = \frac{e^{i\varphi}}{i2\mathrm{Im}a},$$

а $\mathrm{Im}a > 0$, то $\beta \equiv \arg w'(a) = \varphi - \dfrac{\pi}{2}$ визначає кут повороту дробово-лінійного відображення в точці $z = a$.

Якщо ж покласти, що точка дійсної осі x_0 відображається в точку одиничного кола $w_0 = e^{i\beta}$, тобто $w_0 = e^{i\varphi}\dfrac{x_0-a}{x_0-\bar{a}}$, то $\beta = \varphi + \arg\dfrac{x_0-a}{x_0-\bar{a}}$, звідки $\varphi = \beta - \arg\dfrac{x_0-a}{x_0-\bar{a}}$.

4.1.6.3. Відображення одиничного круга самого на себе

Проводити таке відображення будемо за допомогою дробово-лінійної функції. Візьмемо деяку точку $a \in |z| < 1$ і відобразимо її в центр кола $|w| = 1$ комплексної площини змінної w. При цьому симетрична їй відносно одиничного кола точка

a^* відобразиться в нескінченно віддалену. Однак, оскільки $a^* = \dfrac{1}{\bar{a}}$, то відображальну функцію подамо у вигляді $w = -k_1 \dfrac{z-a}{z-1/\bar{a}} = k_1\bar{a}\dfrac{z-a}{1-z\bar{a}} = k\dfrac{z-a}{1-z\bar{a}}$. Далі будемо вимагати, щоб одиничне коло $|z|=1$ перейшло в одиничне коло $|w|=1$. Для цього покладемо $z = e^{i\theta}$ $\theta \in [0, 2\pi]$ і запишемо умову нормування $\left|w\left(e^{i\theta}\right)\right| = |k|\left|\dfrac{e^{i\theta}-a}{1-e^{i\theta}\bar{a}}\right| = 1$. Очевидно, що модуль дробу за довільних значень $a \in \mathbb{C}$ дорівнює одиниці. Отже, $|k|=1$, і шукана дробово-лінійна функція набуває вигляду

$$w = e^{i\varphi}\frac{z-a}{1-z\bar{a}}. \qquad (4.15)$$

Ця функція відображає одиничний круг $|z|<1$ на одиничний круг $|w|<1$ так, що точка $z=a$ відображається в центр круга $w=0$, а кутовий параметр φ довільний і може бути визначений з додаткової умови.

Зауваження. Якщо точка $z=a$ лежить поза одиничним колом, тобто $|a|>1$, то функція (4.15) відображає круг $|z|>1$ на круг $|w|<1$.

Для побудови відображальної функції одиничного круга $|z|<1$ на круг $|w|<R$ достатньо праву частину формули (4.15) помножити на R.

4.2. Степенева функція. Знаходження областей однолистості та побудова поверхні Рімана

4.2.1. Загальні властивості степеневої функції

Степеневою функцією називається функція $w = (z-a)^n$, $n \in \mathbb{N}$ $a \in \mathbb{C}$.

Ця функція визначена та однозначна в усій комплексній площині $\mathbb{C}$ і може бути довизначеною за неперервністю в узагальненому розумінні в точці $z=\infty$. Оскільки за допомогою перетворення паралельного перенесення $z' = z-a$ степенева функція зводиться до так званого канонічного вигляду

$$w = z^n,\ n \in \mathbb{N},$$

то далі, без обмеження загальності, степеневу функцію будемо записувати саме в такому вигляді.

Степенева функція однозначна й диференційовна в $\mathbb{C}$, отже, область, у всіх точках якої похідна відмінна від нуля, $\dfrac{dw}{dz} = nz^{n-1} \neq 0$ у $\bar{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$, степеневою функцією відображається конформно.

Покладемо $z = re^{i\varphi}$, а $w = Re^{i\theta}$. Тоді з означення степеневої функції випливає, що $R = r^n$ і $\theta = n\varphi$ $(0 < r < \infty)$. Це означає, що кожне коло радіусом r із центром у точці $z=0$ відображається в коло радіусом $R = r^n$ із центром у точці $w=0$. Якщо точка z рухається вздовж кола $|z|=r$ у додатному напрямку, тобто $\arg z$ неперервно збільшується від нуля до 2π, то точка w опише коло $|w| = r^n$ у тому самому напрямку n разів.

Побудуємо відображення області, обмеженої двома дугами AD та BC кіл $|z| = r_1$ та $|z| = r_2$, і двома променями l_1 та l_2, які виходять із початку координат і утворюють з додатною дійсною піввіссю кути φ_1 та φ_2 $(\varphi_2 - \varphi_1 = \alpha \neq 0)$, відповідно (рис. 4.11). Промені l_1 та l_2 відображаються у площині $w = u + iv$ у промені l_1' та l_2', які виходять із початку координат і мають кути нахилу $\theta_1 = n\varphi_1$ та $\theta_2 = n\varphi_2$ (рис. 4.12), а дуги AD та BC відображаються в дуги $A'D'$ і $B'C'$ кіл $|w| = r_1^{\,n}$ та $|w| = r_2^{\,n}$. Отже, при відображенні $w = z^n$ кут $\varphi_2 - \varphi_1 = \alpha$, утворений довільним променями l_1 та l_2, збільшиться в n разів і стане рівним $\beta = \theta_2 - \theta_1 = n\varphi_2 - n\varphi_1 = n\alpha$

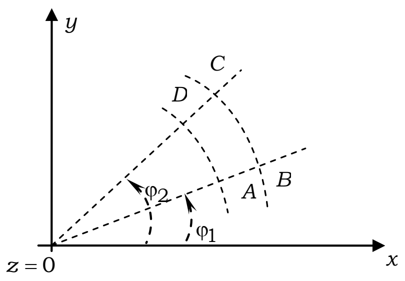


Рис. 4.11

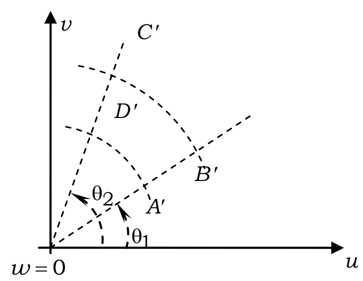


Рис. 4.12

Звідси легко зробити висновок, що в точці $z = 0$ конформність відображення порушується.

Дійсно, розглянемо дві криві γ_1 та γ_2, які перетинаються в точці $z = 0$ під кутом φ_0 і лежать у секторі нескінченно малого околу точки $z = 0$. Функція $w = z^n$ відображає ці криві у криві Γ_1 та Γ_2, які перетинаються в точці $w = 0$ під кутом $\Phi_0 = n\varphi_0$. Отже, умова консерватизму кутів порушується (рис. 4.13, 4.14).

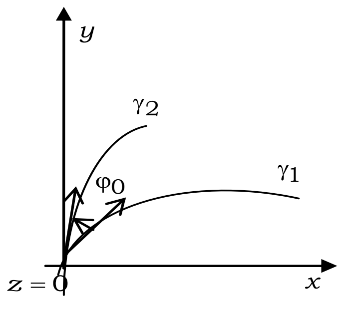


Рис.4.13

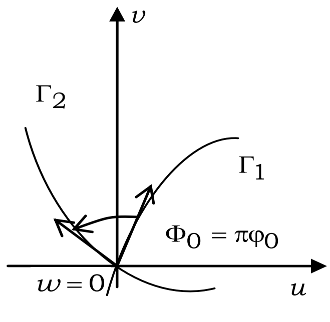


Рис. 4.14

4.2.2. Область однолистості та поверхня Рімана

Визначимо області однолистості степеневої функції. Спочатку знайдемо границі областей D_k, у яких $\forall z_1, z_2 \in D_k$, і таких, що при $z_1 \neq z_2$ виконується умова $w(z_1) \neq w(z_2)$. Нехай $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$ і $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$. Якщо $|z_1| \neq |z_2|$ то $w(z_1) \neq w(z_2)$ при всіх значеннях φ_1 і φ_2. Покладемо $|z_1| = |z_2|$ і знайдемо, при яких значеннях φ_1 і φ_2 $w(z_1) \neq w(z_2)$. З рівності $w(z_1) = w(z_2)$ маємо $e^{in\varphi_1} = e^{in\varphi_2}$, тобто $n\varphi_2 = n\varphi_1 + 2k\pi$, або $\varphi_2 = \varphi_1 + \dfrac{2k\pi}{n}$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Звідси випливає, що при довільному $\alpha \in \mathbb{R}$ в області

$$D_k = \left\{ z : \alpha + \frac{2k\pi}{n} < \arg z < \alpha + \frac{2(k+1)\pi}{n},\ k = \overline{0, n-1} \right\}$$

функція $w = z^n$ однолиста. Надалі, якщо це не викликатиме непорозумінь, для однозначності трактування будемо вважати, що $\alpha = 0$ (рис. 4.15).

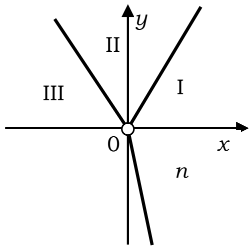


Рис. 4.15

Отже, у всій комплексній площині степенева функція однозначна, але не взаємно однозначна, оскільки кожному значенню w, крім $w = 0$ та $w = \infty$, відповідає n значень змінної з площини $\mathbb{C}$. З цієї властивості випливають наслідки, неможливі для взаємно однозначних відображень. Наприклад, довільна незамкнена дуга одиничного кола $|z| = 1$, $\frac{2k\pi}{n} \le \arg z < \frac{2(k+1)\pi}{n}$, де k – одне зі значень $k = \overline{0, n-1}$, при відображенні $w = z^n$ переходить у замкнене коло $|w| = 1$.

Отже, для взаємної однозначності відображення області D функцією $w = z^n$ необхідно й достатньо, щоб ця область не містила точок з рівними модулями та аргументами, які відрізняються на величину, кратну $\frac{2\pi}{n}$.

Ідею розгляду багатозначних і неоднолистих функцій як однозначних на деякій абстрактній поверхні запропонував Б. Ріман. Загальна теорія побудови ріманових поверхонь виділяється в окремий розділ, який виходить за межі нашого підручника. Тому ми обмежимося тільки самими елементарними фактами, які будуть потрібними нам далі.

Для того, щоб зробити відображення $w = z^n$ усієї площини взаємно однозначним і з'ясувати, що буде образом усієї площини при такому відображенні, уведемо поняття поверхні Рімана.

Означення. Поверхнею Рімана відображення $w = f(z)$ називається абстрактний геометричний образ, складений з образів областей однолистості цієї функції таким чином, що відповідність між точками z комплексної площини й точками поверхні Рімана неперервна та взаємно однозначна.

Зауважимо (без доведення), що довільну аналітичну функцію можна розглядати як взаємно однозначне відображення на її рімановій поверхні. Для цього достатньо різні значення, яких набуває ця функція в одній точці, відносити до різних листів поверхні Рімана.

Побудуємо поверхню Рімана степеневої функції. За область однолистості виберемо при $\alpha = 0$ першу ($k = 0$) з указаних областей однолистості $D_0 = \left\{ z : 0 < \arg z < \frac{2\pi}{n} \right\}$ і знайдемо образи її границі. Очевидно, що промінь $\arg z = 0$ залишиться променем $\arg w = 0$, а промінь $\arg z = \frac{2\pi}{n}$ стане променем $\arg w = 2\pi$. Оскільки ці промені відповідають різним прообразам, то ми сприйматимемо їх як різні лінії. Тому образом області D_0 вважатимемо всю комплексну площину $\overline{\mathbb{C}}$ з розрізом уздовж дійсної додатної півосі. Точки границь при цьому відображаються у верхній та нижній береги розрізу. Відображаючи наступні області однолистості, ми прийдемо до того, що образами кожної наступної області будуть області, обмежені парами променів $2k\pi$ та $2(k+1)\pi$ ($k=\overline{1,n-1}$). Це будуть знов-таки площини з розрізами вздовж дійсних додатних півосей. Щоб одержати поверхню Рімана, нам потрібно склеїти образи областей однолистості за неперервністю. Для цього підкладемо лист другого образу під перший, третій – під другий і т. д., n-й – під $(n-1)$-й так, щоб розрізи збіглися, і умовно склеїмо нижній берег попереднього з верхнім наступного, а оскільки функція $w=z^n$ неперервна на дійсній додатній півосі в площині $\overline{\mathbb{C}}$, то нижній берег останнього умовно склеїмо з верхнім першого. Схему поверхні Рімана функції $w=z^n$ подано на рис. 4.16.

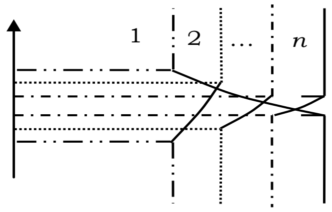


Рис. 4.16

Одержаний за такою побудовою n-листий геометричний образ і буде поверхнею Рімана функції $w=z^n$. Відображення всієї комплексної площини на цю поверхню конформне, за винятком точок $z=0$ та $z=\infty$, у яких порушується консерватизм кутів.

Для функції $w=z^2$ областями однолистості є верхня ($\operatorname{Im} z>0$) та нижня ($\operatorname{Im} z<0$) півплощини (рис. 4.17).

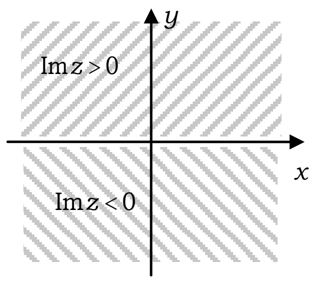


Рис. 4.17

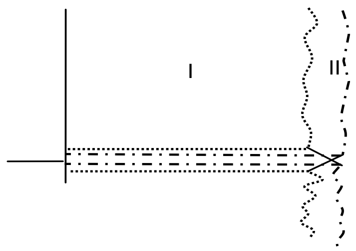


Рис. 4.18

Образами кожної з областей однолистості є вся розширена комплексна площина $\overline{\mathbb{C}}$. Вона реалізує конформне відображення кожної з півплощин $\operatorname{Im} z>0$ та $\operatorname{Im} z<0$ на всю площину з розрізом уздовж додатної дійсної півосі. При цьому таке відображення в околі точки $z=0$ подвоює величину кутів. Об'єднаємо два образи областей однолистості функції $w=z^2$ у поверхню Рімана. Підкладемо під перший лист (образ $\operatorname{Im} z>0$) другий (образ $\operatorname{Im} z<0$) так, щоб розрізи збігалися. Тепер кожній точці площини відповідатиме деяка точка (образ) верхнього або нижнього листа. Очевидно, що образом границі $\varphi=\pi$ верхнього листа буде нижній берег розрізу першого листа, верхній берег розрізу другого листа – образом $\varphi=2\pi$ – границі нижнього листа, яка збігається з образом $\varphi=0$ (верхній берег першого листа). Відповідно до цього умовно склеїмо береги розрізів хрест-навхрест. Ми одержали геометричний образ площини z при відображенні функцією $w=z^2$, який є поверхнею Рімана (рис. 4.18).

Для пояснення поведінки образів замкнених кривих на поверхні Рімана розглянемо відображення цією функцією одиничного кола з центром у початку координат. Верхнє півколо $(0<\varphi<\pi)$ перейде в коло $|w|=1$ з виключеною точкою $w=1$, яка лежить на першому листі поверхні Рімана. Нижнє півколо $(\pi<\varphi<2\pi)$ відображається в те саме коло на другому листі. Далі склеюємо чотири вільні кінці цих кіл хрест-навхрест, додаючи при цьому точки, які вважаємо різними, хоча геометрично вони збігаються. Одержана замкнена та умовно вільна від самоперетину крива, що лежить на двох листах поверхні Рімана, і буде взаємно однозначним образом кола $|z|=1$.

На підтвердження справедливості гіпотези про відсутність самоперетинів на поверхні Рімана наведемо геометричну аналогію. Якщо розглядати плоску фігуру, зображену на рис. 4.19, як проекцію просторової петлі, то очевидно, що її точку самоперетину недоцільно брати до уваги.

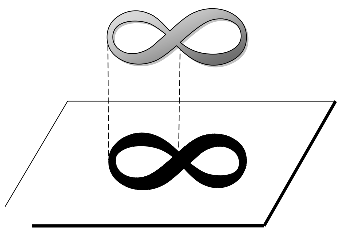


Рис. 4.19

4.2.3. Відображення сітки полярних і декартових координат

Легко переконатися, що функція $w=z^2$ сітку полярних координат відображає на себе, а прообразами сім'ї прямих, паралельних координатним лініям $u=c_1$ та $v=c_2$ у площині змінної z (рис. 4.20), є дві сім'ї гіпербол $x^2-y^2=c_1$ та $2xy=c_2$, які зображено на рис. 4.21.

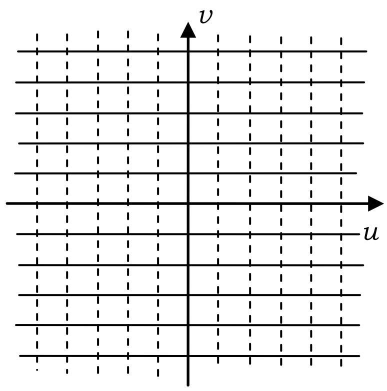


Рис. 4.20

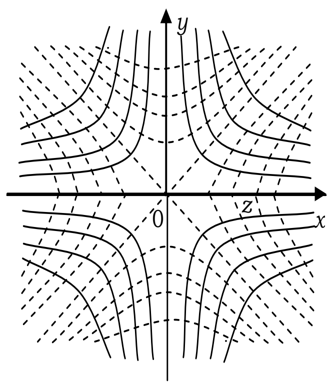


Рис. 4.21

Сім'я прямих, паралельних декартовим координатним осям, задана у площині змінної z, відобразиться у дві сім'ї парабол. Поклавши $z=c+it$ $(-\infty<t<\infty)$, одержимо сім'ї $u=c^2-t^2$, $v=2ct$ $(-\infty<t<\infty)$.

Якщо з цього параметричного запису виключити параметр t, то маємо $v^2=4c^2\left(c^2-u\right)$. Це рівняння параболи, вісь якої напрямлена вздовж дійсної від'ємної півосі, а фокус розташовується в початку координат з параметром

$p = 2c^2$. Аналогічно, якщо покладемо $z = t + ic'$, то одержимо параболу $v^2 = 4c'^2\left(u + c'^2\right)$ з віссю, напрямленою вздовж дійсної додатної півосі з фокусом у початку координат і параметром $p' = c'^2$ (рис. 4.22, 4.23).

Розглядаючи відображення $w = z^2$, потрібно не забувати, що воно не взаємно однозначне, і кожна точка w має два прообрази. Зокрема, прообразом параболи $v^2 = 4c^2\left(c^2 - u\right)$ є дві прямі, симетричні відносно уявної осі, тобто прямі $z = c + it$ та $z = c - it$; прообразом параболи $v^2 = 4c'^2\left(u + c'^2\right)$ є дві прямі, симетричні відносно дійсної осі, а саме прямі $z = t + ic'$ та $z = t - ic'$. Якщо ж ми розглядаємо тільки образ деякої півплощини, обмеженої прямою, що проходить через початок координат, то відображення буде взаємно однозначним.

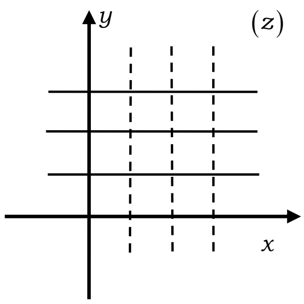


Рис. 4.22

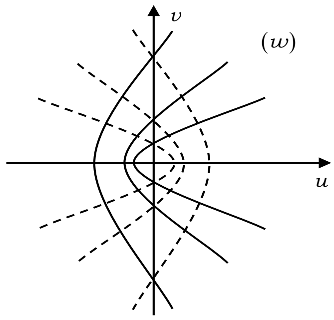


Рис. 4.23

З того, що сім'ї прямих ортогональні, а відображення конформне, випливає, що одержані сім'ї парабол взаємно ортогональні.

Користуючись досить простими міркуваннями (зробити самостійно), можна показати, що прообразом сітки декартових координат $u = c$, $v = c'$ (рис. 4.24) у площині $w = u + iv$ ($w = z^n$, $u = r^n \cos n\varphi$, $v = r^n \sin n\varphi$, $z = re^{i\varphi}$) є дві множини кривих, які описуються рівняннями

$$r = \sqrt[n]{\frac{c}{\cos n\varphi}}, \; r = \sqrt[n]{\frac{c'}{\sin n\varphi}}.$$

Зокрема, при $n = 2$ вони є звичайними гіперболами. На рис. 4.25 ці криві зображені при $n = 5$ (ті, що відповідають першому рівнянню, позначено пунктирними лініями, а другому – суцільними).

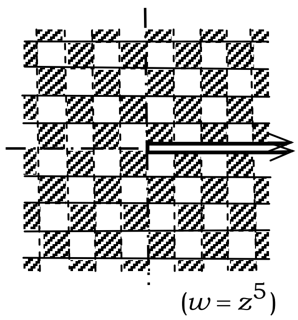


Рис. 4.24

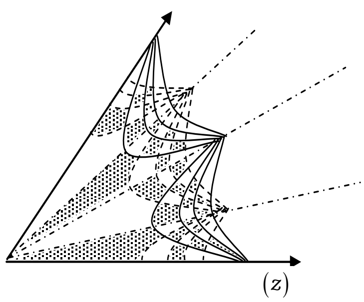


Рис. 4.25

4.2.4. Відображення кругових луночок (двокутників)

Відображення, що розглядається далі, є послідовним виконанням кількох елементарних перетворень: дробово-лінійного w_1, повороту на заданий кут w_2 і завершального піднесення до степеня.

Круговою луночкою (двокутником) будемо називати плоску фігуру, утворену перетином дуг двох кіл з необов'язково рівними радіусами.

Очевидно, що кути при вершинах двокутника рівні між собою. Нехай дано двокутник з вершинами в точках $A(z_1)$ та $B(z_2)$ і кутом при вершинах, рівним α. Потрібно знайти конформне відображення області даного двокутника на верхню півплощину.

За допомогою цілої лінійної функції $w_1 = (z - z_1)e^{i\arg(z_1 - z_2)}$ вершину луночки z_1 відобразимо в початок координат і повернемо луночку на кут $\arg(z_1 - z_2)$ до суміщення другої вершини з точкою $w_1(z_2)$ дійсної осі, а саме $w_1(z_2) = |z_1 - z_2|$. Відображення $w_2 = \dfrac{w_1}{w_1 - w_1(z_2)}$ точку $w_1(z_2)$ відображає у $w_2 = \infty$. Отже, за круговою властивістю дробово-лінійного відображення дуги кіл, що обмежують луночку, відобразяться в дуги кіл з нескінченним радіусом, тобто у промені, що виходять із початку координат. Це означає, що межа луночки відображається на сторони кута з вершиною в початку координат і, відповідно до властивості збереження кутів, розхил цього кута дорівнює α. Причому відрізок $[0, w_1(z_2)]$ відображається в додатну піввісь $\operatorname{Im} w_2 = 0$. Отже, указана дробово-лінійна функція відображає луночку на внутрішність кута, що визначається правилом обходу.

Відображення $w_3 = w_2 e^{i\theta}$ повертає кут проти руху стрілки годинника на величину θ так, що нижній промінь, який його обмежує, збігається з додатною дійсною піввіссю, а степенева функція $w = (w_3)^{\frac{\pi}{\alpha}}$ розширює кут до розгорнутого.

4.3. Відображення за допомогою функції Жуковського

Функція Жуковського є однією з функцій, що знайшли широке застосування при побудові розв'язків складних задач гідро- та газової динаміки. За її допомогою було розв'язано багато першочергових задач літакобудування, а саме дослідження аеродинаміки крила літака, задач динаміки підземних вод тощо.

4.3.1. Основні властивості відображення

Функцією Жуковського називають раціональну функцію
$$w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right),$$
яка визначена в усій розширеній комплексній площині $\overline{\mathbb{C}}$ за винятком двох точок $\{0, \infty\}$. У цих точках функцію Жуковського вважають визначеною та неперервною в узагальненому розумінні теорії аналітичних функцій.

Функція Жуковського диференційовна, а її похідну
$$\frac{dw}{dz} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{z^2}\right) \tag{4.16}$$
визначено в кожній точці $\overline{\mathbb{C}}$. Причому значення похідної відмінне від нуля в усій розширеній комплексній площині, за винятком двох точок $z = \pm 1$. Функція Жуковського здійснює конформне відображення в усій площині $\overline{\mathbb{C}}$, за виключенням, можливо, точок $0, \infty, +1, -1$.

Дослідимо точки $z=0$ та $z=\infty$. Конформність відображення в точці $z=0$, відповідно до визначення кута в нескінченно віддаленій точці, випливає з того, що похідна функції $\frac{1}{w(z)}$

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{w}\right)=2\frac{1-z^2}{\left(z^2+1\right)^2}$$

відмінна від нуля в точці $z=0$. З того самого означення випливає, що дослідження конформності відображення $w=f(z)$ у точці $z=\infty$ зводиться до дослідження конформності функції $w=f\left(\frac{1}{z}\right)$ у точці $z=0$. Однак, оскільки для функції Жуковського маємо $f(z)=f\left(\frac{1}{z}\right)$, то з доведеного випливає, що відображення функцією Жуковського є конформним у точці $z=\infty$.

У точках $z=\pm 1$ похідна функції Жуковського дорівнює нулю, а отже, порушується консерватизм кутів. Дослідимо характер неоднозначності цього відображення у вказаних точках. Для цього покажемо, що функцію Жуковського можна подати у вигляді

$$\frac{w-1}{w+1}=\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2. \tag{4.17}$$

Розглянемо два послідовні відображення $w_1=\left(\frac{z-1}{z+1}\right)$, $w_2=w_1^2$. Із запису $\frac{w-1}{w+1}=w_2$ випливає, що функція w має вигляд

$$w=\frac{1+w_2}{1-w_2}=\frac{1+\frac{(z-1)^2}{(z+1)^2}}{1-\frac{(z-1)^2}{(z+1)^2}}=\frac{z^2+1}{2z}=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right).$$

Отже, функцію Жуковського можна подати як суперпозицію дробово-лінійної w_1 і степеневої $w_2=w_1{}^2$ функцій.

Користуючись записом функції Жуковського у вигляді (4.17), дослідимо поведінку кутів при відображенні в точках $z=-1$ та $z=1$. Установимо відповідність відображення точок і зміни величини кутів при послідовному відображенні w_1, w_2 та w у цих точках. Нехай з точки $z=1$ $(z=-1)$ виходить деяка крива γ під кутом α. Оскільки дробово-лінійне відображення зберігає кути, а степенева функція при $n=2$ їх подвоює, то можемо записати:

Відображення	*Точки*	*Кути*
z	$-1;\ +1$	α
w_1	$-1;\ +1$	α
w_2	$-1;\ +1$	2α
w	$-1;\ +1$	2α

Бачимо, що в точках $z=\pm 1$ кути подвоюються, отже, відображення в цих точках не конформне, а поверхня Рімана дволиста.

Знайдемо області однолистості функції Жуковського. Для цього визначимо області, у яких для довільних $z_1\neq z_2$ маємо $w(z_1)\neq w(z_2)$. Припустимо від супротивного, що при $z_1 \neq z_2$ $w(z_1) = w(z_2)$. Із запису функції Жуковського випливає, що $\frac{1}{z_1} + z_1 = \frac{1}{z_2} + z_2$, або $z_1 - z_2 + \frac{1}{z_1} - \frac{1}{z_2} = 0$. Отже, $(z_1 - z_2)\left(1 - \frac{1}{z_1 z_2}\right) = 0$.

При $z_1 \neq z_2$ остання рівність можлива тоді й тільки тоді, коли

$$z_1 z_2 = 1. \tag{4.18}$$

Це означає, що функція Жуковського має дві області однолистості: $D_1 = \{z : |z| < 1\}$ та $D_2 = \{z : |z| > 1\}$. Спільною границею цих областей є одиничне коло $|z| = 1$.

Побудуємо *поверхню Рімана функції Жуковського*. Покладемо $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ та обчислимо

$$w = u + iv = \frac{1}{2}\left(r(\cos\varphi + i\sin\varphi) + \frac{1}{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\varphi + i\frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\varphi.$$

Отже,

$$u(r,\varphi) = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\varphi; \; v(r,\varphi) = \frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\varphi.$$

Знайдемо образ границі області однолистості. Образом кола $|z| = 1$ у площині $w = u + iv$ є множина точок

$$\begin{cases} u = \cos\varphi, \\ v = 0, \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \end{cases}$$

Це означає, що дуга $0 \leq \varphi \leq \pi$ відображується у відрізок $-1 \leq u \leq 1, v = 0$ з обходом точок від $z = 1$ до $z = -1$, а дуга $\pi \leq \varphi \leq 2\pi$ – у той самий відрізок $-1 \leq u \leq 1, v = 0$, але з протилежним обходом.

Нехай $|z| = r = \text{const} \neq 1$, а $\arg z = \varphi \in [0, 2\pi]$. Тоді $r + \frac{1}{r} \neq 0$ і $r - \frac{1}{r} \neq 0$, отже, $\frac{u}{a} = \cos\varphi$; $\frac{v}{b} = \sin\varphi$, $\varphi \in [0, 2\pi]$, $a = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)$, $b = \frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)$.

Після піднесення до квадрата кожної з цих рівностей і додавання їх правих і лівих частин маємо рівняння еліпса $\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} = 1$ з півосями a та b і фокусами в точках $w = \pm\sqrt{a^2 - b^2} = \pm 1$.

Таким чином, довільне коло, радіус якого не дорівнює одиниці, а центр лежить у початку координат, функцією Жуковського відображається в еліпс з фокусами в точках ± 1 і півосями a та b. При цьому, коли кут φ неперервно зростає від нуля до 2π (тобто точка z пробігає все коло $|z| = r = \text{const} \neq 1$ у додатному напрямку один раз), відповідна точка w описує еліпс у від'ємному ($r < 1$) чи додатному ($r > 1$) напрямку. Нехай $r < 1$. Тоді при $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ функція $u > 0$ і спадає від a до нуля, а $v \leq 0$ і спадає від нуля до $-b$. Якщо $\frac{\pi}{2} < \varphi < \pi$, то функція $u < 0$ і спадає від нуля до $-a$, тоді як v зростає від $-b$ до нуля. При $\pi < \varphi < \frac{3\pi}{2}$ u зростає від $-a$ до нуля, функція v також зростає від нуля до b. Нарешті, при $\frac{3\pi}{2} < \varphi < 2\pi$ u зростає від нуля до a, а v спадає від b до нуля.

Нехай $r<1$. Дослідимо випадки $r\to 1$ та $r\to 0$. Якщо $r\to 1$, то $a\to 1$, а $b\to 0$, отже, у площині $w=u+iv$ маємо $u\to\cos\varphi$, $v\to 0$. Оскільки $\varphi\in[0,2\pi]$, то одиничне коло $|z|=1$ у площині w відобразиться в розріз $[-1,1]$. Ураховуючи правило обходу, установлюємо, що верхнє півколо відображається в нижній берег розрізу, а нижнє – у верхній.

Якщо ж $r\to 0$, то $u\to\infty$ і $v\to\infty$, а отже, точка $z=0$ відображається в точку $w=\infty$.

У випадку, коли $r>1$ і $r\to 1$, знов-таки $u\to\cos\varphi$, $v\to 0$. Однак у цьому разі, за правилом обходу області, верхнє одиничне півколо перейде у верхній берег розрізу, а нижня його частина – у нижній.

Легко переконатися, що точка $z=\infty$ при такому відображенні є *нерухомою точкою.* Ще однією парою нерухомих точок є розв'язки рівняння $z=\dfrac{z^2+1}{2z}$, якими є $z_{1,2}=\pm 1$.

Поверхнею Рімана функції Жуковського є геометричний образ, який складається з двох площин з прямолінійними розрізами від точок $w=-1$ до точок $w=1$, об'єднаних за неперервністю так, що верхній берег верхнього листа склеєний з нижнім берегом розрізу нижнього листа, а нижній берег розрізу верхнього листа – з верхнім берегом нижнього.

Побудуємо функцію, обернену до функції Жуковського. Для цього розв'яжемо рівняння $w=\dfrac{z^2+1}{2z}$ відносно z. Отже, функція

$$z=w+\sqrt{w^2-1}$$

є *оберненою до функції Жуковського.*

Кожна її гілка неоднозначна тільки в околі точок ± 1. Однак очевидно, що на побудованій поверхні Рімана ця функція однозначна. Різні значення, яких вона набуває в точці w, будемо трактувати як точки, віднесені до двох різних точок ріманової поверхні, яка лежить над w. Зазначимо, що функція, обернена до функції Жуковського, допускає дві регулярні гілки в зовнішності відрізка $[-1,1]$. Одна з них відображає зовнішність відрізка на зовнішність одиничного круга, а друга – цю область на внутрішність одиничного круга. Метод побудови регулярних гілок, розглянутий раніше, застосовний і в цьому випадку.

Зазначимо також, що гілки оберненої функції недоцільно розрізняти за знаком кореня $(\pm\sqrt{\bullet})$, оскільки в комплексній площині сама функція кореня квадратного має два значення.

З викладеного випливає, що функція Жуковського реалізує взаємно однозначне відображення зовнішності та внутрішності одиничного круга, включаючи й нескінченно віддалену точку, на зовнішність відрізка $[-1,1]$.

4.3.2. Приклади відображення за допомогою функції Жуковського

4.3.2.1. Відображення системи полярних координат

Розглянемо характерну для функції Жуковського сім'ю променів $\arg z=\varphi_0$ $(r\ge 0)$, $\varphi_0\ne\dfrac{n\pi}{2}$, $n\in\mathbb{Z}$.

Оскільки на цих лініях $u=\dfrac{1}{2}\left(r+\dfrac{1}{r}\right)\cos\varphi_0$; $v=\dfrac{1}{2}\left(r-\dfrac{1}{r}\right)\sin\varphi_0$, то

$$\frac{u^2}{\cos^2\varphi_0}-\frac{v^2}{\sin^2\varphi_0}=1.$$

Отже, сім'я променів з початком у точці $z=0$ відображається в сім'ю гіпербол з півосями $a = \cos\varphi_0$ та $b = \sin\varphi_0$ і фокусами в точках $w = \pm\sqrt{a^2 - b^2} = \pm 1$.

Промені $\varphi_0 = 0$ та $\varphi_0 = \pi$ відображаються у здвоєні промені, розташовані вздовж додатної та від'ємної півосей u, а промені $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$ та $\varphi_0 = \frac{3\pi}{2}$ – у здвоєні промені, розташовані вздовж додатної та від'ємної півосей v.

Оскільки відображення функцією Жуковського конформне, то одержані сім'ї еліпсів і гіпербол ортогональні (рис. 4.26, 4.27).

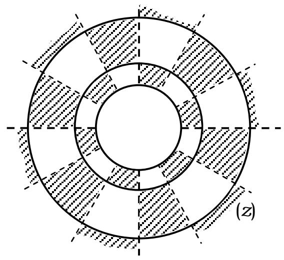


Рис. 4.26

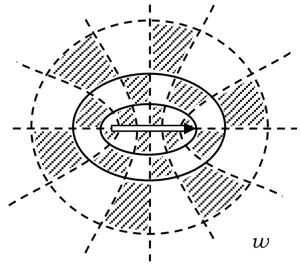


Рис. 4.27

4.3.2.2. Відображення кола, що проходить через точки $z = \pm 1$ і має центр у довільній точці

Розглянемо дві функції, які є простими зсувами функції Жуковського, $w - 1 = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) - 1 = \frac{(z-1)^2}{2z}$ та $w + 1 = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) + 1 = \frac{(z+1)^2}{2z}$. Маємо $\frac{w-1}{w+1} = \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2$. Позначимо

$$\xi = \frac{z-1}{z+1}, \quad w_1 = \xi^2, \quad \frac{w-1}{w+1} = w_1. \qquad (4.19)$$

Перша з цих функцій відображає кола, що проходять через точки $z = \pm 1$, у прямі, які проходять через початок координат, друга переводить прямі у промені, які виходять з початку координат, а остання відображає кожен з променів на дугу кола, яке сполучає точки $z = \pm 1$. Користуючись формулами (4.19), установлюємо, що коли кут між колом і дійсною додатною піввіссю в точці $z = 1$ дорівнює θ (рис. 4.28), то кут у точці образу $w = 1$ між образом дуги кола й додатним напрямком дійсної осі площини w буде рівним 2θ.

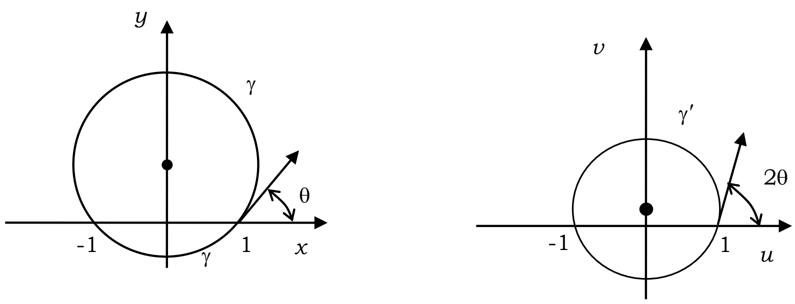


Рис. 4.28

Отже, функція Жуковського відображає кожне коло γ, що проходить через точки $z = \pm 1$ та утворює в точці $z = 1$ з дійсною додатною піввіссю кут θ, на дугу деякого кола γ', яке проходить через точки $w = \pm 1$ та утворює кут 2θ з додатною дійсною піввіссю в площині w. З (4.19) нескладно зробити й такий висновок:

кожна з двох дуг кола γ з кінцями в точках $z=\pm 1$ відображається на одну й ту саму дугу кола γ'.

Нехай γ – довільне коло, що проходить через точки $z=\pm 1$, і маємо дві точки $z_1 \neq z_2$ такі, що $z_1 z_2 = 1$ і $z_1 \notin \gamma, z_2 \notin \gamma$. Покажемо: якщо одна з них лежить усередині круга, обмеженого колом γ, то друга – зовні цього кола. А це означає, що дане коло ділить площину $\mathbb{C}$ на дві області однолистості функції Жуковського.

◁ Відобразимо одну з областей, обмежених γ, на верхню півплощину. Функція $w = \dfrac{z+1}{(z-1)}$ відображає дійсну вісь на себе, а коло γ – на пряму, яка перетинається з дійсною віссю під кутом θ. Отже, $w = kw_1 = w_1 e^{-i\theta}$ відображає γ на дійсну вісь. При цьому образом однієї з областей, обмежених γ, буде верхня півплощина. Обернена функція $z = \dfrac{kw+1}{kw-1}$ відображає точки верхньої півплощини в точки однієї з областей, обмежених колом γ, а точки нижньої площини – у точки іншої області. Нехай $z_1 z_2 = 1$ і $z_n = \dfrac{kw_n+1}{kw_n-1}$, $n=1,2$. Тоді $\dfrac{kw_1+1}{kw_1-1}\cdot\dfrac{kw_2+1}{kw_2-1} = 1$. Звідси маємо

$$k^2 w_1 w_2 + k(w_1+w_2) + 1 = k^2 w_1 w_2 - k(w_1+w_2) + 1.$$

Оскільки $k \neq 0$, то $w_1 = -w_2$. Тобто коло γ ділить площину $\overline{\mathbb{C}}$ на дві області однолистості функції Жуковського ▷

Доцільно зазначити, що зовнішність кола γ при першому з відображень (4.19) відображається на півплощину, після другого одержуємо область, обмежену прямолінійним променем (розрізом), а після третього – усю площину з розрізом уздовж одержаної дуги кола γ'. Усі одержані відображення однозначні у своїх областях, отже, функція Жуковського дає взаємно однозначне конформне відображення зовнішності (внутрішності) кола γ на область, границею якої є дуга кола γ', що сполучає точки $w=\pm 1$.

4.3.2.3. Відображення верхньої півплощини функцією Жуковського

Для побудови такого відображення нагадаємо, що областями однолистості цієї функції є внутрішність і зовнішність одиничного кола. Тому верхню півплощину умовно розіб'ємо на дві області: верхній одиничний півкруг $|z|<1, \operatorname{Im} z>0$ і верхня півплощина без нього $|z|>1, \operatorname{Im} z>0$. Відобразимо кожну з цих областей окремо, а потім вилучимо образ спільної частини умовної границі $|z|=1, \operatorname{Im} z>0$.

Відображаючи верхнє півколо, йдемо від точки $z=1$ у додатному напрямку до точки $z=-1$. Півкруг $|z|<1,\ \operatorname{Im} z>0$ при цьому залишається зліва. Образом дуги верхнього півкола є відрізок $[-1,1]$, який проходиться в напрямку зростання змінної. Відрізок $[-1,0]$ відображається на півпряму $(-\infty,-1]$, а відрізок $[0,1]$, з урахуванням напрямку руху, – на півпряму $(\infty,1]$ (рис. 4.29). Ураховуючи правило обходу, маємо, що область $|z|<1, \operatorname{Im} z>0$ відобразилась на нижню півплощину $\operatorname{Im} w<0$. Аналогічно, відображаючи всі ділянки границі області $|z|>1, \operatorname{Im} z>0$, приходимо до висновку, що ця область відображається на верхню півплощину. Ураховуючи, що відрізок $[-1,1]$ є образом умовної границі розбиття півплощини і, отже, його потрібно виключити, а півпрямі $(-\infty,-1]$ та $[1,\infty)$ є подвійними образами самих себе та відрізків $(-\infty,-1]$, $[-1,0]$ і $[0,1]$, $[1,\infty)$, відповідно, доходимо висновку, що образом верхньої півплощини є вся площина з розрізом $(-\infty,-1]$, $[1,\infty)$, з'єднаним через нескінченно віддалену точку.

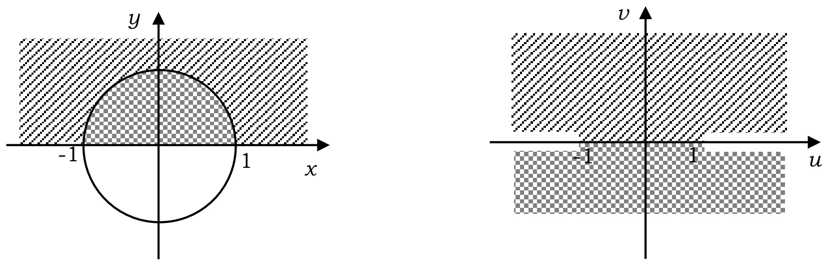


Рис. 4.29

4.4. Показникова та тригонометричні функції, їх відображення

4.4.1. Означення показникової функції

За аналогією з визначенням, наведеним у математичному аналізі, показникову функцію $w = e^z$ будемо розглядати як границю послідовності

$$e^z = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n . \tag{4.20}$$

Доведемо, що така границя існує для довільного $z \in \mathbb{C}$. Для цього покладемо $z = x + iy$, $e^z = \left|e^z\right| e^{i\arg z} = e^x e^{iy}$, а потім, за правилом піднесення до степеня комплексних чисел, для послідовності модулів та аргументів одержимо

$$\left|\left(1+\frac{z}{n}\right)^n\right| = \left(1+\frac{2x}{n}+\frac{x^2+y^2}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}},\ \arg\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = n\operatorname{arctg}\frac{\frac{y}{n}}{1+\frac{x}{n}} .$$

Оскільки для достатньо великого n точка $\varsigma = 1+\frac{z}{n}$ лежить у правій півплощині $\operatorname{Re} z > 0$, то значення $\arg\left(1+\frac{z}{n}\right)$ та арктангенса цього кута беремо з інтервалу $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, а отже, границі послідовності модулів і аргументів існують і, відповідно, дорівнюють

$$\lim_{n\to\infty}\left|\left(1+\frac{z}{n}\right)^n\right| = e^x,\ \lim_{n\to\infty}\arg\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(n\operatorname{arctg}\frac{\frac{y}{n}}{1+\frac{x}{n}}\right) = y .$$

Отже, $\left|e^z\right| = e^{\operatorname{Re} z}$, $\arg e^z = \operatorname{Im} z$, а функцію $w = e^z$ можна подати у вигляді

$$e^z = \left|e^z\right| e^{i\arg z} = e^x\left(\cos y + i\sin y\right). \tag{4.21}$$

У розд. 6–7 ми покажемо, що показникова функція є природним продовженням функції e^x з дійсної осі на всю комплексну площину $\mathbb{C}$. Також буде доведено, що функцію $w = e^z$ можна подавати у вигляді степеневого ряду

$$w = e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots . \tag{4.22}$$

4.4.2. Основні властивості функції $w = e^z$

1) *Функція* $w = e^z$ *не має нулів у всій комплексній площині* $\mathbb{C}$.

Ця властивість випливає безпосередньо з формули (4.21).

2) *Функція* $w = e^z$ *аналітична в усій комплексній площині* $\mathbb{C}$.

$\triangleleft$ Дійсно, оскільки дійсна та уявна частини функції $f(x,y) = u + iv$, де $u = e^x \cos y$ $v = e^x \sin y$ є неперервними й диференційованими функціями своїх аргументів у $\mathbb{R}^2$, то умови Коші – Рімана є необхідними й достатніми умовами диференційованості функції. Отже, з того, що

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y = \frac{\partial v}{\partial y} \text{ і } \frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

випливає, що функція $w = e^z$ диференційована в $\mathbb{C}$.

Однозначність цієї функції не викликає сумніву. Це свідчить про те, що вона аналітична в усій комплексній площині $\mathbb{C}$. Покажемо, що e^z не має границі при $z \to \infty$. Нехай $z = x + iy \to \infty$ так, що $x \to +\infty, y = 0$. Тоді $e^z = e^x(\cos 0 + i \sin 0) = e^x \to \infty$. Якщо ж $z \to \infty$ так, що $x \to +\infty, y = \pi$, або, що те саме, $x \to -\infty, y = 0$, то $e^z = e^{-|x|} \to 0$. Отже, у нескінченно віддаленій точці вона не має границі й не буде аналітичною $\triangleright$

Очевидно, що $\dfrac{de^z}{dz} = e^z \neq 0$ у жодній точці площини $\mathbb{C}$. Отже, відображення, яке реалізується цією функцією, конформне в $\mathbb{C}$.

3) *Функція* $w = e^z$ *періодична з уявним періодом* $2\pi i$.

$\triangleleft$ Це твердження випливає безпосередньо із запису функції в тригонометричному вигляді (4.21), а саме

$$e^{z+2\pi i} = e^x\left(\cos(y + 2\pi) + i \sin(y + 2\pi)\right) = e^z.$$

Отже, $2\pi i$ є періодом функції. Нехай існує деяке комплексне число T таке, що для довільного $z \in \mathbb{C}$ виконується рівність $e^{z+T} = e^z$. Після множення цієї рівності на e^{-z} одержимо $e^T = 1$. Покладемо $T = T_1 + iT_2$. Тоді $e^T = e^{T_1}(\cos T_2 + i \sin T_2) = 1$, тобто $e^{T_1} = 1$, $\cos T_2 = 1$, $\sin T_2 = 0$. Це можливо тільки при $T_1 = 0$, $T_2 = 2\pi$ $\triangleright$

З цієї властивості випливає, що для того, щоб відображення *було однолистим,* необхідно й достатньо, щоб область не містила жодної пари точок, пов'язаних співвідношенням $z_1 - z_2 = 2k\pi i$ $(k = \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Інакше кажучи, *областю однолистості* функції $w = e^z$ є довільна горизонтальна смуга шириною 2π.

4) *Для функції* $w = e^z$ *вірна теорема додавання* $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$.

$\triangleleft$ Поклавши $z_k = x_k + iy_k$ $(k = 1,2)$ і використавши формулу множення комплексних чисел, одержимо

$$e^{z_1}e^{z_2} = e^{x_1}(\cos y_1 + i \sin y_1)e^{x_2}(\cos y_2 + i \sin y_2) =$$
$$= e^{x_1+x_2}\left(\cos(y_1 + y_2) + i \sin(y_1 + y_2)\right) = e^{z_1+z_2} \triangleright$$

4.4.3. Область однолистості та поверхня Рімана показникової функції

Як було зазначено, показникова функція аналітична в усій комплексній площині, а її похідна ніде в $\mathbb{C}$ не дорівнює нулю. У нескінченно віддаленій точці вона взагалі не визначена, оскільки не має в цій точці граничного значення. Показникова функція реалізує конформне відображення $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$. При цьому областю однолистості є горизонтальна смуга шириною 2π.

Побудуємо відображення області однолистості. Покладемо $z = x + iy$, $w = u + iv$. Тоді $w = e^z = e^x(\cos y + i\sin y)$, а $u = e^x \cos y$, $v = e^x \sin y$.

Формально область однолистості функції $w = e^z$ можна визначити як горизонтальну смугу шириною 2π, зміщену на ih, $\forall h \in \mathbb{R}$ від початку координат $D_k = \{z : 2k\pi + h < \operatorname{Im} z < (2k+1)\pi + h,\ k = 0, \pm 1, \ldots\}$.

Розглянемо *базові області однолистості* показникової функції у вигляді

$$D_k = \{z : 2k\pi < \operatorname{Im} z < (2k+2)\pi,\ k = 0, \pm 1, \ldots\}. \tag{4.23}$$

Інколи за базові області однолистості приймають смуги

$$D_k = \{z : (2k-1)\pi < \operatorname{Im} z < (2k+1)\pi,\ k = 0, \pm 1, \ldots\}.$$

Із множини (4.23) виберемо область з $k = 0$

$$D = \{z : 0 < \operatorname{Im} z < 2\pi\} \tag{4.24}$$

і відобразимо її межу, яка складається з прямих $y = 0,\ x \in (-\infty, \infty)$ та $y = 2\pi,\ x \in (-\infty, \infty)$. Очевидно, що першій і другій ділянкам границі області однолистості у площині w відповідають два промені, які утворюють розріз $u > 0$, $v = 0$. Отже, функція e^z відображає смугу (4.24) на всю площину w з розрізом уздовж додатної півосі (рис. 4.30, 4.31).

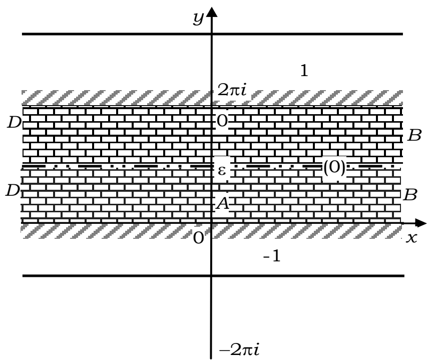


Рис. 4.30

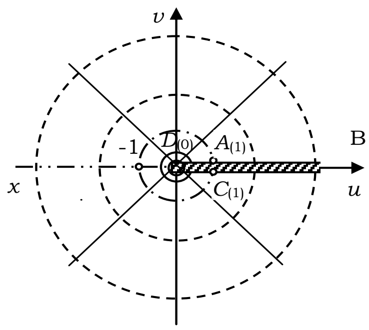


Рис. 4.31

Легко переконатися, що функція $w = e^z$ відображає півсмуги I–IV, зображені на рис. 4.32, на відповідно позначені області в площині w (рис. 4.33). Також очевидно, що виділений зі смуги однолистості прямокутник (рис. 4.34) відображається в кільце (рис. 4.35).

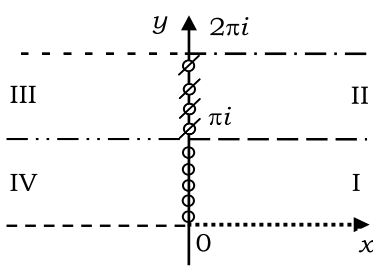


Рис. 4.32

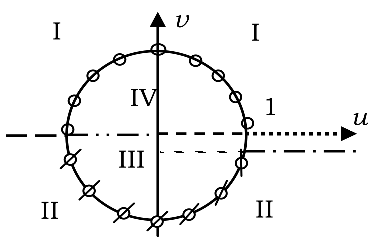


Рис. 4.33

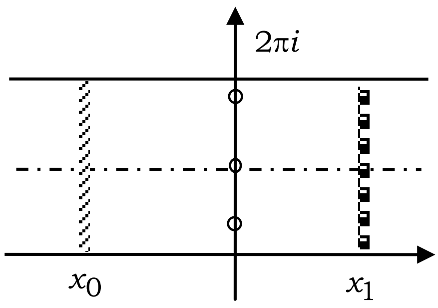


Рис. 4.34

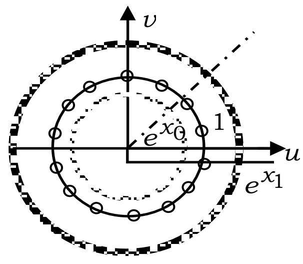


Рис. 4.35

Якщо розглянути області однолистості (4.23) при $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$, то їх образами будуть також площини з розрізами. Ураховуючи неперервність функції e^z, при побудові поверхні Рімана ми повинні взяти нескінченну кількість площин з розрізами вздовж додатної півосі та склеїти береги розрізів так, як склеюються відповідні смуги (при відповідних значеннях k) між собою. До нижнього берега розрізу листа $k = 0$ приклеюємо верхній берег листа $k = 1$, нижній берег листа $k = 1$ склеюємо з верхнім берегом листа $k = 2$ і т. д. Аналогічно до верхнього берега листа $k = 0$ підклеюємо нижній берег листа $k = -1$.

Побудований таким чином нескінченнолистий геометричний образ є *поверхнею Рімана функції* $w = e^z$. Отже, показникова функція реалізує взаємно однозначне й неперервне відображення всієї відкритої z-площини на поверхню Рімана (рис. 4.36).

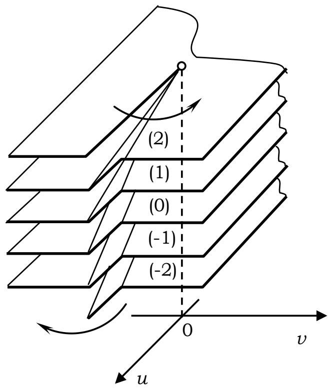


Рис. 4.36

Зазначимо, що значення $w = 0$ та $w = \infty$ не беруться до уваги, тобто ці точки не включаються в поверхню Рімана. Вони обходяться по поверхні Рімана над колом $|w| = r$ в одному напрямку. Рух відбувається по спіралі нескінченну кількість разів. Прийнято вважати, що точки $w = 0$ та $w = \infty$ є *точками розгалужування нескінченного порядку* поверхні Рімана функції e^z і не належать до неї.

4.4.4. Основні відображення показниковою функцією

1. Відобразимо сітку прямокутної системи координат. Нехай значення z пробігає довільну пряму, паралельну уявній осі $z = a + it$ $a, t \in \mathbb{R}$, $a = \text{const}$. Тоді $w = u + iv = e^a(\cos t + i \sin t)$, де $u = e^a \cos t$, $v = e^a \sin t$, $t \in (-\infty, \infty)$, тобто w описує коло радіусом e^a, причому, коли точка z пробігає пряму $t \in (-\infty, \infty)$, точка w рухається по колу нескінченну кількість разів, не змінюючи напрямку.

У випадку, коли $z = t + ib$, $t \in (-\infty, \infty)$, $b \in \mathbb{R}$, $b = \text{const}$, тобто точка z рухається вздовж прямої, паралельної дійсній осі, то $w = e^t(\cos b + i \sin b)$, а $u = e^t \cos b$, $v = a^t \sin b$, $t \in (-\infty, \infty)$. Звідси бачимо, що образом такої прямої є промінь, який виходить з початку координат і утворює з додатною піввіссю кут, рівний b.

Отже, *при відображенні комплексної площини z функцією $w = e^z$ сім'я прямих, паралельних уявній осі, відображається на сім'ю кіл із центром у початку координат, а сім'я прямих, паралельних дійсній осі, – у сім'ю променів, які виходять з початку координат.*

2. Розглянемо відображення вертикальної смуги $0 < x < a$, $-\infty < y < \infty$. Очевидно, що ця смуга відобразиться на нескінченну смугу, згорнуту у вигляді гвинта (гвинтових сходів) з шириною $1 < |w| < e^a$ (рис. 4.37).

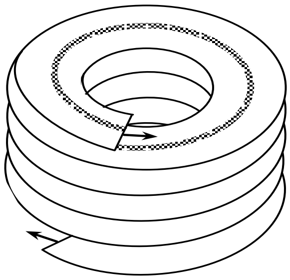


Рис. 4.37

3. Побудуємо відображення горизонтальної смуги шириною h, яку піднято над віссю на величину φ_0 $\varphi_0 \in \mathbb{R}$, $0 < h < 2\pi$ (рис. 4.38). Очевидно, що межу такої області утворюють дві прямі $y = \varphi_0$ та $y = \varphi_0 + h$. Скориставшись одержаними вище результатами, легко бачити, що образом смуги у площині w є кут з вершиною в початку координат, обмежений променями, нахиленими до додатної осі під кутами $\alpha = \varphi_0$ та $\alpha = \varphi_0 + h$ відповідно (рис. 4.39). Якщо $h = 2\pi$, то кут розгортається у всю площину w. Його границі утворюють розріз уздовж променя, який виходить з початку координат під кутом $\alpha = \varphi_0$.

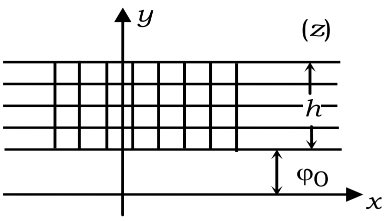


Рис. 4.38

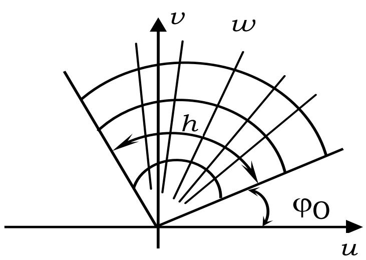


Рис. 4.39

Міркуючи аналогічно, легко переконатися, що довільні прямокутники в площині z зі сторонами, паралельними координатним осям (рис. 4.40), відобразяться у площині w на сектори (рис. 4.41).

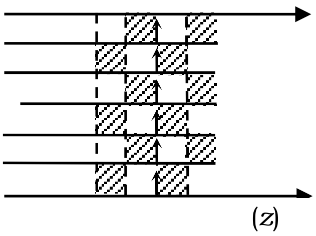


Рис. 4.40

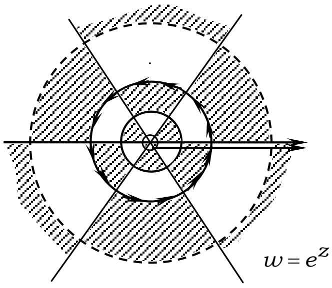


Рис. 4.41

Дійсно, нехай у площині z маємо прямокутник $x_0 < x < x_1$, $y_0 < y < y_1$. Сторони $y = y_0$ та $y = y_1$ при $x_0 < x < x_1$ у площині w відображаються на відрізки прямих, які лежать на променях $\arg w = y_0$, $\arg w = y_1$ і мають початки в точках $w = e^{x_0 + iy_0}$, $w = e^{x_0 + iy_1}$, а кінці – у точках $w = e^{x_1 + iy_0}$ $w = e^{x_1 + iy_1}$. Вертикальні сторони при цьому відобразяться в дуги кіл $|w| = e^{x_0}$ та $|w| = e^{x_1}$, які лежать між променями $\arg w = y_0$ та $\arg w = y_1$.

Якщо прямокутник вироджується в півсмугу $y_0 < y < y_1$, $0 < x < \infty$, то відрізок $y_0 < y < y_1$, $x = 0$ відображається на дугу одиничного кола $|w| = e^0 = 1$, $y_0 < \arg z < y_1$, а промені $y = y_0$, $0 < x < \infty$ і $y = y_1$, $0 < x < \infty$ – у промені $\arg w = y_0$, $\arg w = y_1$, які мають початки на колі $|w| = 1$.

4.5. Тригонометричні й гіперболічні функції, їх відображення

4.5.1. Властивості тригонометричних і гіперболічних функцій

Формально визначимо тригонометричні функції $\sin z$ та $\cos z$ у вигляді рядів

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots, \tag{4.25}$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \ldots. \tag{4.26}$$

Значення цих функцій на дійсній осі $z = x$ збігаються зі значеннями звичайних тригонометричних функцій $\sin x$ та $\cos x$. У 6 розділі ми покажемо, що ці ряди абсолютно збіжні в усій комплексній площині $\mathbb{C}$ і є продовженням відповідних тригонометричних функцій з дійсної осі на всю комплексну площину.

Якщо у формулі розвинення e^z у ряд (4.22) ми покладемо замість z спочатку iz, а потім $-iz$ і віднімемо від першого ряду другий, то одержимо

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}. \tag{4.27}$$

Аналогічно, після таких самих замін і додавання одержаних рядів, маємо

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}. \tag{4.28}$$

Тоді функції $\mathrm{tg} z = \dfrac{\sin z}{\cos z}$ та $\mathrm{ctg} z = \dfrac{\cos z}{\sin z}$ визначаються формулами

$$\mathrm{tg} z = -i \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}}, \tag{4.29}$$

$$\mathrm{ctg}z = i\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{e^{iz}-e^{-iz}}. \tag{4.30}$$

Очевидно, що при $z = x \in \mathbb{R}$ формули (4.27)–(4.30) є наслідком відомих формул Ейлера.

Визначимо гіперболічні функції $\mathrm{sh}\,z$ та $\mathrm{ch}\,z$ рівностями

$$\mathrm{sh}\,z = \frac{e^{z}-e^{-z}}{2}, \quad \mathrm{ch}\,z = \frac{e^{z}+e^{-z}}{2}. \tag{4.27'}$$

Тоді

$$\mathrm{th}\,z = \frac{\mathrm{sh}\,z}{\mathrm{ch}\,z} = \frac{e^{z}-e^{-z}}{e^{z}+e^{-z}}, \ \mathrm{cth}\,z = \frac{\mathrm{ch}\,z}{\mathrm{sh}\,z} = \frac{e^{z}+e^{-z}}{e^{z}-e^{-z}}. \tag{4.29'}$$

Читачу пропонується самостійно переконатися, що між тригонометричними та гіперболічними функціями встановлюється відповідність

$$\frac{e^{z}-e^{-z}}{2} = i\mathrm{sh}z = \sin iz, \tag{4.31}$$

$$\frac{e^{z}+e^{-z}}{2} = \mathrm{ch}z = \cos iz, \tag{4.32}$$

а отже,

$$\mathrm{tg}iz = i\mathrm{th}z, \tag{4.33}$$

$$\mathrm{ctg}iz = -i\mathrm{cth}z. \tag{4.34}$$

Виходячи з формул (4.27), (4.28) та з того, що функція e^{z} неперервна в усій комплексній площині, робимо висновок, що функції $\sin z$ та $\cos z$ теж будуть неперервними в $\mathbb{C}$.

З формул (4.27) та (4.30) випливає, що функція $\cos z$ є парною, а $\sin z$ – непарною. З цих самих формул легко встановити періодичність функцій $\cos z$ і $\sin z$ з дійсним періодом 2π.

Повторюючи міркування з 4.4.1, приходимо до висновку, що ці функції аналітичні в $\mathbb{C}$, а їх похідні обчислюються за формулами

$$\frac{d}{dz}(\cos z) = i\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2} = -\sin z, \quad \frac{d}{dz}(\sin z) = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} = \cos z.$$

Легко перевірити, що зберігаються й основні тригонометричні тотожності

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1, \quad \cos z = \sin\left(z + \frac{\pi}{2}\right), \tag{4.35}$$

та ін.

Беручи до уваги формули (4.31) та (4.32), установлюємо, що

$$\mathrm{ch}^2 z - \mathrm{sh}^2 z = (\cos iz)^2 + (\sin iz)^2 = 1.$$

Ураховуючи зв'язок тригонометричних і гіперболічних функцій, а також теорему додавання, легко показати вірність формул

$$\cos(x+iy) = \cos x\,\mathrm{ch}y - i\sin x\,\mathrm{sh}y \quad \sin(x+iy) = \sin x\,\mathrm{ch}\,y + i\cos x\,\mathrm{sh}\,y. \tag{4.36}$$

Виходячи з цих формул і відомих тотожностей $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, $\mathrm{ch}^2 y - \mathrm{sh}^2 y = 1$, приходимо до висновку, що

$$|\cos z| = \sqrt{\cos^2 x + \mathrm{sh}^2 y} = \sqrt{\mathrm{ch}^2 y - \sin^2 x}, \tag{4.37}$$

$$|\sin z| = \sqrt{\sin^2 x + \mathrm{sh}^2 y}. \tag{4.38}$$

Важливою відмінністю тригонометричних функцій комплексної змінної $\sin z$ та $\cos z$ є те, що їх модулі не обмежені одиницею. Дійсно, оскільки $\sin iy = i\mathrm{sh}y$, а $\cos iy = \mathrm{ch}y$, то твердження випливає з того, що функції $\mathrm{sh}y$ та $\mathrm{ch}y$ необмежені. Окрім того, як випливає з формул (4.37), (4.38), мають місце нерівності

$$\mathrm{ch}y \ge |\cos z| \ge \sqrt{\mathrm{ch}^2 y - 1} = |\mathrm{sh}y|, \quad \sqrt{\mathrm{sh}^2 y + 1} = \mathrm{ch}y \ge |\sin z| \ge |\mathrm{sh}y|.$$

4.5.2. Відображення найпростіших областей за допомогою тригонометричних функцій

Знайдемо область однолистості функції $w = \cos z$. Оскільки функція періодична, то $\forall z \in \mathbb{C}$ маємо $\cos(z+\varpi) = \cos z$, $\omega = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Нехай маємо точки $z_1 \neq z_2$. Знайдемо умови, за яких рівність $\cos z_1 - \cos z_2 = 0$ не виконується.

Очевидно, що $\cos z_1 - \cos z_2 = 2\sin\frac{z_1+z_2}{2}\sin\frac{z_1-z_2}{2}$. Отже, $\cos z_1 - \cos z_2 = 0$ при $z_1 + z_2 = 2k\pi$ або $z_1 - z_2 = 2m\pi$ $k, m \in \mathbb{Z}$. Тоді $\cos z_1 \neq \cos z_2$, якщо z_1 та z_2 лежать у смузі $-\pi < \operatorname{Re} z < 0$ або $0 < Re\, z < \pi$. Ці смуги є областями однолистості функції $\cos z$. Оскільки періодом функції $w = \cos z$ є $\varpi = 2\pi$, то очевидно, що кожна область, яка відповідає періоду, містить дві області однолистості $(2k-1)\pi < \operatorname{Re} z < 2k\pi$ та $2k\pi < \operatorname{Re} z < (2k+1)\pi$, $\forall k \in \mathbb{Z}$.

Знайдемо тепер образ області однолистості функції $w = \cos z$. Запишемо $w = u + iv$, $z = x + iy$. Тоді

$$w = u + iv = \cos(x+iy) = \cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y.$$

За допомогою цієї функції послідовно відобразимо області:

а) півсмугу $-\pi < Re\, z < 0$, $\operatorname{Im} z > 0$; б) півсмугу $-\pi < Re\, z < 0$, $\operatorname{Im} z < 0$ (рис. 4.42, 4.43, області I та II).

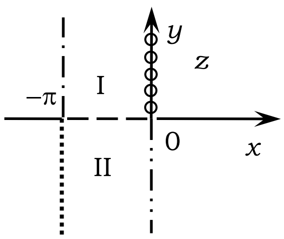


Рис. 4.42

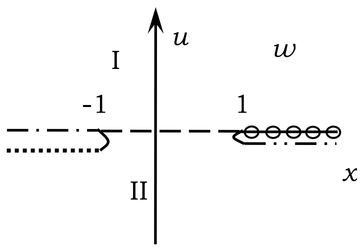


Рис. 4.43

Очевидно, що півпрямій $x = -\pi$, $0 < y < \infty$ у площині $w = u + iv$ відповідає промінь $u = -\operatorname{ch} y$, $v = 0$, $0 < y < \infty$; півпрямій $x = 0$, $0 < y < \infty$ – промінь $u = \operatorname{ch} y$, $v = 0$, $0 < y < \infty$, а відрізку $-\pi < x < 0$, $y = 0$ – відрізок $u = \cos x$, $v = 0$, $x \in [-\pi, 0]$. Границі нижньої півсмуги $-\pi < \operatorname{Re} z < 0$, $\operatorname{Im} z < 0$ відображаються відповідно у промені $u = -\operatorname{ch} y$, $v = 0$, $0 < y < \infty$; $u = \operatorname{ch} y$, $v = 0$, $0 < y < \infty$ та у відрізок $u = \cos x$, $v = 0$, $x \in [0, \pi]$. Об'єднуючи ці відображення, одержуємо, що образом смуги $-\pi < \operatorname{Re} z < 0$ є вся комплексна площина з розрізом уздовж променів $-\infty < u < -1$, $v = 0$ та $1 < u < \infty$ $v = 0$. Відповідність ділянок границь та їх образів на рис. 4.42, 4.43 позначено однаковими типами ліній.

Відображаючи смугу $0 < \operatorname{Re} z < \pi$ (області III, IV, рис. 4.44), ураховуємо те, що функція $w = \cos z$ парна, а отже, її образом буде та сама площина з розрізом. Однак відповідність границь смуги та їх образів зміниться й буде такою, як це показано на рис. 4.45.

У смузі $-\pi < \operatorname{Re} z < \pi$ містяться дві області однолистості функції $w = \cos z$, кожна з яких відображається на площину w з розрізами вздовж променів $(-\infty, -1]$ та $[1, \infty)$. Підкладемо образ смуги $-\pi < \operatorname{Re} z < 0$ під образ смуги $0 < \operatorname{Re} z < \pi$ так, щоб координатні осі сумістилися. Оскільки відображальна функція $w = \cos z$ неперервна на границях цих смуг, то одержані два листи потрібно склеїти вздовж розрізу $v = 0$, $u \in [1, \infty)$ так, щоб верхній берег нижнього листа був склеєний з нижнім берегом верхнього, а нижній берег нижнього листа – з верхнім берегом верхнього (рис. 4.46).

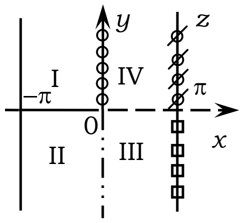


Рис. 4.44

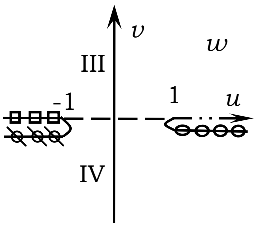


Рис. 4.45

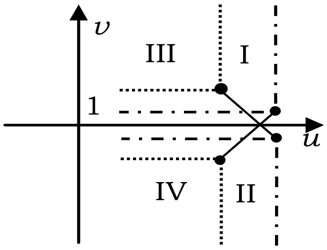


Рис. 4.46

Процес відображення можна продовжити й далі, знаходячи образи смуг $-3\pi < \operatorname{Re} z < -\pi$ та $\pi < \operatorname{Re} z < 3\pi$. Їх образами будуть подвійні листи поверхні Рімана, склеєні у правій частині за попередньою схемою.

Виходячи з неперервності функції, на границях $x = -\pi$ та $x = \pi$ ці пари листів потрібно покласти: першу (образ смуги $-3\pi < \operatorname{Re} z < -\pi$) – під побудовану вже пару, а другу (образ смуги $\pi < \operatorname{Re} z < 3\pi$) – над побудованою раніше парою. Відповідні розрізи цих пар листів поверхні Рімана в лівій півплощині потрібно склеювати з відповідними розрізами образу смуги $-\pi < \operatorname{Re} z < \pi$ за схемою, зображеною на рис. 4.47 та 4.48.

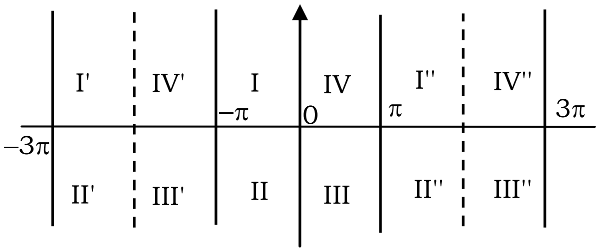


Рис. 4.47

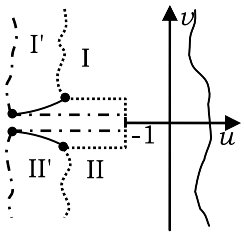


Рис. 4.48

Одержана таким чином поверхня Рімана буде нескінченнолистою.

Зазначимо, що оскільки $\dfrac{dw}{dz} = -\sin z = 0$ у точках $z = k\pi$, то функція $w = \cos z$ область однолистості $(2k-1)\pi < \operatorname{Re} z < 2k\pi$ відображає конформно, а точки $z = k\pi$ є точками розгалужування другого порядку.

Оскільки функція $w = \sin z = \cos\left(z - \dfrac{\pi}{2}\right)$, то побудова поверхні Рімана для неї очевидна.

4.5.3. Приклади відображення тригонометричними функціями

Залежно від того, яким рівнянням описуються границі відображуваної області, будемо використовувати ту чи іншу форму запису відображальної функції. Якщо границю області легко описати в декартовій (полярній) системі координат, то відповідні змінні у функції, яка відображає дану область, також доцільно вибирати в декартових (полярних) координатах.

Покажемо це на прикладах.

1. Знайти образ прямокутника $P = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Re} z < \pi, 0 < \operatorname{Im} z < a\}$ при відображенні $w = \cos z$.

◃ Покладемо $z = x + iy$, тоді $\cos z = \cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y$. Отже, $u = \cos x \operatorname{ch} y$,

$v=-\sin x\,\mathrm{sh}\,y\le 0$. Образ прямокутника лежить у нижній півплощині $w=u+iv$, а образами границь: 1) $y=0$, $0<x<\pi$; 2) $x=\pi$, $0<y<a$; 3) $y=a$, $0<x<\pi$; 4) $x=0$, $0<y<a$, відповідно, є лінії:

1) $u=\cos x$, $0<x<\pi$, $v=0$; 2) $u=-\mathrm{ch}\,y$, $0<y<a$, $v=0$ 3) $u+iv=\cos x\,\mathrm{ch}\,a-i\sin x\,\mathrm{sh}\,a$, $0<x<\pi$; 4) $u=\mathrm{ch}\,y$, $0<y<a$, $v=0$.

Тут 1), 2), 4) – відрізки дійсної осі $[-1,1]$, $[-\mathrm{ch}\,a,-1]$, $[1,\mathrm{ch}\,\alpha]$, відповідно.

Оскільки у 3) $u=\cos x\,\mathrm{ch}\,a,\quad v=-\sin x\,\mathrm{sh}\,a$, то $\dfrac{u^2}{\mathrm{ch}^2 a}+\dfrac{v^2}{\mathrm{sh}^2 a}=1$. Отже, границя 3) відображається на нижню половину еліпса з півосями $\mathrm{ch}\,a$ та $\mathrm{sh}\,a$, причому в кутових точках $z=0$, $z=\pi$ порушується конформність відображення, оскільки в них $(\cos z)'=-\sin z=0$, і у фокусах еліпса ± 1 прямі кути переходять у кути, рівні π ▷

2. З'ясувати, на що перетворяться при відображенні $w=\mathrm{ch}\,z$ криві та області:

1) прямокутна сітка $x=c,\ y=c$;

2) смуга $G=\{z\in\mathbb{C}:0<\operatorname{Im}z<\pi\}$;

3) півсмуга $D=\{z\in\mathbb{C}:\operatorname{Re}z<0,\ 0<\operatorname{Im}z<\pi\}$.

◁ 1) Нехай

$$w=u+iv=\frac{e^z+e^{-z}}{2}=\frac{e^{x+iy}+e^{-x-iy}}{2}=$$

$$=\frac{1}{2}\Big(e^x(\cos y+i\sin y)+e^{-x}(\cos y-i\sin y)\Big)=\cos y\ \mathrm{ch}\,x+i\sin y\ \mathrm{sh}\,x.$$

Тоді $u=\cos y\,\mathrm{ch}\,x$, $v=\sin y\,\mathrm{sh}\,x$. Якщо покласти $x=c$, то $u=\cos y\,\mathrm{ch}\,c$, $v=\sin y\,\mathrm{sh}\,c$. Звідси

$$\frac{u^2}{\mathrm{ch}^2 c}+\frac{v^2}{\mathrm{sh}^2 c}=1.$$

Одержимо сім'ю співфокусних еліпсів з фокусами в точках ± 1. Якщо $y=c$, то $u=\cos c\,\mathrm{ch}\,x$, $v=\sin c\,\mathrm{sh}\,x$,

$$\frac{u^2}{\cos^2 c}-\frac{v^2}{\sin^2 c}=1.$$

Прямі $y=c$ перетворяться на сім'ю співфокусних гіпербол з фокусами в точках ± 1.

2) При $y=0$ маємо $u=\mathrm{ch}\,x, v=0$, а при $y=\pi$ – $u=-\mathrm{ch}\,x$, $v=0$ (в обох випадках $-\infty<x<+\infty$). Отже, функція $w=\mathrm{ch}\,z$ відображає смугу G на всю площину з розрізами вздовж променів $(-\infty,-1]$, $[1,+\infty)$.

3) Оскільки при $z=iy$ $\mathrm{ch}\,z=\cos y$, то відрізок $[0,i\pi]$ переходить у відрізок $[-1,1]$ і напрямку руху від точки $z=0$ до точки $z=i\pi$ відповідає рух у напрямку від точки $z=1$ до точки $z=-1$. При цьому, за правилом обходу, образи точок півсмуги D у площині w повинні знаходитися ліворуч, тобто належати нижній півплощині. При $z=x$, $x\to-\infty$ промінь $(-\infty,0]$ переходить у промінь $[1,+\infty)$, а при $z=x+i\pi$, $x\to-\infty$ функція $w(z)=-\mathrm{ch}\,x$ як функція дійсної змінної має межу, рівну $-\infty$, і промінь $\gamma=\{z\in\mathbb{C}:\operatorname{Re}z\le 0,\operatorname{Im}z=i\pi\}$ переходить у промінь $(-\infty,-1]$. Відповідно до правила обходу, півсмуга D відображається функцією $w=\mathrm{ch}\,z$ на нижню півплощину ▷

3. За допомогою функції $w=\sin z$ побудуємо відображення півсмуги $-\dfrac{\pi}{2}<\operatorname{Re}z<\dfrac{\pi}{2}$, $\operatorname{Im}z>0$ (рис. 4.49).

◁ Скористаємося записом $\sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$ і проведемо послідовні елементарні відображення $w_1 = iz$, $w_2 = e^{w_1}$, $w_3 = \dfrac{w_2}{i}$ та $w = \dfrac{1}{2}\left(w_3 + \dfrac{1}{w_3}\right)$. Оскільки кожне з відображень цієї композиції було розглянуто раніше, то легко встановити, що функція $w = \sin z$ конформно й однолисто відображає дану смугу на верхню півплощину $\operatorname{Im} w > 0$. Зокрема, півпрямим $\operatorname{Re} z = c,\ 0 < \operatorname{Im} z < \infty,\ -\dfrac{\pi}{2} \le c \le \dfrac{\pi}{2}$ відповідають частини гіпербол з фокусами в точках $w = \pm 1$, а відрізкам $-\dfrac{\pi}{2} < \operatorname{Re} z < \dfrac{\pi}{2},\ \operatorname{Im} z = d,\ d > 0$ – частини еліпсів з фокусами у тих самих точках (рис. 4.50).

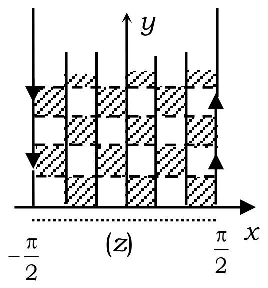


Рис. 4.49

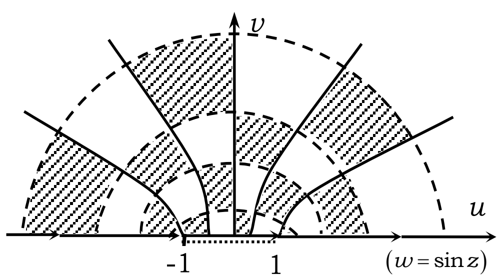


Рис. 4.50

Безпосередньо з побудованого відображення бачимо, що функція $\sin z$ на вертикальних ділянках границі півсмуги набуває дійсних значень, модуль яких більше одиниці ▷

4. Проаналізуємо відображення функціями $w = \operatorname{tg} z$ та $w = \operatorname{ctg} z$. Ураховуючи рівність $\operatorname{tg} z = \operatorname{tg}\left(z - \dfrac{\pi}{2}\right)$, дослідимо тільки $w = \operatorname{tg} z$. Для цього запишемо $\operatorname{tg} z = -i\dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}}$. Ця функція аналітична в усій площині $\mathbb{C}$, за винятком точок, у яких знаменник дробу дорівнює нулю. Такими точками для $w = \operatorname{tg} z$ є точки $z = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Оскільки $w'(z) = \dfrac{1}{\cos^2 z} \ne 0\ \forall z \in \mathbb{C}$, крім $z = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, то відображення $w = \operatorname{tg} z$ однолисте й конформне в області $\mathbb{C} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Функції $\operatorname{tg} z$ та $\operatorname{ctg} z$ у комплексній площині залишаються *періодичними* вздовж дійсної змінної, а їх період дорівнює π.

З формул (4.37), (4.38) маємо

$$|\operatorname{tg} z| = \frac{|\sin z|}{|\cos z|} = \sqrt{\frac{\sin^2 x + \operatorname{sh}^2 y}{\operatorname{ch}^2 y - \sin^2 y}}.$$

Розглянемо відображення смуги $\left\{-\dfrac{\pi}{2} < \operatorname{Re} z < \dfrac{\pi}{2}, -\infty < \operatorname{Im} z < \infty\right\}$ (рис. 4.51) функцією $w = \operatorname{tg} z$, яку подамо як композицію елементарних відображень $w_1 = 2iz$, $w_2 = e^{w_1}$ та $w = -i\dfrac{w_2 - 1}{w_2 + 1}$.

Користуючись уже відомими властивостями розглянутих елементарних відображень, можна стверджувати, що загальне відображення вказаної смуги конформне та однолисте. Границя смуги $\operatorname{Re} z = -\frac{\pi}{2}, \operatorname{Re} z = \frac{\pi}{2}, -\infty < \operatorname{Im} z < \infty$ відображається в одиничне коло $|w| = 1$. При цьому образами довільних вертикальних прямих $\operatorname{Re} z = c$, які лежать усередині смуги, є дуги кіл, що проходять через точки $w = \pm i$, а образами відрізків $\left\{-\frac{\pi}{2} < \operatorname{Re} z < \frac{\pi}{2}, \operatorname{Im} z = d\right\}$ – дуги кіл, для яких ці точки симетричні (рис. 4.52).

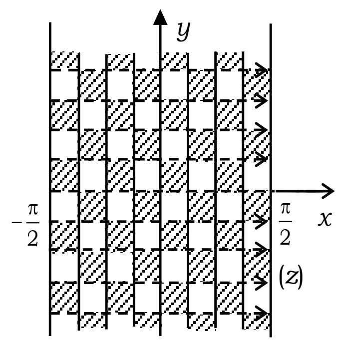


Рис. 4.51

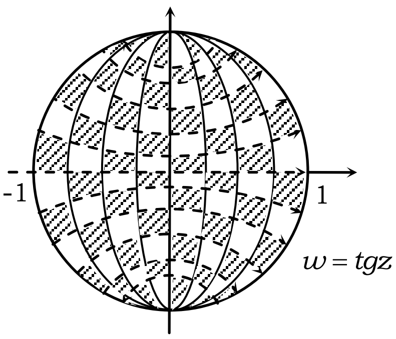


Рис. 4.52

4.6. Відображення однозначними гілками багатозначних функцій

4.6.1. Побудова області однолистості

Розглянуті раніше функції $w = f(z)$, за винятком лінійної та дробово-лінійної, могли набувати в різних точках комплексної площини однакових значень. Це означає, що відповідне відображення оберненою функцією $z = f^{-1}(w)$ не однозначне. Для того, щоб для багатозначних функцій можна було використати одержані раніше результати, потрібно вміти виділяти їх *однозначні гілки*. Покажемо, як це робиться в загальному випадку.

Нехай функція $z = f^{-1}(w)$ визначена, однозначна й неперервна в узагальненому розумінні в області $G \subset \overline{\mathbb{C}}$. Припустимо, що ми розбили область якимось способом на скінченну або зліченну множину областей $G_1, G_2, G_3, \ldots$, які попарно не мають спільних точок, а довільна точка області G є внутрішньою точкою тільки однієї з областей або спільною межовою точкою принаймні двох областей, і відображення $z = f^{-1}(w)$ взаємно однозначне в кожній з них. Тоді образом кожної з областей G_k буде область $D_k = f^{-1}(G_k)$ і весь образ області G (область $D = f^{-1}(G)$) буде покритий образами областей розбиття.

Розглянемо функцію $w = F(z)$ на кожній з областей $D_k = f^{-1}(G_k)$. Тут багатозначна, а можливо, і нескінченнозначна, функція $w = F(z)$ розглядається у вигляді кількох або нескінченно багатьох однозначних і неперервних функцій $F_k(z)$. Кожну з них назвемо *однозначною гілкою* функції $F(z)$ у відповідній області G_k. Зазначимо, що в багатьох випадках область G дозволяє зробити розбиття на області G_k, при якому відповідні області $D_k = f(G_k)$ збігаються між собою. У цьому разі багатозначна функція $w = F(z)$ має кілька, а можливо, і нескінченну кількість однозначних гілок в області G.

Побудувати розбиття області G для довільної неперервної функції на області G_k

, які задовольняють вищеперелічені умови, неможливо. Проте для аналітичної в області G функції (за винятком ізольованих особливих точок, у яких вона може набувати значення, рівного ∞) указане розбиття завжди можна побудувати, причому нескінченно багатьма способами. Такі області для аналітичних функцій є областями однолистості функції.

Тут ми скористалися без доведення таким твердженням: якщо деяка аналітична функція в області G багатолиста, то цю область можна розбити на скінченну або зліченну множину областей (областей однолистості), у кожній з яких функція стає однолистою.

4.6.2. Функція $w=\sqrt[n]{z}$ та її область однолистості

Очевидно, що ця функція обернена до функції $z=w^n$. Для кожного значення z, відмінного від нуля та нескінченності, функція $w=\sqrt[n]{z}$ має n різних значень:

$$w=\underset{+}{\sqrt[n]{|z|}}\left(\cos\frac{\mathrm{Arg}z}{n}+i\sin\frac{\mathrm{Arg}z}{n}\right)=$$

$$=\underset{+}{\sqrt[n]{|z|}}\left(\cos\frac{\arg z+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\arg z+2k\pi}{n}\right),\ (k=0,1,\ldots n-1),\qquad(4.39)$$

а при $z=0$ та $z=\infty$ – по одному значенню: $w=0$, $w=\infty$.

Як уже зазначалося в розд. 1, формула (4.39) визначає в комплексній площині точки, розташовані у вершинах правильного n-кутника, вписаного в коло радіусом $R=\underset{+}{\sqrt[n]{|z|}}$ із центром у початку координат. Вірним є й обернене: вершини правильного n-кутника з центром у точці $z=0$ можна розглядати як n значень функції $\sqrt[n]{z}$. Тому для того, щоб деяка область у площині w була областю однолистості функції $z=w^n$, необхідно й достатньо, щоб вона містила не більше однієї вершини правильного n-кутника, вписаного в коло з центром у точці $z=0$. Такій умові відповідає довільний кут розхилу $\frac{2\pi}{n}$ з вершиною в початку координат.

Якщо область однолистості функції $z=w^n$ обмежена променями, що утворюють з додатною дійсною віссю кути $\varphi_0+\frac{2k\pi}{n}$ та $\varphi_0+\frac{2(k+1)\pi}{n}$, відраховані в додатному напрямку, то промінь L (розріз), що обмежує образ області однолистості, утворить з додатною частиною дійсної осі кут, який дорівнює $n\varphi_0$. Оскільки кут φ_0 довільний, то його можна покласти рівним нулю.

Якщо всю комплексну площину розділити променями d_k $(k=1,2,\ldots n)$, які виходять з точки $w=0$ і кожен наступний відхилений від попереднього на кут $\frac{2\pi}{n}$, то комплексна площина w розділиться на n областей (рис. 4.52), у яких функція $z=w^n$ буде однолистою. Образом кожної з цих областей буде одна й та сама область G у площині z, обмежена променями L (розрізом), які виходять з точки $z=0$ (рис. 4.53).

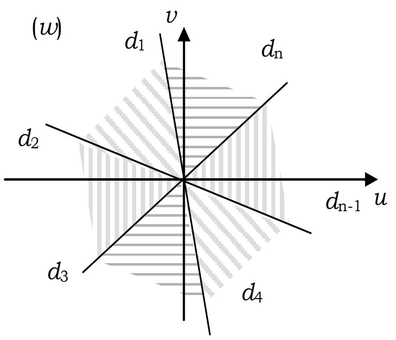


Рис. 4.52

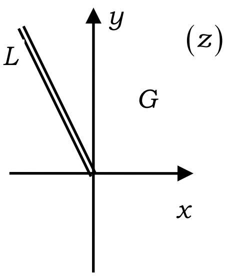


Рис. 4.53

Зафіксуємо у формулі (4.39) значення $k=j$, тобто виділимо деяку j-ту гілку багатозначної функції, позначену як

$$w_j = {}_{+}\sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi+2j\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi+2j\pi}{n}\right),$$

де $\varphi=\arg z$. Ця функція комплексну площину з розрізом уздовж променя L відобразить на кут, обмежений променями, які виходять із початку координат і нахилені до дійсної осі відповідно під кутами $\alpha=\dfrac{\varphi_0+2j\pi}{n}$ та $\beta=\alpha+\dfrac{2\pi}{n}$. Зокрема, при $n=2$ площина з розрізом удовж дійсної додатної півосі відобразиться на верхню півплощину.

При зміні поточного значення аргументу змінної z на значення $\arg z+2\pi$ ми одержимо значення функції, яке відповідатиме значенню наступної гілки функції w. Якщо значення $\arg z$ зміниться на $2\pi j$, де j пробігає всі значення $j=\overline{0,n-1}$, то таким чином буде пройдено всі гілки багатозначної функції.

Якщо повний однократний обхід навколо деякої точки вздовж довільної замкненої жорданової кривої заміняє одну неперервну гілку багатозначної функції на її наступну гілку, то таку точку називають *точкою розгалужування.* Той факт, що після n-кратного обходу точки в одному й тому самому напрямку ми повертаємось до початкової гілки, свідчить, що ця точка є точкою розгалужування порядку $n-1$.

Похідна функції w дорівнює

$$w'=\left(\sqrt[n]{z}\right)'=\frac{1}{nw^{n-1}}=\frac{1}{n\left(\sqrt[n]{z}\right)^{n-1}}$$

і для кожної гілки не дорівнює нулю в жодній скінченній точці комплексної площини. Отже, відображення кожною гілкою багатозначної функції $\sqrt[n]{z}$ конформне.

4.6.3. Логарифмічна функція

Логарифмічною функцією назвемо функцію, обернену до показникової функції $z=e^w=e^u(\cos v+i\sin v)$, визначеної для всіх z, які нерівні ∞. Позначимо цю функцію як $w=\mathrm{Ln}z$. Оскільки $e^w\neq 0$ при жодному значенні $w\in\mathbb{C}$, то $\mathrm{Ln}0$ не існує. Запишемо $z=re^{i\arg z}$, $w=u+iv$ і розв'яжемо рівняння $z=e^w$ відносно w. Отримаємо

$$w=\mathrm{Ln}z=\ln|z|+i\mathrm{Arg}\,z=u+iv.$$

Головним значенням логарифмічної функції числа z ($z\neq 0$ та $z\neq\infty$) є вираз $\ln z=\ln|z|+i\arg z$. Тоді $\forall z$ $(z\neq 0,\ z\neq\infty)$

$$\mathrm{Ln}z = \ln z + 2k\pi i = \ln|z| + i\arg z + 2k\pi i,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Отже, функція $w = \mathrm{Ln}z$ нескінченнозначна. Розглядаючи її однозначні гілки, визначають спочатку область однолистості функції $z = e^{w}$. Провівши міркування так, як для функції $w = \sqrt[n]{z}$, установлюємо, що j-та однозначна гілка функції $w = \mathrm{Ln}\,z$ відображає комплексну площину з розрізом уздовж променя $\varphi = c = \mathrm{const}$, $0 < r < \infty$ на горизонтальну смугу $c + 2j\pi < \mathrm{Im}\,w < c + 2(j+1)\pi$. Оскільки головна гілка функції визначена в $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ і така, що $(\ln z)' = \dfrac{1}{z} \neq 0$ у жодній скінченній точці комплексної площини, то відображення комплексної площини з розрізом уздовж довільного променя, який виходить із початку координат, конформне.

Легко перевірити, що точки $z = 0$ та $z = \infty$ є точками розгалужування нескінченного порядку. Такі точки називають *точками з логарифмічними особливостями*.

Найпростішою областю, у якій можна виділити однозначну й неперервну відображальну гілку, є комплексна площина з розрізом уздовж від'ємної дійсної півосі. Така площина k-ю гілкою логарифмічної функції $w = \mathrm{Ln}_k z = \ln|z| + i\arg z + i2k\pi$ конформно відображається на горизонтальну смугу $2k\pi < \mathrm{Im}\,w < 2(k+1)\pi$. Якщо кожній гілці функції $\mathrm{Ln}z$ поставити у відповідність один фіксований лист (площину з розрізом) області однолистості, то цим ми поставимо у відповідність такому відображенню нескінченнолисту область визначення функції $\mathrm{Ln}z$, областю значень якої буде вся комплексна площина.

4.6.4. Обернені тригонометричні та гіперболічні функції

Обернені тригонометричні функції визначимо, виходячи з визначення тригонометричних. Побудуємо функцію, обернену до функції $w = \cos z$. Така функція w є розв'язком рівняння $\dfrac{1}{2}\left(e^{iw} + e^{-iw}\right) = z$. Розв'язавши це рівняння відносно e^{iw}, маємо $e^{iw} = z + \sqrt{z^2 - 1}$, або $w = i\mathrm{Ln}\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right)$. Одержану функцію позначимо $w = \mathrm{Arc}\cos z$.

Зазначимо, що знак в цій рівності та знак перед коренем береться тільки $+$, оскільки під значенням кореня квадратного розуміємо обидва його значення.

З визначення функції $w = \mathrm{Arc}\cos z$ випливає, що її точками розгалужування є тільки точки $z = \pm 1$ та $z = \infty$. Тому в комплексній площині, що має розріз уздовж променів $(-\infty, -1]$, можна вилучити її однозначні й неперервні гілки, які реалізують конформне відображення.

Одну з гілок, у якій значення логарифма взято в розумінні головного, називають *головним значенням арккосинуса* та позначають $w = \arccos z$.

Зокрема, для кожного $x \in [-1, 1]$ функція $\mathrm{Arc}\cos x$ визначається за формулою $\mathrm{Arc}\cos x = \arccos x + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Виходячи з того, що $\sin z = \dfrac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right)$, а $\mathrm{tg}z = \dfrac{1}{i}\dfrac{e^{2iz} - 1}{e^{2iz} + 1}$, $z \neq \dfrac{\pi}{2} + n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, і міркуючи аналогічно попередньому, можна записати відповідні обернені тригонометричні функції:

$$\mathrm{Arc}\sin z = -i\mathrm{Ln}\left(iz + \sqrt{1 - z^2}\right),\ \mathrm{Arctg}z = \frac{1}{2i}\mathrm{Ln}\frac{1 + iz}{1 - iz}.$$

Точками розгалужування функції $w = \mathrm{Arc}\sin z$ є точки $z = \pm 1$ та $z = \infty$. На проміжку $x \in [-1, 1]$ ця функція визначається за формулою

$$\operatorname{Arcsin} x = (1)^n \arcsin x + n\pi, \ n \in \mathbb{Z}.$$

Функцію $w = \operatorname{Arctg} z$ багатозначна. Її точками розгалужування є лише дві точки: $z = \pm i$. Найпростішими областями, у яких можна вилучити її однолисті неперервні гілки, є комплексна площина з розрізом уздовж нескінченної кривої, яка сполучає точки $z = i$ та $z = -i$ (область D), а також скінченна область d, межею якої є скінченний сегмент, що сполучає ці точки. Неважко показати, що в області D k-та гілка функції

$$w = \operatorname{Arctg}_k z = \frac{1}{2i} \ln \frac{1+iz}{1-iz} + k\pi$$

конформно й однозначно відображає область D на смугу $k\pi - \frac{\pi}{2} < \operatorname{Re} w < k\pi + \frac{\pi}{2}$.

І, нарешті, визначимо функцію $w = \operatorname{Arcctg} z$ як обернену до $z = \operatorname{ctg} w$, $w \neq n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. Тоді

$$w = \operatorname{Arctg} z = -\frac{i}{2} \operatorname{Ln} \frac{z+i}{z-i}.$$

Ця функція, як і $w = \operatorname{Arctg} z$, має тільки дві точки розгалужування: $z = \pm i$. Області, у яких можна виділити однозначні й неперервні відображальні гілки, такі самі, як у функції $w = \operatorname{Arctg} z$.

Нескінченнолисті області визначення обернених тригонометричних функцій будуються як поверхні Рімана за тими самими, що й раніше, принципами.

Обернені гіперболічні функції $\operatorname{Arsh} z$, $\operatorname{Arch} z$, $\operatorname{Arth} z$ та $\operatorname{Arcth} z$ визначаються як розв'язки рівнянь $z = \frac{e^w - e^{-w}}{2}$, $z = \frac{e^w + e^{-w}}{2}$, $z = \frac{e^w - e^{-w}}{e^w + e^{-w}}$ та $z = \frac{e^w + e^{-w}}{e^w - e^{-w}}$, відповідно.

Ці функції просто виражаються через логарифми й мають вигляд

$$\operatorname{Arsh} z = \operatorname{Ln}\left(z + \sqrt{z^2+1}\right), \ \operatorname{Arch} z = \operatorname{Ln}\left(z + \sqrt{z^2-1}\right),$$

$$\operatorname{Arth} z = \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \frac{1+z}{1-z}, \ \operatorname{Arcth} z = \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \frac{z+1}{z-1}.$$

Оскільки методи їх досліджень аналогічні викладеним вище, то знайти їх області визначення та однолистості ми пропонуємо читачу самостійно.

Інструкція з користуванням гіперпосиланнями

<MouseLeftClick> —- перейти за гіперпосиланням;
Комбінація клавіш **Alt+<Left>** — повернутися назад.