

Терміни виконання: 1-30.11.2024

**Лабораторна робота № 3**  
**КЛАС MATRIX ДЛЯ МАТРИЧНИХ ОБЧИСЛЕНЬ**  
**В РАЦІОНАЛЬНІЙ АРИФМЕТИЦІ**  
**(10 балів)**

Розробити шаблонний клас Matrix для реалізації матричних обчислень. Елементи матриці повинні бути або дійсними числами (double), або раціональними числами (клас TRational), тобто парою чисельник-знаменник у вигляді масиву цифр, що задають довгі цілі числа TLong. Ірраціональні обчислення (наприклад, квадратного кореня, sin та cos) замінити раціональними наближеннями. Кількість цифр в чисельнику і знаменнику задати як параметр. Надати користувачеві можливість вибирати спосіб вводу даних: double або TRational.

Клас Matrix повинен містити переважані операції матричної алгебри: додавання, віднімання, транспонування, а також переважаний оператор доступу за індексом (5 балів)

У класі TRational реалізуйте арифметичні операції(+,-,\*,/), також скорочення дроби і можливість перетворення типу TRational у тип double і навпаки (3 бали).

Крім того, необхідно реалізувати один з наступних методів згідно варіанту (2 бали):

1. Метод Штрассена для швидкого множення матриць [Голуб, Ван Лоун, с. 42–43].
2. Розв'язання системи рівнянь методом Гаусса.
3. Знаходження оберненої матриць за методом Жордана.
4. Розв'язання системи рівнянь методом Хаусхедера (обертання) [Ортега, с. 92].
5. Обчислення визначника матриці.
6. Обчислення норми матриці  $\| \cdot \|_1$  [Wikipedia].

Ортега Дж. Введение в параллельные и векторные методы решения линейных систем. — М.: Мир, 1991.

Голуб Дж., Ван Лоун Ч. Матричные вычисления. — М.: Мир, 1999.

Конспективний опис методів наведений нижче.

### 1. Метод Штрассена

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$$

$$P_1 = (A_{11} + A_{22})(B_{11} + B_{22}),$$

$$P_2 = (A_{21} + A_{22})B_{11},$$

$$P_3 = A_{11}(B_{12} - B_{22}),$$

$$P_4 = A_{22}(B_{21} - B_{11}),$$

$$P_5 = (A_{11} + A_{12})B_{22},$$

$$P_6 = (A_{21} - A_{11})(B_{11} + B_{12}),$$

$$P_7 = (A_{12} - A_{22})(B_{21} + B_{22}),$$

$$C_{11} = P_1 + P_4 - P_5 + P_7,$$

$$C_{12} = P_3 + P_5,$$

$$C_{21} = P_2 + P_4,$$

$$C_{22} = P_1 + P_3 - P_2 + P_6.$$

### 2. Метод Вінограда

$$A_i = \sum_{k=1}^{n/2} a_{i,2k-1} a_{i,2k},$$

$$B_j = \sum_{k=1}^{n/2} b_{2k-1,j} b_{2k,j},$$

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^{n/2} (a_{i,2k-1} + b_{2k,j})(a_{i,2k} + b_{2k-1,j}) - A_i - B_j.$$

### 3. Метод Гаусса

Загальновідомий метод, описаний в багатьох підручниках.



## 5. Метод спряжених градієнтів

$$Ax = f$$

$u_0$  – довільне початкове наближення,

$$u_1 = (\hat{A} - \tau_1 A)u_0 + \tau_1 f,$$

...

$$u_{k+1} = \alpha_{k+1}(E - \tau_{k+1}A)u_k + (1 - \alpha_{k+1})u_{k-1} + \alpha_{k+1}\tau_{k+1}f,$$

де

$$r_k = f - Au_k \text{ – нев'язка,}$$

$$\tau_{k+1} = \frac{(r_k, r_k)}{(Ar_k, r_k)},$$

$$\alpha_1 = 1; \quad \alpha_{k+1} = \left[ 1 - \frac{1}{\alpha_k} \cdot \frac{\tau_{k+1}}{\tau_k} \cdot \frac{(r_k, r_k)}{(r_{k-1}, r_{k-1})} \right]^{-1}, k = 1, 2, \dots$$

Якщо всі обчислення виконуються точно, метод спряжених градієнтів є прямим, тобто приводить до розв'язку рівно за  $n$  кроків. Якщо обчислення є заокругленими, метод стає ітераційним. Ітерації слід припинити, коли нев'язка стає менше наперед заданого рівня точності.



$$c_2 = \frac{a_{11}^{(1)}}{\sqrt{(a_{11}^{(1)})^2 + a_{31}^2}}, \quad s_2 = \frac{a_{31}}{\sqrt{(a_{11}^{(1)})^2 + a_{31}^2}},$$

а третє рівняння, отримується при додаванні результатів множення тих самих рівнянь на  $-s_2$  і  $c_2$ . Отримуємо систему

$$\begin{aligned} a_{11}^{(2)}x_1 + a_{12}^{(2)}x_2 + \dots + a_{1m}^{(2)}x_m &= f_1^{(2)}, \\ a_{22}^{(1)}x_2 + \dots + a_{2m}^{(2)}x_m &= f_2^{(1)}, \\ a_{32}^{(1)}x_2 + \dots + a_{3m}^{(1)}x_m &= f_3^{(1)}, \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + \dots + a_{4m}x_m &= f_4, \\ &\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mm}x_m &= f_m, \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned} a_{1j}^{(2)} &= c_2 a_{1j}^{(1)} + s_2 a_{3j} & j=1, 2, \dots, m, & \quad f_1^{(2)} = c_2 f_1^{(1)} + s_2 f_3; \\ a_{3j}^{(1)} &= -s_2 a_{1j}^{(1)} + c_2 a_{3j} & j=2, 3, \dots, m, & \quad f_3^{(1)} = -s_2 f_1^{(1)} + c_2 f_3. \end{aligned}$$

Виконавши перетворення  $m-1$  раз, прийдемо до системи

$$\begin{aligned} a_{11}^{(m-1)}x_1 + a_{12}^{(m-1)}x_2 + \dots + a_{1m}^{(m-1)}x_m &= f_1^{(m-1)}, \\ a_{22}^{(1)}x_2 + \dots + a_{2m}^{(1)}x_m &= f_2^{(1)}, \\ &\dots\dots\dots \\ a_{m2}^{(1)}x_2 + \dots + a_{mm}^{(1)}x_m &= f_m^{(1)}. \end{aligned}$$

Далі за цим алгоритмом перетвориться матриця

$$\begin{aligned} a_{22}^{(1)}x_2 + \dots + a_{2m}^{(1)}x_m &= f_2^{(1)}, \\ &\dots\dots\dots \\ a_{m2}^{(1)}x_2 + \dots + a_{mm}^{(1)}x_m &= f_m^{(1)}. \end{aligned}$$

тощо.

У результаті  $m-1$  етапів прямого ходу система буде приведена до трикутного виду.

$$\begin{aligned} a_{11}^{(m-1)}x_1 + a_{12}^{(m-1)}x_2 + \dots + a_{1m}^{(m-1)}x_m &= f_1^{(m-1)}, \\ a_{22}^{(m-2)}x_2 + \dots + a_{2m}^{(m-2)}x_m &= f_2^{(m-2)}, \\ &\dots\dots\dots \\ a_{mm}^{(1)}x_m &= f_m^{(1)}. \end{aligned}$$

Введемо в розгляд матрицю



### 7. Метод Хаусхолдера (QR-розклад)

Перетворенням Хаусхолдера називається матриця вигляду  $E - ww^T$ , де  $w$  — вектор-стовбець, для якого  $ww^T = 2$ . Матриця Хаусхолдера є симетричною і ортогональною. Щоб отримати розклад Хаусхолдера зробимо так. Нехай  $a_1$  — перший стовпчик матриці  $A$ . Покладемо

$$u^T = (a_{11} - s, a_{21}, \dots, a_{n1}), \quad w = \mu u,$$

де  $s = \pm (a_1^T a_1)^{1/2}$ ,  $\gamma = (s^2 - a_{11}s)^{-1}$ ,  $\mu = \gamma^{1/2}$ .

$$P_1 = I - ww^T,$$

$$A_1 = P_1 A = \begin{bmatrix} s & a'_{12} & \dots & a'_{1n} \\ 0 & a'_{22} & \dots & a'_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a'_{n2} & \dots & a'_{nn} \end{bmatrix}.$$

Застосуємо цей алгоритм для квадратної підматриці, розміру  $(n-1) \times (n-1)$  тощо. Продовжуючи таким чином, можна анулювати всі піддіагональні елементи матриці. Таким чином,

$$P_{n-1} \dots P_1 A = R,$$

де  $R$  — верхня трикутна матриця. Розв'язок знаходимо зворотнім ходом знаходимо, як в методі Гівенса.

### 8. Модифікований метод Грама-Шмідта (QR-розклад)

Метод обчислює  $QR$ -розклад матриці  $A = QR$ , де  $Q$  – унітарна, а  $R$  – верхня трикутна матриця. Отже,  $x = R^{-1}Q^T f$ .

for  $i = 1$  to  $n$  // Обчислити  $i$ -ті стовбці матриць  $Q$  і  $R$

$$q_i = a_i$$

for  $j = 1$  to  $i - 1$  // Відняти від  $a_i$  компоненту в напрямку  $q_j$

$$r_{ij} = q_j^T q_i$$

$$q_i = q_i - r_{ij} q_j$$

end for

$$r_{ii} = \sqrt{\sum_{i=1}^n q_i^2}$$

if  $r_{ii} = 0$  //  $a_i$  лінійно залежить від  $a_1, \dots, a_{i-1}$

stop

end if

$$q_i = q_i / r_{ii}$$

end for

### 9. Метод Холецкого (LU-розклад)

Якщо  $A$  – симетрична позитивно визначена матриця, то існує дійсна невідроджена нижня трикутна матриця  $L$ , так що

$$LL^T = A.$$

Якщо  $l_{ii} > 0$ , то розклад єдиний.

$$l_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} l_{jk}}{l_{jj}}, \quad j = 1, 2, \dots, i-1;$$

$$l_{ii} = \left( a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}^2 \right)^{1/2}.$$

Розв'язання системи

$$Ax = b$$

зводиться до розв'язання систем з трикутними матрицями

$$Ly = b,$$

$$L^T x = y.$$



$D$  є границею послідовності матриць  $A_k$ , а  $V = U_0 U_1 U_2 \dots$

**Тест**

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 5 & 6 \\ 5 & 20 & 4 \\ 6 & 4 & 30 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 7.14 & 0 & 0 \\ 0 & 19.15 & 0 \\ 0 & 0 & 33.71 \end{pmatrix}$$