Терміни виконання: 1-30.11.2025

Лабораторна робота № 3

КЛАС MATRIX ДЛЯ МАТРИЧНИХ ОБЧИСЛЕНЬ В РАЦІОНАЛЬНІЙ АРИФМЕТИЦІ

Розробити шаблонний клас Matrix для реалізації матричних обчислень. Елементи матриці повинні бути або дійсними числами (double), або раціональними числами (клас TRational), тобто парою чисельник-знаменник у вигляді масиву цифр, що задають довгі цілі числа TLong. Ірраціональні обчислення (наприклад, квадратного кореня, sin та cos) замінити раціональними наближеннями. Кількість цифр в чисельнику і знаменнику задати як параметр. Надати користувачеві можливість вибирати спосіб вводу дани:х double або TRational. Клас TLong повинен містити операції швидкого множення і ділення (Карацуби, Штрассена, Тоома-Кука або інші). Клас Matrix повинен містити перевантажені операції матричної алгебри: додавання, віднімання, транспонування, а також перевантажений оператор доступу за індексом. Реалізуйте можливість перетворення типу TRational у тип double і навпаки.

Необхідно реалізувати наступні методі.:

1. Метод Штрассена для швидкого множення матриць [Голуб, Ван Лоун, с. 42–43].
2. Метод Віноград для швидкого множення матриць [ru.wikipedia.org - “Список алгоритмов”].
3. Розв’язання системи рівнянь методом Гаусса.
4. Знаходження оберненої матриць за методом Жордана (перевантажений оператор).
5. Розв’язання системи рівнянь методом спряжених градієнтів [Голуб, Ван Лоун, с. 42–43].
6. Розв’язання системи рівнянь методом Хаусходера (обертання) [Ортега, с. 92].
7. Розв’язання системи рівнянь методом Гівенса (відображення) [Ортега, с. 97].
8. Розв’язання системи рівнянь модифікованим методом Грама–Шмідта [Голуб, Ван Лоун, с. 202].
9. Розв’язання системи рівнянь методом Холецького [Ортега, с. 87].
10. Знаходження спектру матриці методом Якобі (для симетричних додатно визначених матриць).

Ортега Дж. Введение в параллельные и векторные методы решения линейных систем. — М.: Мир, 1991.
Голуб Дж., Ван Лоун Ч. Матричные вычисления. — М.: Мир, 1999.

Конспективний опис методів наведений нижче.

1. Метод Штрассена

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$$

$P_1 = \left(A_{11} + A_{22}\right)\left(B_{11} + B_{22}\right),$

$P_2 = \left(A_{21} + A_{22}\right)B_{11},$

$P_3 = A_{11}\left(B_{12} - B_{22}\right),$

$P_4 = A_{22}\left(B_{21} - B_{11}\right),$

$P_5 = \left(A_{11} + A_{12}\right)B_{22},$

$P_6 = \left(A_{21} - A_{11}\right)\left(B_{11} + B_{12}\right),$

$P_7 = \left(A_{12} - A_{22}\right)\left(B_{21} + B_{22}\right),$

$C_{11} = P_1 + P_4 - P_5 + P_7,$

$C_{12} = P_3 + P_5,$

$C_3 = P_2 + P_4,$

$C_{22} = P_1 + P_3 - P_2 + P_6.$

2. Метод Вінограда

$A_i = \sum_{k=1}^{n/2} a_{i,2k-1} a_{i,2k},$

$B_j = \sum_{k=1}^{n/2} b_{2k-1,j} b_{2k,j},$

$C_{ij} = \sum_{k=1}^{n/2} \left(a_{i,2k-1} + b_{2k,j}\right)\left(a_{i,2k} + b_{2k-1,j}\right) - A_i - B_j.$

3. Метод Гаусса

Загальновідомий метод, описаний в багатьох підручниках.

4. Метод Жордана

$$L_{k+1}=\begin{pmatrix}
1 & & & -\dfrac{a_{1,k+1}^{(k)}}{a_{k+1,k+1}^{(k)}} & & & \\
 & 1 & & \ldots & & 0 & \\
 & & \ldots & -\dfrac{a_{k,k+1}^{(k)}}{a_{k+1,k+1}^{(k)}} & \ldots & & \\
 & & & \dfrac{1}{a_{k+1,k+1}^{(k)}} & & & \\
 & & & -\dfrac{a_{k+2,k+1}^{(k)}}{a_{k+1,k+1}^{(k)}} & & & \\
 & 0 & & \ldots & & 1 & \\
 & & & -\dfrac{a_{n,k+1}^{(k)}}{a_{k+1,k+1}^{(k)}} & & & 1
\end{pmatrix}$$

$$A_{k+1}=L_{k+1}A_k\,,\quad A_0=A\,,\quad A_0=E$$

$$A^{-1}=L_nL_{n-1}\ldots L_1$$

Тест

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix},\ A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & -0.5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -3 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1.5 & -0.5\end{pmatrix}.$$

5. Метод спряжених градієнтів

$$Ax = f$$

u_0 – довільне початкове наближення,

$u_1 = (\text{Å} - \tau_1 \mathbf{A})u_0 + \tau_1 f$,

…

$u_{k+1} = \alpha_{k+1}(E - \tau_{k+1}A)u_k + (1 - \alpha_{k+1})u_{k-1} + \alpha_{k+1}\tau_{k+1} f$,

де

$r_k = f - Au_k$ – нев'язка,

$$\tau_{k+1} = \frac{(r_k, r_k)}{(Ar_k, r_k)},$$

$$\alpha_1 = 1; \quad \alpha_{k+1} = \left[1 - \frac{1}{\alpha_k} \cdot \frac{\tau_{k+1}}{\tau_k} \cdot \frac{(r_k, r_k)}{(r_{k-1}, r_{k-1})}\right]^{-1}, k = 1, 2, \text{K}$$

Якщо всі обчислення виконуються точно, метод спряжених градієнтів є прямим, тобто приводить до розв'язку рівно за *n* кроків. Якщо є обчислення є заокругленими, метод стає ітераційним. Ітерації слід припинити, коли нев'язка стає менше наперед заданого рівня точності.

6. Метод Гівенса (обертань) (QR-розклад)

Нехай

$$
\begin{gathered}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1m}x_m = f_1, \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2m}x_m = f_2, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mm}x_m = f_m.
\end{gathered}
$$

Помножимо перше рівняння на c_1, друге на s_1, складемо їх і замінимо перше рівняння системи. Потім перше рівняння вихідної системи множимо на $-s_1$, друге на c_1, складаємо і замінюємо друге рівняння. Таким чином, перші два рівняння заміняються рівняннями

$$
\begin{gathered}
(c_1a_{11} + s_1a_{21})x_1 + (c_1a_{12} + s_1a_{22})x_2 + \ldots + (c_1a_{1m} + s_1a_{2m})x_m = c_1 f_1 + s_1 f_2, \\
(-s_1a_{11} + c_1a_{21})x_1 + (-s_1a_{12} + c_1a_{22})x_2 + \ldots + (-s_1a_{1m} + c_1a_{2m})x_m = -s_1 f_1 + c_1 f_2.
\end{gathered}
$$

Щоб виключити із другого рівняння змінну x_1, параметри c_1 і s_1 повинні задовольняти рівняння

$$-s_1a_{11} + c_1a_{21} = 0$$

$$c_1^2 + s_1^2 = 1$$

Звідси $c_1 = \dfrac{a_{11}}{\sqrt{a_{11}^2 + a_{21}^2}}$, $s_1 = \dfrac{a_{21}}{\sqrt{a_{11}^2 + a_{21}^2}}$. Ці числа можна інтерпретувати як косинус і синус деякого кута α_1. Тому метод називається методом обертання, або Гівенса).

У результаті перетворень одержимо систему

$$
\begin{aligned}
a_{11}^{(1)}x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{1m}^{(1)}x_m &= f_1^{(1)}, \\
a_{22}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{2m}^{(1)}x_m &= f_2^{(1)}, \\
a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \ldots + a_{3m}x_m &= f_3, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mm}x_m &= f_m,
\end{aligned}
$$

де

$$
\begin{aligned}
a_{1j}^{(1)} &= c_1a_{1j} + s_1a_{2j} \qquad j = 1,2,\ldots,m, \qquad f_1^{(1)} = c_1 f_1 + s_1 f_2; \\
a_{2j}^{(1)} &= -s_1a_{1j} + c_1a_{2j} \qquad j = 1,2,\ldots,m, \qquad f_2^{(1)} = -s_1 f_1 + c_1 f_2.
\end{aligned}
$$

Далі перше рівняння системи заміняється новим, отриманим додаванням результатів множення першого і третього рівнянь відповідно на

$$c_2 = \frac{a_{11}^{(1)}}{\sqrt{(a_{11}^{(1)})^2 + a_{31}^2}}, \qquad s_2 = \frac{a_{31}}{\sqrt{(a_{11}^{(1)})^2 + a_{31}^2}},$$

а третє рівняння, отримується при додаванні результатів множення тих самих рівнянь на $-s_2$ і c_2. Отримуємо систему

$$\begin{aligned}
&a_{11}^{(2)}x_1 + a_{12}^{(2)}x_2 + \ldots + a_{1m}^{(2)}x_m = f_1^{(2)},\\
&\qquad\quad a_{22}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{2m}^{(2)}x_m = f_2^{(1)},\\
&\qquad\quad a_{32}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{3m}^{(1)}x_m = f_3^{(1)},\\
&a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + \ldots + a_{4m}x_m = f_4,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mm}x_m = f_m,
\end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned}
&a_{1j}^{(2)} = c_2 a_{1j}^{(1)} + s_2 a_{3j} \qquad j = 1,2,\ldots,m, \qquad f_1^{(2)} = c_2 f_1^{(1)} + s_2 f_3;\\
&a_{3j}^{(1)} = -s_2 a_{1j}^{(1)} + c_2 a_{3j} \qquad j = 2,3,\ldots,m, \qquad f_3^{(1)} = -s_2 f_1^{(1)} + c_2 f_3.
\end{aligned}$$

Виконавши перетворення m–1 раз, прийдемо до системи

$$\begin{aligned}
&a_{11}^{(m-1)}x_1 + a_{12}^{(m-1)}x_2 + \ldots + a_{1m}^{(m-1)} = f_1^{(m-1)},\\
&\qquad\qquad a_{22}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{2m}^{(1)}x_m = f_2^{(1)},\\
&\qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\qquad\qquad a_{m2}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{mm}^{(1)}x_m = f_m^{(1)}.
\end{aligned}$$

Далі за цим алгоритмом перетвориться матриця

$$\begin{aligned}
&a_{22}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{2m}^{(1)}x_m = f_2^{(1)},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_{m2}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{mm}^{(1)}x_m = f_m^{(1)}.
\end{aligned}$$

тощо.

У результаті m–1 етапів прямого ходу система буде приведена до трикутного виду.

$$\begin{aligned}
&a_{11}^{(m-1)}x_1 + a_{12}^{(m-1)}x_2 + \ldots + a_{1m}^{(m-1)}x_m = f_1^{(m-1)},\\
&\qquad\quad a_{22}^{(m-2)}x_2 + \ldots + a_{2m}^{(m-2)}x_m = f_2^{(m-2)},\\
&\qquad\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad a_{mm}^{(1)}x_m = f_m^{(1)}.
\end{aligned}$$

Введемо в розгляд матрицю

$$U_{p,q} = \begin{array}{c@{}l}
\left(\begin{array}{ccccccc}
1 &&&&&& \\
& \ldots &&&&& \\
&& \cos\varphi && \sin\varphi && \\
&&& \ldots &&& \\
& 0 && 1 && 0 & \\
&&&& \ldots && \\
&& -\sin\varphi && \cos\varphi && \\
&&&&& \ldots & \\
&&&&&& 1
\end{array}\right) &
\begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow p \\ \\ \\ \\ \leftarrow q \\ \\ \\ \end{array} \\
\begin{array}{ccccccc} && \uparrow && \uparrow && \\ && p && q && \end{array} &
\end{array}$$

Описаний процес еквівалентний множенню матриць

$$PA = P_{n,n\text{-}1} \ldots P_{1,2}A = R,$$

де R – трикутна матриця. Отже, розв’язок можна отримати за допомогою процедури зворотного ходу: $Rx = P_{n,n\text{-}1} \ldots P_{1,2}f$.

7. Метод Хаусхолдера (QR-розклад)

Перетворенням Хаусхолдера називається матриця вигляду $E - ww^T$, де w — вектор-стовбець, для якого $ww^T = 2$. Матриця Хаусхолдера є симетричною і ортогональною. Щоб отримати розклад Хаусхолдера зробимо так. Нехай a_1 — перший стовпчик матриці A. Покладемо

$$u^T = (a_{11} - s, a_{21}, ..., a_{n1}), w = \mu u,$$

де $s = \pm\left(a_1^T a_1\right)^{1/2}$, $\gamma = \left(s^2 - a_{11}s\right)^{-1}$, $\mu = \gamma^{1/2}$.

$$P_1 = I - ww^T,$$

$$A_1 = P_1 A = \begin{bmatrix} s & a'_{12} & \dots & a'_{1n} \\ 0 & a'_{22} & \dots & a'_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a'_{n2} & \dots & a'_{nn} \end{bmatrix}.$$

Застосуємо цей алгоритм для квадратної підматриці, розміру $(n-1)\times(n-1)$ тощо. Продовжуючи таким чином, можна анулювати всі піддіагональні елементи матриці. Таким чином,

$$P_{n-1} \dots P_1 A = R,$$

де R — верхня трикутна матриця. Розв’язок знаходимо зворотнім ходом знаходимо, як в методі Гівенса.

8. Модифікований метод Грама-Шмідта (QR-розклад)

Метод обчислює QR-розклад матриці $A = QR$, де Q – унітарна, а R – верхня трикутна матриця. Отже, $x = R^{-1}Q^{T}f$.

for i = 1 to n *// Обчислити i-ті стовбці матриць Q і R*

$q_i = a_i$

for j = 1 to i – 1 // Відняти від a_i компоненту в напрямку q_i

$r_{ij} = q_j^T q_i$

$q_i = q_i - r_{ij}q_j$

end for

$r_{ii} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} q_i^2}$

if $r_{ii} = 0$ // a_i лінійно залежить від $a_1, ..., a_{i-1}$

stop

end if

$q_i = q_i / r_{ii}$

end for

9. Метод Холецького (LU-розклад)

Якщо A – симетрична позитивно визначена матриця, то існує дійсна невироджена нижня трикутна матриця L, так що

$$LL^T = A.$$

Якщо $l_{ii} > 0$, то розклад єдиний.

$$l_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} l_{jk}}{l_{jj}}, \; j = 1, 2, \ldots i - 1;$$

$$l_{ii} = \left(a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}^2 \right)^{1/2}.$$

Розв’язання системи

$$Ax = b$$

зводиться до розв’язання систем з трикутними матрицями

$$Ly = b,$$
$$L^T x = y.$$

10. Метод Якобі

Метод Якоби – це ітераційна процедура, що приводить вихідну симетричну матрицю до діагонального виду за допомогою послідовності елементарних ортогональних обертань, називаних *обертаннями Якобі*, чи *плоскими обертаннями*. На (k+1)-кроці процедури здійснюється перетворення виду:

$$A_{K+1} = U_k^T A_k U_k \ ,$$

де матриця U_k являє собою ортогональну матрицю обертань.

На кожній ітерації анулюється максимальний по модулю позадіагональний елемент a_{pq}.

$$U_{k+1} = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \cdots & & & & & \\ & & \cos\varphi & & \sin\varphi & & \\ & & & \cdots & & & \\ & 0 & & 1 & & 0 & \\ & & & & \cdots & & \\ & & -\sin\varphi & & \cos\varphi & & \\ & & & & & \cdots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow p \\ \\ \\ \\ \leftarrow q \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{ccccccc} & & \uparrow & & \uparrow & & \\ & & p & & q & & \end{array} & \end{array}$$

$$u_{pp} = u_{qq} = \cos\varphi,\ u_{pq} = -u_{qp} = \sin\varphi$$

$$u_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j,\ i \neq p,\ i \neq q, \\ 0, & i \neq j,\ i \neq p,\ i \neq q. \end{cases}$$

Для того щоб анулювати елемент у позиції (p,q), кут φ вибирають у такий спосіб: спочатку обчислюють величину

$$\theta = ctg 2\varphi = \frac{a_{qq} - a_{pp}}{2a_{pq}} \ ,$$

а потім визначають $tg\varphi$ або як найменший по модулю корінь квадратного рівняння $t^2 + 2t\theta = 1$, або по формулі $tg\varphi = \frac{1}{2\theta}$, якщо значення θ є достатньо великим.

У результаті застосування методу Якобі матриця *А* перетвориться до вигляду

$$D = V^T A V \ ,$$

де D – діагональна матриця, на діагоналі якої стоять власні числа матриці *А*. Матриця

D є границею послідовності матриць A_k, а $V = U_0 U_1 U_2 \ldots$.

Тест

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 5 & 6 \\ 5 & 20 & 4 \\ 6 & 4 & 30 \end{pmatrix}, \quad D \begin{pmatrix} 7.14 & 0 & 0 \\ 0 & 19.15 & 0 \\ 0 & 0 & 33.71 \end{pmatrix}$$