

Лекція 12. МСЕ в багатомірному випадку (приклад, метод Фур'є)
 Система сіткових рівнянь методу Гальоркіна, що апроксимує однорідну задачу Дірихле для рівняння Пуасона в одиничному квадраті:

$$\begin{cases} -u_{i,j-1}^h - u_{i-1,j}^h + 4u_{i,j}^h - u_{i+1,j}^h - u_{i,j+1}^h = f_{i,j}^h, \\ \quad \quad \quad i, j = 1, \dots, n; \\ u_{i,0}^h = u_{i,n+1}^h = 0, \quad i = 0, \dots, n+1; \\ u_{0,j}^h = u_{n+1,j}^h = 0, \quad j = 0, \dots, n+1. \end{cases} \quad (1)$$

Власні функції (вектори) і числа оператора задачі (1):

$$v^{(k,l)} = \{v_{i,j}^{(k,l)}\}_{i,j=0}^{n+1} = \left\{ \sin \frac{k\pi i}{n+1} \cdot \sin \frac{l\pi j}{n+1} \right\}_{i,j=0}^{n+1}, \quad (2)$$

$$\lambda_{k,l} = 4 \left(\sin^2 \frac{k\pi}{2(n+1)} + \sin^2 \frac{l\pi}{2(n+1)} \right), \quad k, l = 1, \dots, n.$$

Дійсно, тому що $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta$, то

$$\begin{aligned} -v_{i,j-1}^{(k,l)} - v_{i-1,j}^{(k,l)} + 4v_{i,j}^{(k,l)} - v_{i+1,j}^{(k,l)} - v_{i,j+1}^{(k,l)} &= \\ &= [-\sin(i\varphi_k - \varphi_k) + 2\sin(i\varphi_k) - \sin(i\varphi_k + \varphi_k)] \cdot \sin(j\psi_l) + \\ &+ [-\sin(j\psi_l - \psi_l) + 2\sin(j\psi_l) - \sin(j\psi_l + \psi_l)] \cdot \sin(i\varphi_k) = \\ &= 2(1 - \cos \varphi_k) \cdot \sin(i\varphi_k) \cdot \sin(j\psi_l) + 2(1 - \cos \psi_l) \cdot \sin(j\psi_l) \cdot \sin(i\varphi_k) = \\ &= 4 \left(\sin^2 \frac{\varphi_k}{2} + \sin^2 \frac{\psi_l}{2} \right) \cdot \sin(i\varphi_k) \cdot \sin(j\psi_l) = \lambda_{k,l} \cdot v_{i,j}^{(k,l)}, \end{aligned}$$

де $\varphi_k = k\pi/(n+1)$, $\psi_l = l\pi/(n+1)$.

Власні функції ортогональні (тому що оператор самоспряжений):

$$\begin{aligned} (\bar{v}^{(k,l)}, \bar{v}^{(m,t)}) &= \sum_{j=1}^n \left[\sum_{i=1}^n \sin(i\varphi_k) \cdot \sin(i\varphi_m) \right] \sin(j\psi_l) \cdot \sin(j\psi_t) = \\ &= \frac{n+1}{2} \cdot \delta_{k,m} \cdot \sum_{j=1}^n \sin(j\psi_l) \cdot \sin(j\psi_t) = \frac{(n+1)^2}{4} \cdot \delta_{k,m} \cdot \delta_{l,t}. \end{aligned}$$

Розкладання по базису

Якщо розв'язок і праву частину системи $A_h \bar{u}^h = \bar{f}^h$ розкласти по ортонормованому базису із власних векторів:

$$\bar{f}^h = \frac{4}{(n+1)^2} \sum_{k,l=1}^n (\bar{f}^h, \bar{v}^{(k,l)}) \cdot \bar{v}^{(k,l)},$$

$$\bar{u}^h = \frac{4}{(n+1)^2} \sum_{k,l=1}^n (\bar{u}^h, \bar{v}^{(k,l)}) \cdot \bar{v}^{(k,l)} = \frac{2}{n+1} \sum_{k,l=1}^n u_{(k,l)}^h \cdot \bar{v}^{(k,l)},$$

і підставити в рівняння, то

$$\frac{2}{n+1} \sum_{k,l=1}^n \lambda_{k,l} \cdot u_{(k,l)}^h \cdot \bar{v}^{(k,l)} = \frac{4}{(n+1)^2} \sum_{k,l=1}^n (\bar{f}^h, \bar{v}^{(k,l)}) \cdot \bar{v}^{(k,l)}$$

$$\Rightarrow u_{(k,l)}^h = \frac{2 \cdot (\bar{f}^h, \bar{v}^{(k,l)})}{(n+1) \cdot \lambda_{k,l}},$$

і, нарешті, розв'язок системи сіткових рівнянь знаходиться за формулою

$$\bar{u}^h = \frac{4}{(n+1)^2} \sum_{k,l=1}^n \frac{(\bar{f}^h, \bar{v}^{(k,l)})}{\lambda_{k,l}} \cdot \bar{v}^{(k,l)}. \quad (3)$$

Реалізація формули (3)

здійснюється в кілька кроків.

1 крок – обчислення $(\bar{f}^h, \bar{v}^{(k,l)})$.

Так як

$$\begin{aligned} (\bar{f}^h, \bar{v}^{(k,l)}) &= \sum_{i,j=1}^n f_{i,j}^h \cdot v_{i,j}^{(k,l)} = \sum_{j=1}^n \left[\sum_{i=1}^n f_{i,j}^h \cdot \sin(i\varphi_k) \right] \cdot \sin(j\psi_l) = \\ &= \sum_{j=1}^n f_{k,j}^1 \cdot \sin(j\psi_l), \quad f_{k,j}^1 = \sum_{i=1}^n f_{i,j}^h \cdot \sin(i\varphi_k), \end{aligned}$$

то спочатку обчислюємо

$$f_{k,j}^1 = \sum_{i=1}^n f_{i,j}^h \cdot \sin(i\varphi_k), \quad k, j = 1, \dots, n; \quad O(n^3) \text{ дій,}$$

потім обчислюємо

$$f_{(k,l)}^h = \sum_{j=1}^n f_{k,j}^1 \cdot \sin(j\psi_l), \quad k, l = 1, \dots, n; \quad O(n^3) \text{ дій.}$$

2 крок – обчислення

$$u_{(k,l)}^1 = \frac{4 \cdot (\bar{f}^h, \bar{v}^{(k,l)})}{(n+1)^2 \cdot \lambda_{k,l}} = \frac{4 \cdot f_{(k,l)}^h}{(n+1)^2 \cdot \lambda_{k,l}}, \quad k, l = 1, \dots, n; \quad O(n^2) \text{ дій.}$$

3 крок – обчислення \bar{u}^h

Так як

$$\bar{u}^h = \frac{4}{(n+1)^2} \sum_{k,l=1}^n \frac{(\bar{f}^h, \bar{v}^{(k,l)})}{\lambda_{k,l}} \cdot \bar{v}^{(k,l)} = \sum_{k,l=1}^n u_{(k,l)}^1 \cdot \bar{v}^{(k,l)},$$

$$u_{i,j}^h = \sum_{k,l=1}^n u_{(k,l)}^1 \cdot v_{i,j}^{(k,l)} = \sum_{l=1}^n \left[\sum_{k=1}^n u_{(k,l)}^1 \cdot \sin(i\varphi_k) \right] \cdot \sin(j\psi_l) =$$

$$= \sum_{l=1}^n u_{(i,l)}^2 \cdot \sin(j\psi_l), \quad u_{(i,l)}^2 = \sum_{k=1}^n u_{(k,l)}^1 \cdot \sin(i\varphi_k),$$

то спочатку обчислюємо

$$u_{(i,l)}^2 = \sum_{k=1}^n u_{(k,l)}^1 \cdot \sin(i\varphi_k), \quad i, l = 1, \dots, n; \quad O(n^3) \text{ дій},$$

і, нарешті, обчислюємо

$$u_{i,j}^h = \sum_{l=1}^n u_{(i,l)}^2 \cdot \sin(j\psi_l), \quad i, j = 1, \dots, n; \quad O(n^3) \text{ дій}.$$

Таким чином, розв'язок системи сіткових рівнянь методу Гальоркіна ми обчислимо за $O(n^3)$ арифметичних дій, тобто в n раз швидше, ніж методом матричної прогонки.

Перший і третій кроки вище викладеного алгоритму складаються з однотипних підкроків: розкладання n -мірних векторів по синусах. Наприклад, перший підкрок першого кроку

$$f_{k,j}^1 = \sum_{i=1}^n f_{i,j}^h \cdot \sin(i\varphi_k), \quad k, j = 1, \dots, n; \quad O(n^3) \text{ дій},$$

можна переписати у вигляді

$$g_k^{(j)} = \sum_{i=1}^n f_i^{(j)} \cdot \sin(i\varphi_k), \quad k = 1, \dots, n; \quad O(n^2) \text{ дій}, \quad (4)$$

де $f_i^{(j)} = f_{i,j}^h$, $g_k^{(j)} = f_{k,j}^1$, $j = 1, \dots, n$, тобто n векторів розкладаються по синусах.

При фіксованому j набір чисел $g_k^{(j)}$ по заданих коефіцієнтах $f_i^{(j)}$ можна обчислити за $O(n \cdot \log_2 n)$ дій швидким дискретним перетворенням Фур'є. Тоді загальний обсяг обчислень для розв'язку системи сіткових рівнянь складе $O(n^2 \cdot \log_2 n)$ дій, тобто буде майже пропорційний кількості невідомих. Згаданий алгоритм викладений у книзі А.А. Самарського и Е.С. Николаева «Методы решения сеточных уравнений». Нижче викладається загальна ідея алгоритму.

Швидке дискретне перетворення Фур'є

Обчислення чисел

$$g_k = \sum_{i=1}^n f_i \cdot \sin\left(\frac{i\pi k}{n+1}\right), \quad k = 1, \dots, n; \quad O(n^2) \text{ дій}, \quad (5)$$

можна замінити на обчислення комплексних чисел

$$G_k = \sum_{i=0}^{2n+1} f_i \cdot e^{\frac{2i\pi k}{2(n+1)}i}, \quad k = 0, \dots, 2n+1; \quad O(n^2) \text{ дій}, \quad (6)$$

довизначивши $f_0 = f_{n+1} = \dots = f_{2n+1} = 0$, тому що $g_k = \text{Im} G_k$.

Отже, нехай $N = 2(n+1) = 2^m$, $w_m = e^{\frac{2\pi i}{N}}$ – корінь 2^m -того ступеня з 1, задані числа $f(i)$, $i = 0, 1, \dots, N-1$, і потрібно обчислити набір чисел

$$g(k) = \sum_{i=0}^{N-1} f(i) \cdot (w_m)^{i \cdot k}, \quad k = 0, \dots, N-1. \quad (7)$$

Пряма реалізація формули (7) вимагає $O(N^2)$ множень (зведення кореня з одиниці в ступінь ми не враховуємо, тому що ця операція еквівалентна вибору одного з корінь 2^m -того ступеня з 1).

Представимо цілі числа $i, k = 0, \dots, N-1$ у вигляді розкладів

$$\begin{aligned} i &= l \cdot 2 + i_{m-1}, \quad l = 0, 1, \dots, 2^{m-1} - 1, \quad i_{m-1} = 0, 1; \\ k &= r + k_{m-1} \cdot 2^{m-1}, \quad r = 0, 1, \dots, 2^{m-1} - 1, \quad k_{m-1} = 0, 1. \end{aligned}$$

Тоді

$$\begin{aligned} g(k) &= g(r + k_{m-1} \cdot 2^{m-1}) = \sum_{i_{m-1}=0}^1 \sum_{l=0}^{2^{m-1}-1} f(l \cdot 2 + i_{m-1}) \cdot (w_m)^{i \cdot k} = \\ &= \sum_{i_{m-1}=0}^1 \sum_{l=0}^{2^{m-1}-1} f(l \cdot 2 + i_{m-1}) \cdot (w_m)^{(l \cdot 2 + i_{m-1}) \cdot (r + k_{m-1} \cdot 2^{m-1})} = \\ &= \sum_{i_{m-1}=0}^1 \left\{ \sum_{l=0}^{2^{m-1}-1} f(l \cdot 2 + i_{m-1}) \cdot (w_{m-1})^{l \cdot r} \right\} \cdot (w_m)^{i_{m-1} \cdot (r + k_{m-1} \cdot 2^{m-1})}, \\ r &= 0, 1, \dots, 2^{m-1} - 1, \quad k_{m-1} = 0, 1. \end{aligned} \quad (8)$$

Отже, обчислення N сум з (7), кожна з яких реалізується за N множень, (Σ_N множень) ми звели до обчислення двох наступних $N/2$ сум, кожна з яких реалізується за $N/2$ множень, ($\Sigma_{N/2}$ множень)

$$f^{(0)}(r) = \sum_{l=0}^{2^{m-1}-1} f(1 \cdot 2) \cdot (w_{m-1})^{l \cdot r}, \quad r = 0, 1, \dots, 2^{m-1} - 1, \quad (9)$$

$$f^{(1)}(r) = \sum_{l=0}^{2^{m-1}-1} f(1 \cdot 2 + 1) \cdot (w_{m-1})^{l \cdot r}, \quad r = 0, 1, \dots, 2^{m-1} - 1,$$

і обчисленню відповіді

$$g(k) = g(r + k_{m-1} \cdot 2^{m-1}) = f^{(0)}(r) + f^{(1)}(r) \cdot (w_m)^{r + k_{m-1} \cdot 2^{m-1}}, \quad (10)$$

$$r = 0, 1, \dots, 2^{m-1} - 1, \quad k_{m-1} = 0, 1,$$

за N множень.

Таким чином, заміна обчислень по формулі (7) на обчислення по формулах (9) і (10) змінює обсяг множень за правилом

$$\Sigma_N \rightarrow 2 \cdot \Sigma_{N/2} + N. \quad (11)$$

Тому що для обчислення сум (9) можна застосувати щойно описаний прийом, то

$$\Sigma_N \rightarrow 2 \cdot \Sigma_{N/2} + N \rightarrow 2 \cdot (2 \cdot \Sigma_{N/4} + N/2) + N = 2^2 \cdot \Sigma_{N/2^2} + 2 \cdot N. \quad (12)$$

Після $m - 1$ такого кроку одержимо, що

$$\begin{aligned} \Sigma_N &\rightarrow 2 \cdot \Sigma_{N/2} + N \rightarrow 2^2 \cdot \Sigma_{N/2^2} + 2 \cdot N \rightarrow \dots \rightarrow \\ &\rightarrow 2^{m-1} \cdot \Sigma_{N/2^{m-1}} + (m-1) \cdot N = 2^{m-1} \cdot \Sigma_2 + (m-1) \cdot N = \quad (1.m-1) \\ &= 2 \cdot 2^m + (m-1) \cdot N = (m+1) \cdot N \approx N \cdot \log_2 N, \end{aligned}$$

що й було потрібно показати.