Лекція 11. МСЕ в багатомірному випадку (приклад)

Задача Дірихле для рівняння Пуасона:

$$-\Delta u(x,y) = f(x,y) \qquad (x,y) \in \Omega = \{0 < x, y < 1\},$$

$$u(x,y) = 0 \qquad (x,y) \in \partial\Omega.$$

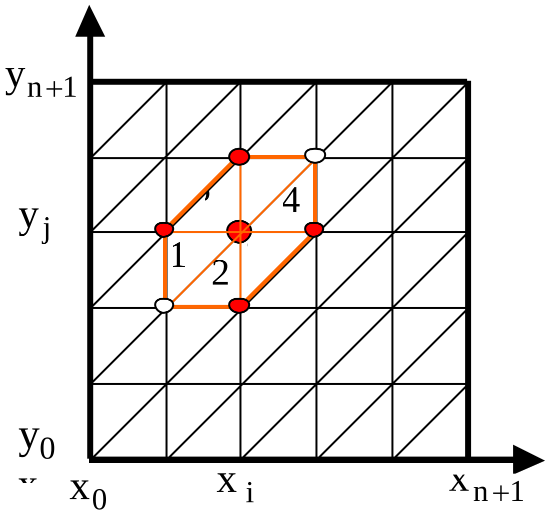
Проекційне формулювання:

$$u \in H_A = \overset{o}{W}{}_2^1(\Omega):$$

$$(u,v)_A \equiv \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, d\Omega \equiv \int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right) d\Omega =$$

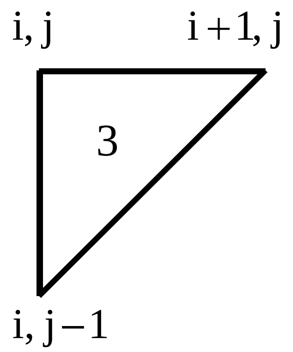
$$= f(v) \equiv \int_\Omega f(x) v(x) \, d\Omega \quad \forall \; v \in H_A.$$

Тріангуляція Ω_h:

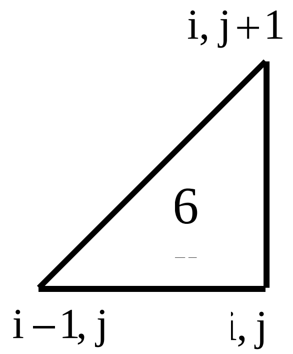


Типи трикутників:

$\tau_{i,j;+1,-1} =$



$\tau_{i,j;-1,+1} =$



Кусково-лінійні заповнення:

$$\bar{v} \in R^{n \times n} \;\leftrightarrow\; v(x,y) \in V_{n\times n} \subset H_A: \quad v(x,y)\big|_{(x,y)\in\partial\Omega} = 0,$$

$$v(x,y) = v_{i,j} + \frac{v_{i+1,j} - v_{i,j}}{h}(x - x_i) + \frac{v_{i,j} - v_{i,j-1}}{h}(y - y_j) \quad \forall \; (x,y) \in \tau_{i,j;+1,-1},$$

$$v(x,y) = v_{i,j} + \frac{v_{i,j} - v_{i-1,j}}{h}(x - x_i) + \frac{v_{i+1,j} - v_{i,j}}{h}(y - y_j) \quad \forall \; (x,y) \in \tau_{i,j;-1,+1}.$$

Метод Гальоркіна:

$$u^h \in V_{n\times n}: \qquad \int\limits_{\Omega} \nabla u^h \cdot \nabla v \, d\Omega = \int\limits_{\Omega} f(x) v(x) \, d\Omega \quad \forall \ v \in V_{n\times n}.$$

Локальна матриця жорсткості для третього трикутника $\tau_{i,j;+1,-1}$:

$$\left(A^{(\tau_{i,j;+1,-1})} \begin{bmatrix} u^h_{i,j} \\ u^h_{i+1,j} \\ u^h_{i,j-1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} v_{i,j} \\ v_{i+1,j} \\ v_{i,j-1} \end{bmatrix} \right) \equiv \int\limits_{\tau_{i,j;+1,-1}} \nabla u^h \cdot \nabla v \, d\Omega =$$

$$= \frac{1}{2}[(u^h_{i+1,j} - u^h_{i,j})(v_{i+1,j} - v_{i,j}) + (u^h_{i,j} - u^h_{i,j-1})(v_{i,j} - v_{i,j-1})] =$$

$$= \left(\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^h_{i,j} \\ u^h_{i+1,j} \\ u^h_{i,j-1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} v_{i,j} \\ v_{i+1,j} \\ v_{i,j-1} \end{bmatrix} \right) =$$

$$= \frac{1}{2}[2u^h_{i,j} - u^h_{i+1,j} - u^h_{i,j-1}], \text{ якщо } v_{i,j} = 1, \ v_{k,l} = 0 \ \forall \ (k,l) \neq (i,j).$$

Локальна матриця жорсткості для першого трикутника $\tau_{i-1,j;+1,-1}$:

$$\left(A^{(\tau_{i-1,j;+1,-1})} \begin{bmatrix} u^h_{i-1,j} \\ u^h_{i,j} \\ u^h_{i-1,j-1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} v_{i-1,j} \\ v_{i,j} \\ v_{i-1,j-1} \end{bmatrix} \right) = \left(\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^h_{i-1,j} \\ u^h_{i,j} \\ u^h_{i-1,j-1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} v_{i-1,j} \\ v_{i,j} \\ v_{i-1,j-1} \end{bmatrix} \right) =$$

$$= \frac{1}{2}[u^h_{i,j} - u^h_{i-1,j}], \text{ якщо } v_{i,j} = 1, \ v_{k,l} = 0 \ \forall \ (k,l) \neq (i,j).$$

Локальна матриця жорсткості для п'ятого трикутника $\tau_{i,j+1;+1,-1}$:

$$\left(A^{(\tau_{i,j+1;+1,-1})} \begin{bmatrix} u^h_{i,j+1} \\ u^h_{i+1,j+1} \\ u^h_{i,j} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} v_{i,j+1} \\ v_{i+1,j+1} \\ v_{i,j} \end{bmatrix} \right) = \left(\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^h_{i,j+1} \\ u^h_{i+1,j+1} \\ u^h_{i,j} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} v_{i,j+1} \\ v_{i+1,j+1} \\ v_{i,j} \end{bmatrix} \right) =$$

$$= \frac{1}{2}[u^h_{i,j} - u^h_{i,j+1}], \text{ якщо } v_{i,j} = 1, \ v_{k,l} = 0 \ \forall \ (k,l) \neq (i,j).$$

Локальна матриця жорсткості для шостого трикутника $\tau_{i,j;-1,+1}$:

$$\left(A^{(\tau_{i,j;-1,+1})} \begin{bmatrix} u^h_{i,j} \\ u^h_{i-1,j} \\ u^h_{i,j+1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} v_{i,j} \\ v_{i-1,j} \\ v_{i,j+1} \end{bmatrix} \right) \equiv \int\limits_{\tau_{i,j;-1,+1}} \nabla u^h \cdot \nabla v \, d\Omega =$$

$$= \frac{1}{2}[(u^h_{i,j} - u^h_{i-1,j})(v_{i,j} - v_{i-1,j}) + (u^h_{i,j+1} - u^h_{i,j})(v_{i,j+1} - v_{i,j})] =$$

$$= \left(\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^h_{i,j} \\ u^h_{i-1,j} \\ u^h_{i,j+1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} v_{i,j} \\ v_{i-1,j} \\ v_{i,j+1} \end{bmatrix} \right) =$$

$$= \frac{1}{2}[2u^h_{i,j} - u^h_{i-1,j} - u^h_{i,j+1}], \quad \text{якщо } v_{i,j} = 1,\ v_{k,l} = 0 \ \forall\ (k,l) \neq (i,j) .$$

Локальна матриця жорсткості для другого трикутника $\tau_{i,j-1;-1,+1}$:

$$\left(A^{(\tau_{i,j-1;-1,+1})} \begin{bmatrix} u^h_{i,j-1} \\ u^h_{i-1,j-1} \\ u^h_{i,j} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} v_{i,j-1} \\ v_{i-1,j-1} \\ v_{i,j} \end{bmatrix} \right) = \left(\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^h_{i,j-1} \\ u^h_{i-1,j-1} \\ u^h_{i,j} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} v_{i,j-1} \\ v_{i-1,j-1} \\ v_{i,j} \end{bmatrix} \right) =$$

$$= \frac{1}{2}[u^h_{i,j} - u^h_{i,j-1}], \quad \text{якщо } v_{i,j} = 1,\ v_{k,l} = 0 \ \forall\ (k,l) \neq (i,j) .$$

Локальна матриця жорсткості для четвертого трикутника $\tau_{i+1,j;-1,+1}$:

$$\left(A^{(\tau_{i+1,j;-1,+1})} \begin{bmatrix} u^h_{i+1,j} \\ u^h_{i,j} \\ u^h_{i+1,j+1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} v_{i+1,j} \\ v_{i,j} \\ v_{i+1,j+1} \end{bmatrix} \right) = \left(\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^h_{i+1,j} \\ u^h_{i,j} \\ u^h_{i+1,j+1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} v_{i+1,j} \\ v_{i,j} \\ v_{i+1,j+1} \end{bmatrix} \right) =$$

$$= \frac{1}{2}[u^h_{i,j} - u^h_{i+1,j}], \quad \text{якщо } v_{i,j} = 1,\ v_{k,l} = 0 \ \forall\ (k,l) \neq (i,j) .$$

Локальний вектор навантаження для третього трикутника $\tau_{i,j;+1,-1}$:

$$\left(\overline{f}^{(\tau_{i,j;+1,-1})}, \begin{pmatrix} v_{i,j} \\ v_{i+1,j} \\ v_{i,j-1} \end{pmatrix}\right) \equiv \int\limits_{\tau_{i,j;+1,-1}} f(x,y) \cdot v(x,y) d\Omega \approx$$

(заміняємо $f(x,y)$ лінійним інтерполянтом і інтегруємо)

$$\approx \left(\frac{h^2}{24} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1) \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} f_{i,j} \\ f_{i+1,j} \\ f_{i,j-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_{i,j} \\ v_{i+1,j} \\ v_{i,j-1} \end{pmatrix} \right) =$$

$$= \frac{h^2}{24}(2f_{i,j} + f_{i+1,j} + f_{i,j-1}), \quad \text{якщо } v_{i,j} = 1,\ v_{k,l} = 0 \ \forall\ (k,l) \neq (i,j).$$

Локальний вектор навантаження для першого трикутника $\tau_{i-1,j;+1,-1}$:

$$\left(\overline{f}^{(\tau_{i-1,j;+1,-1})}, \begin{pmatrix} v_{i-1,j} \\ v_{i,j} \\ v_{i-1,j-1} \end{pmatrix}\right) \approx \left(\frac{h^2}{24} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1) \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} f_{i-1,j} \\ f_{i,j} \\ f_{i-1,j-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_{i-1,j} \\ v_{i,j} \\ v_{i-1,j-1} \end{pmatrix} \right) =$$

$$= \frac{h^2}{24}(f_{i-1,j} + 2f_{i,j} + f_{i-1,j-1}), \quad \text{якщо } v_{i,j} = 1,\ v_{k,l} = 0 \ \forall\ (k,l) \neq (i,j).$$

Локальний вектор навантаження для п'ятого трикутника $\tau_{i,j+1;+1,-1}$:

$$\left(\overline{f}^{(\tau_{i,j+1;+1,-1})}, \begin{pmatrix} v_{i,j+1} \\ v_{i+1,j+1} \\ v_{i,j} \end{pmatrix}\right) \approx \left(\frac{h^2}{24} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1) \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} f_{i,j+1} \\ f_{i+1,j+1} \\ f_{i,j} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_{i,j+1} \\ v_{i+1,j+1} \\ v_{i,j} \end{pmatrix} \right) =$$

$$= \frac{h^2}{24}(f_{i,j+1} + f_{i+1,j+1} + 2f_{i,j}), \quad \text{якщо } v_{i,j} = 1,\ v_{k,l} = 0 \ \forall\ (k,l) \neq (i,j).$$

Локальний вектор навантаження для шостого трикутника $\tau_{i,j;-1,+1}$:

$$\left(\overline{f}^{(\tau_{i,j;-1,+1})}, \begin{pmatrix} v_{i,j} \\ v_{i-1,j} \\ v_{i,j+1} \end{pmatrix}\right) \approx \left(\frac{h^2}{24}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1) \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} f_{i,j} \\ f_{i-1,j} \\ f_{i,j+1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_{i,j} \\ v_{i-1,j} \\ v_{i,j+1} \end{pmatrix}\right) =$$

$$= \frac{h^2}{24}(2f_{i,j} + f_{i-1,j} + f_{i,j+1}), \quad \text{якщо } v_{i,j} = 1,\ v_{k,l} = 0\ \ \forall\ (k,l) \neq (i,j).$$

Локальний вектор навантаження для другого трикутника $\tau_{i,j-1;-1,+1}$:

$$\left(\overline{f}^{(\tau_{i,j-1;-1,+1})}, \begin{pmatrix} v_{i,j-1} \\ v_{i-1,j-1} \\ v_{i,j} \end{pmatrix}\right) \approx \left(\frac{h^2}{24}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1) \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} f_{i,j-1} \\ f_{i-1,j-1} \\ f_{i,j} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_{i,j-1} \\ v_{i-1,j-1} \\ v_{i,j} \end{pmatrix}\right) =$$

$$= \frac{h^2}{24}(f_{i,j-1} + f_{i-1,j-1} + 2f_{i,j}), \quad \text{якщо } v_{i,j} = 1,\ v_{k,l} = 0\ \ \forall\ (k,l) \neq (i,j).$$

Локальний вектор навантаження для четвертого трикутника $\tau_{i+1,j;-1,+1}$:

$$\left(\overline{f}^{(\tau_{i+1,j;-1,+1})}, \begin{pmatrix} v_{i+1,j} \\ v_{i,j} \\ v_{i+1,j+1} \end{pmatrix}\right) \approx \left(\frac{h^2}{24}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1) \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} f_{i+1,j} \\ f_{i,j} \\ f_{i+1,j+1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_{i+1,j} \\ v_{i,j} \\ v_{i+1,j+1} \end{pmatrix}\right) =$$

$$= \frac{h^2}{24}(f_{i+1,j} + 2f_{i,j} + f_{i+1,j+1}), \quad \text{якщо } v_{i,j} = 1,\ v_{k,l} = 0\ \ \forall\ (k,l) \neq (i,j).$$

Глобальна матриця жорсткості:

$$(A_h\overline{u}^h, \overline{v}) \equiv \int\limits_{\tau_1 \cup \tau_2 \cup \tau_3 \cup \tau_4 \cup \tau_5 \cup \tau_6} \nabla u^h \cdot \nabla v \, d\Omega =$$

$$= -u^h_{i,j-1} - u^h_{i-1,j} + 4u^h_{i,j} - u^h_{i+1,j} - u^h_{i,j+1}, \quad \text{якщо } \begin{cases} v_{i,j} = 1, \\ v_{k,l} = 0\ \ \forall\ (k,l) \neq (i,j). \end{cases}$$

Глобальний вектор навантажень:

$$(\overline{f}^h, \overline{v}) \equiv \int\limits_{\tau_1 \cup \tau_2 \cup \tau_3 \cup \tau_4 \cup \tau_5 \cup \tau_6} f(x,y) \cdot v(x,y) \, d\Omega \approx$$

$$\approx \frac{h^2}{12}(f_{i-1,j-1} + f_{i,j-1} + f_{i-1,j} + 6f_{i,j} + f_{i+1,j} + f_{i,j+1} + f_{i+1,j+1}),$$

$$\text{якщо } v_{i,j} = 1,\ v_{k,l} = 0\ \ \forall\ (k,l) \neq (i,j).$$

Проекційно-різницева схема:

$$\begin{cases} \dfrac{-u^h_{i,j-1} - u^h_{i-1,j} + 4u^h_{i,j} - u^h_{i+1,j} - u^h_{i,j+1}}{h^2} = \dfrac{1}{h^2} f^h_{i,j} \approx \\ \qquad\qquad \approx \dfrac{f_{i-1,j-1} + f_{i,j-1} + f_{i-1,j} + 6f_{i,j} + f_{i+1,j} + f_{i,j+1} + f_{i+1,j+1}}{12} \\ \qquad\qquad i, j = 1, \ldots, n; \\ u^h_{i,j} = 0 \quad \forall\ (x_i, y_j) \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Побудуємо векторно-матричне формулювання отриманої системи сіткових рівнянь. Для цього пронумеруємо (упорядкуємо) внутрішні сіткові вузли (і, отже, невідомі, компоненти правої частини й самі рівняння):

$$\underline{(1,1),(2,1),\ldots,(n,1)};\ \underline{(1,2),(2,2),\ldots,(n,2)};\ \ldots;\ \underline{(1,n),(2,n),\ldots,(n,n)};$$

$$\bar{u}^h = \begin{bmatrix} \left.\begin{matrix} u^h_{1,1} \\ u^h_{2,1} \\ \vdots \\ u^h_{n,1} \end{matrix}\right\} \bar{u}^h_{\bullet,1} \\ \left.\begin{matrix} u^h_{1,2} \\ u^h_{2,2} \\ \vdots \\ u^h_{n,2} \end{matrix}\right\} \bar{u}^h_{\bullet,2} \\ \vdots \\ \left.\begin{matrix} u^h_{1,n} \\ u^h_{2,n} \\ \vdots \\ u^h_{n,n} \end{matrix}\right\} \bar{u}^h_{\bullet,n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{u}^h_{\bullet,1} \\ \bar{u}^h_{\bullet,2} \\ \vdots \\ \bar{u}^h_{\bullet,n} \end{bmatrix}, \quad \bar{f}^h = \begin{bmatrix} \left.\begin{matrix} f^h_{1,1} \\ f^h_{2,1} \\ \vdots \\ f^h_{n,1} \end{matrix}\right\} \bar{f}^h_{\bullet,1} \\ \left.\begin{matrix} f^h_{1,2} \\ f^h_{2,2} \\ \vdots \\ f^h_{n,2} \end{matrix}\right\} \bar{f}^h_{\bullet,2} \\ \vdots \\ \left.\begin{matrix} f^h_{1,n} \\ f^h_{2,n} \\ \vdots \\ f^h_{n,n} \end{matrix}\right\} \bar{f}^h_{\bullet,n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{f}^h_{\bullet,1} \\ \bar{f}^h_{\bullet,2} \\ \vdots \\ \bar{f}^h_{\bullet,n} \end{bmatrix},$$

$$\begin{cases} -\bar{u}^h_{\bullet,j-1} + C\bar{u}^h_{\bullet,j} - \bar{u}^h_{\bullet,j+1} = \bar{f}^h_{\bullet,j} \\ \qquad j = 1, \ldots, n; \\ \bar{u}^h_{\bullet,0} = \bar{u}^h_{\bullet,n+1} = 0. \end{cases} \qquad C = \begin{bmatrix} 4 & -1 & & & \\ -1 & 4 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 4 & -1 \\ & & & -1 & 4 \end{bmatrix},$$

$$A_h\bar{u}^h = \bar{f}^h, \qquad A_h = \begin{bmatrix} C & -E & & & \\ -E & C & -E & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -E & C & -E \\ & & & -E & C \end{bmatrix}.$$

Підрахувати кількість дій при розв'язку цієї системи методом матричної прогонки ($O(n^4)$ **).**