Лекція 10. МСЕ в багатовимірному випадку

(Продовження)

Нагадаємо, що для вирішення першої крайової задачі

$$u \in H_A = \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega) : (u,v)_A \equiv \int_\Omega \left(\sum_{i,j=1}^{2} a_{i,j} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i} + a_0 uv \right) dx =$$

$$= f(v) \equiv \int_\Omega f(x)v(x)d\Omega, \quad \forall v \in H_A$$

ми побудували систему сіткових рівнянь $A_h \bar{u}^h = \bar{f}^h$ методом Гальоркіна:

$$\left(A_h \bar{v}, \bar{w}\right)_{R^N} \equiv \left(v, w\right)_A \equiv \sum_{i=1}^{K} \int_{\tau_i} \left(\sum_{i,j=1}^{2} a_{i,j} \frac{\partial v}{\partial x_j} \frac{\partial w}{\partial x_i} + a_0 vw \right) dx,$$

$$\left(\bar{f}^h, \bar{w}\right)_{R^N} \equiv \sum_{i=1}^{K} \int_{\tau_i} f(x)w(x)dxdy \quad \forall \bar{v}, \bar{w} \in R^N \leftrightarrow v, w \in V_N,$$

де $V_N \subset H_A = \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ - простір кусково-лінійних заповнень на тріангуляції $\Omega_h = \left\{\tau_i\right\}_{i=1}^{K}$ багатокутника Ω з множиною $\left\{P_j\right\}_{j=1}^{N}$ вершин трикутників Ω_h, що лежать всередині області та множиною $\left\{P_j\right\}_{j=N+1}^{N+N_\Gamma}$ вершин трикутників Ω_h, що лежать на границі області.

Будь-яка функція $v \in V_N$ взаємооднозначно визначається вектором $\bar{v} \in R^N$ своїх значень в точках $\left\{P_j\right\}_{j=1}^{N}$ (з урахуванням нульових значень на границі).

Для вирішення другого крайової задачі

$$u \in H_A = W_2^1(\Omega) : (u,v)_A = f(v), \quad \forall v \in H_A$$

в системі сіткових рівнянь $A_h \bar{u}^h = \bar{f}^h$ методу Гальоркіна

$$\left(A_h \bar{v}, \bar{w}\right)_{R^{N+N_\Gamma}} \equiv \left(v, w\right)_A \equiv \sum_{i=1}^{K} \int_{\tau_i} \left(\sum_{i,j=1}^{2} a_{i,j} \frac{\partial v}{\partial x_j} \frac{\partial w}{\partial x_i} + a_0 vw \right) dx,$$

$$\left(\bar{f}^h, \bar{w}\right)_{R^{N+N_\Gamma}} \equiv \sum_{i=1}^{K} \int_{\tau_i} f(x)w(x)dxdy \quad \forall \bar{v}, \bar{w} \in R^{N+N_\Gamma} \leftrightarrow v, w \in V_{N+N_\Gamma},$$

де $V_{N+N_\Gamma} \subset H_A = W_2^1(\Omega)$ - простір кусково-лінійних заповнень, і будь-яка функція $v \in V_{N+N_\Gamma}$ взаємоoднозначно визначається вектором $\bar{v} \in R^{N+N_\Gamma}$ своїх значень в усіх вершинах $\left\{P_j\right\}_{j=1}^{N+N_\Gamma}$.

Число обумовленості матриці жорсткості

Якщо $\sqrt{\gamma_0}, \sqrt{\gamma_1}$ - константи еквівалентності норм $\|v\|_A$ і $\|v\|_1$:

$\gamma_0 \cdot (v,v)_1 \le (v,v)_A \le \gamma_1 \cdot (v,v)_1 \;\; \forall v \in H_A,$

то

$\gamma_0 \cdot (v,v)_1 \le (A_h \bar{v}, \bar{v})_{R^M} \equiv (v,v)_A \le \gamma_1 \cdot (v,v)_1 \;\; \forall \bar{v} \in R^M \leftrightarrow v \in V_M,$

де $M = N$ у випадку першої крайової задачі, $M = N + N_\Gamma$ у випадку другої крайової задачі.

Отже,

$$\lambda_{\min}\left(A_h\right) = \frac{\left(A_h \bar{v}, \bar{v}\right)_{R^M}}{\left(\bar{v}, \bar{v}\right)_{R^M}} \ge \gamma_0 \frac{(v,v)_1}{\left(\bar{v}, \bar{v}\right)_{R^M}} \qquad (7)$$

$$\lambda_{\max}\left(A_h\right) = \frac{\left(A_h \bar{w}, \bar{w}\right)_{R^M}}{\left(\bar{w}, \bar{w}\right)_{R^M}} \le \gamma_1 \frac{(w,w)_1}{\left(\bar{w}, \bar{w}\right)_{R^M}} \qquad (8)$$

де v і w - відповідні власні вектори матриці A_h порядку M.

Введемо позначення:

K_{tr} - максимальна кількість трикутників, що мають спільну вершину,

$P_0(\tau_i)$, $P_1(\tau_i)$, $P_2(\tau_i)$ - вершини трикутника τ_i,

I_v і I_w множини номерів трикутників, в яких функції v і w відповідно не дорівнюють нулю, тобто хоча б в одній вершині трикутника значенні функції не дорівнює нулю.

Тоді

$$\frac{(v,v)_1}{(\bar{v},\bar{v})_{R^M}} = \frac{\sum\limits_{i \in I_V} \int\limits_{\tau_i} \left(\left|\nabla v\right|^2 + v^2 \right) dxdy}{\left(\bar{v}, \bar{v}\right)_{R^M}} \ge$$

$$\geq \frac{\sum_{i\in I_V}\int_{\tau_i}\left(|\nabla v|^2+v^2\right)dxdy}{\sum_{i\in I_V}\left(\left|v\left(P_0(\tau_i)\right)\right|^2+\left|v\left(P_1(\tau_i)\right)\right|^2+\left|v\left(P_2(\tau_i)\right)\right|^2\right)}\geq$$

$$\geq \min_{i\in I_V}\frac{\int_{\tau_i}\left(|\nabla v|^2+v^2\right)dxdy}{\left|v\left(P_0(\tau_i)\right)\right|^2+\left|v\left(P_1(\tau_i)\right)\right|^2+\left|v\left(P_2(\tau_i)\right)\right|^2}\geq$$

$$\geq \min_{i\in I_V}\frac{\int_{\tau_i}v^2dxdy}{\left|v\left(P_0(\tau_i)\right)\right|^2+\left|v\left(P_1(\tau_i)\right)\right|^2+\left|v\left(P_2(\tau_i)\right)\right|^2}.$$

Зробимо заміну змінних $(x,y)=P_0+\lambda_1\left(P_1-P_0\right)+\lambda_2\left(P_2-P_0\right)$,

що перетворює трикутник τ_i в канонічний трикутник τ^e (прямокутний з одиничними катетами на осях λ_1 і λ_2).

Тоді

$$\int_{\tau_i}v^2dxdy=2S\left(\tau_i\right)\cdot\int_{\tau^e}\left(v\left(P_0\right)+\left(v\left(P_1\right)-v\left(P_0\right)\right)\lambda_1+\left(v\left(P_2\right)-v\left(P_0\right)\right)\lambda_2\right)^2d\lambda_1 d\lambda_2=$$

$$=\frac{S\left(\tau_i\right)}{6}\left(v_0^2+v_1^2+v_2^2+v_0v_1+v_0v_2+v_1v_2\right)=$$

$$=\frac{S\left(\tau_i\right)}{12}\left(\begin{bmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{bmatrix}\begin{pmatrix}v_0\\v_1\\v_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}v_0\\v_1\\v_2\end{pmatrix}\right)\geq\frac{S\left(\tau_i\right)}{12}\left(v_0^2+v_1^2+v_2^2\right).$$

Звідси та з (7) слідує

Лемма 1. *Якщо тріангуляція Ω_h квазірівномірна, тобто*

$$0<c_0\cdot h\leq r(\tau_i)<R(\tau_i)\leq c_1\cdot h\ \ \forall\tau_i\in\Omega_h,$$

то

$$\lambda_{\min}\left(A_h\right)\geq\gamma_0\cdot\frac{\min S\left(\tau_i\right)}{12}\geq\gamma_0\cdot\frac{\min\pi\cdot r^2\left(\tau_i\right)}{12}\geq\frac{\gamma_0\pi\cdot c_0^2}{12}h^2.\ (9)$$

Для оцінки максимального власного значення нам знадобиться нерівність

$$\int_{\tau_i} w^2 dxdy = \frac{S(\tau_i)}{12}\left(\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}\right) \le \frac{S(\tau_i)}{12}\left(w_0^2 + w_1^2 + w_2^2\right), \qquad (10)$$

доведіть її.

Тепер оцінимо $\int_{\tau_i} |\nabla w|^2 \, dxdy$ зверху.

Знову зробимо заміну змінних

$(x, y) = P_0 + \lambda_1\left(P_1 - P_0\right) + \lambda_2\left(P_2 - P_0\right)$, що перетворює трикутник τ_i в канонічний трикутник τ^e і, так як

$$\nabla_\lambda \mathrm{w} = \begin{bmatrix} \mathrm{P}_1 - \mathrm{P}_0 \\ \mathrm{P}_2 - \mathrm{P}_0 \end{bmatrix} \nabla \mathrm{w}, \qquad |\nabla \mathrm{w}|^2 = \left(\left(\begin{bmatrix} \mathrm{P}_1 - \mathrm{P}_0 \\ \mathrm{P}_2 - \mathrm{P}_0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathrm{P}_1 - \mathrm{P}_0 \\ \mathrm{P}_2 - \mathrm{P}_0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\right)^{-1} \nabla_\lambda \mathrm{w}, \nabla_\lambda \mathrm{w}\right)$$

то

$$\begin{aligned} \int_{\tau_\mathrm{i}} |\nabla \mathrm{w}|^2 \, \mathrm{dx}\, \mathrm{dy} &= 2\mathrm{S}(\tau_\mathrm{i}) \cdot \int_{\tau^\mathrm{e}} (\mathrm{T}_\mathrm{i}^{-1} \nabla_\lambda \mathrm{w}, \nabla_\lambda \mathrm{w})\, \mathrm{d}\lambda_1\, \mathrm{d}\lambda_2 \le \\ &\le 2\mathrm{S}(\tau_\mathrm{i}) \cdot \rho(\mathrm{T}_\mathrm{i}^{-1}) \cdot \int_{\tau^\mathrm{e}} (\nabla_\lambda \mathrm{w}, \nabla_\lambda \mathrm{w})\, \mathrm{d}\lambda_1\, \mathrm{d}\lambda_2 = \\ &= 2\mathrm{S}(\tau_\mathrm{i}) \cdot \rho(\mathrm{T}_\mathrm{i}^{-1}) \cdot [(\mathrm{w}_1 - \mathrm{w}_0)^2 + (\mathrm{w}_2 - \mathrm{w}_0)^2] \le \\ &\le 4\mathrm{S}(\tau_\mathrm{i}) \cdot \rho(\mathrm{T}_\mathrm{i}^{-1}) \cdot (\mathrm{w}_0^2 + \mathrm{w}_1^2 + \mathrm{w}_2^2), \end{aligned} \qquad (11)$$

де $\mathrm{T}_\mathrm{i} = \begin{bmatrix} \mathrm{P}_1 - \mathrm{P}_0 \\ \mathrm{P}_2 - \mathrm{P}_0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathrm{P}_1 - \mathrm{P}_0 \\ \mathrm{P}_2 - \mathrm{P}_0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$.

Власні значення $0 < \lambda_1(\mathrm{T}_\mathrm{i}) \le \lambda_2(\mathrm{T}_\mathrm{i})$ по теоремі Вієта задовольняють наступним співвідношенням:

$$\lambda_1(\mathrm{T}_\mathrm{i}) + \lambda_2(\mathrm{T}_\mathrm{i}) = (\mathrm{T}_\mathrm{i})_{11} + (\mathrm{T}_\mathrm{i})_{22} = |\,\mathrm{P}_1 - \mathrm{P}_0\,|^2 + |\,\mathrm{P}_2 - \mathrm{P}_0\,|^2,$$

$$\lambda_1(\mathrm{T}_\mathrm{i}) \cdot \lambda_2(\mathrm{T}_\mathrm{i}) = \det \mathrm{T}_\mathrm{i} = 4\mathrm{S}^2(\tau_\mathrm{i}).$$

$\Rightarrow$

$$\lambda_2(\mathrm{T}_\mathrm{i}) < |\,\mathrm{P}_1 - \mathrm{P}_0\,|^2 + |\,\mathrm{P}_2 - \mathrm{P}_0\,|^2,$$

$$\lambda_1(\mathrm{T}_\mathrm{i}) > 4\mathrm{S}^2(\tau_\mathrm{i}) / (\,|\,\mathrm{P}_1 - \mathrm{P}_0\,|^2 + |\,\mathrm{P}_2 - \mathrm{P}_0\,|^2).$$

З останньої нерівності, так як довжини сторін менше діаметра описаної навколо трикутника кола, а площа трикутника більша за площу вписаного в нього кола, маємо

$$\lambda_1(T_i) > \frac{S^2(\tau_i)}{2R^2(\tau_i)} \quad \Rightarrow \quad \rho(T_i) = [\lambda_1(T_i)]^{-1} < \frac{2R^2(\tau_i)}{S^2(\tau_i)}. \quad (12)$$

Наслідком цієї нерівності і нерівностей (8), (10) і (11) є

Лема 2. *Якщо тріангуляція* Ω_h *квазірівномірна, тобто*

$$0 < c_0 \cdot h \le r(\tau_i) < R(\tau_i) \le c_1 \cdot h \quad \forall\ \tau_i \in \Omega_h,$$

то

$$\lambda_{max}(A_h) \le \gamma_1 \frac{(w,w)_1}{(\bar{w},\bar{w})_{R^M}} \le \gamma_1 \cdot \frac{S(\tau_i)}{3} + \gamma_1 \cdot 4S(\tau_i)\frac{2R^2(\tau_i)}{S^2(\tau_i)} \le$$

$$\le \gamma_1 \cdot \frac{\pi \cdot R^2(\tau_i)}{3} + \gamma_1 \cdot \frac{8R^2(\tau_i)}{\pi \cdot r^2(\tau_i)} \le \quad (13)$$

$$\le \gamma_1 \frac{(24 + \pi^2 \cdot c_0^2 \cdot h^2) \cdot c_1^2}{3\pi \cdot c_0^2} = O(1).$$

З лем 1 та 2 $\Rightarrow$ $\mathrm{Cond}\, A_h = O(h^{-2})$.