Лекція 9. МСЕ в багатовимірному випадку: кусково-лінійні заповнення на тріангуляції

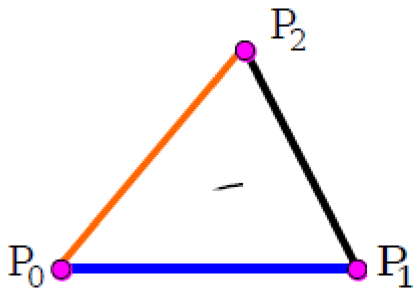
$\left\{\Omega_h = \left\{\tau_i^h\right\}_{i=1}^{K_h}\right\}$ - сімейство правильних тріангуляцій (симпліціальних розбиттів)

багатокутника $\Omega \in R^m, h \to 0,\ \exists$ незалежні від h сталі c_0, c_1:

$$0 < c_0 \cdot h \le r\left(\tau_i^{(h)}\right) < R\left(\tau_i^{(h)}\right) \le c_1 \cdot h \quad \forall \tau_i^{(h)} \in \Omega_h \qquad (1)$$

Лінійне заповнення на трикутнику

- лінійна функція $\tilde{v}(x,y)$, що визначена на трикутнику τ і приймає задані значення v_i в його вершинах $P_i,\ i = 0,1,2.$



Так як

$$\tau = \left\{(x,y) = P_0 + \lambda_1 \cdot \left(P_1 - P_0\right) + \lambda_2 \cdot \left(P_2 - P_0\right),\ \lambda_i \ge 0,\ \lambda_1 + \lambda_2 \le 1\right\},$$ то

$$\tilde{v}(x,y) = v_0 + \lambda_1(x,y) \cdot \left(v_1 - v_0\right) + \lambda_2(x,y) \cdot \left(v_2 - v_0\right), \ (2)$$

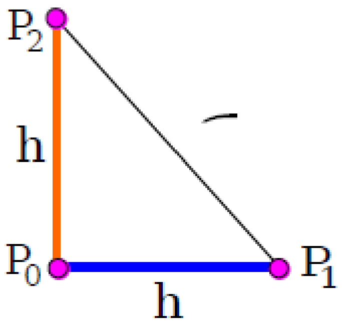
де $\left(\lambda_1, \lambda_2\right) = \left[(x,y) - P_0\right] \cdot \begin{bmatrix} P_1 - P_0 \\ P_2 - P_0 \end{bmatrix}^{-1}$

Оцінка точності лінійної інтерполяції

Нехай τ - прямокутний трикутник, довжини катетів якого h, $P_0 = (0,0)$;
$v(x,y) \in C^2\left(\overline{\tau}\right)$ - задана, і

$$\tilde{v}(x,y) = v(0,0) + \frac{v(h,0) - v(0,0)}{h} x + \frac{v(0,h) - v(0,0)}{h} y$$

- її лінійний інтерполянт.



Оцінимо в нормі $W_2^1(\tau)$ різницю $v(x,y)-\tilde{v}(x,y)$.

Порівняємо розклади Тейлора цих функцій:

$$v(x,y)=v(0,0)+v_x(0,0)x+v_y(0,0)y+O\left(h^2\right),$$

$$\tilde{v}(x,y)=v(0,0)+\frac{v(h,0)-v(0,0)}{h}x+\frac{v(0,h)-v(0,0)}{h}y$$

Так як

$$v_x(0,0)-\frac{v(h,0)-v(0,0)}{h}=O(h),\ v_y(0,0)-\frac{v(0,h)-v(0,0)}{h}=O(h),$$

то

$$\int_\tau \left|v(x,y)-\tilde{v}(x,y)\right|^2 dxdy=O\left(h^4\right)\cdot \mathrm{mes}(\tau)$$

Так як

$$v_x(x,y)=v_x(0,0)+O(h)=\frac{v(h,0)-v(0,0)}{h}+O(h)=\tilde{v}_x(x,y)+O(h),$$

то

$$\int_\tau \left|v_x(x,y)-\tilde{v}_x(x,y)\right|^2 dxdy=O\left(h^2\right)\cdot \mathrm{mes}(\tau)$$

Аналогічно отримаємо, що

$$\int_\tau \left|v_y(x,y)-\tilde{v}_y(x,y)\right|^2 dxdy=O\left(h^2\right)\cdot \mathrm{mes}(\tau)$$

Підсумувавши ці оцінки за всіма трикутниках, отримаємо,

що має місце

Теорема 1. *Якщо* $\left\{\Omega_h = \left\{\tau_i^h\right\}_{i=1}^{K_h}\right\}$ *- сімейство правильних тріангуляцій багатокутника* $\Omega \in R^m, h \to 0$*, і всі трикутники є прямокутними з катетами довжини* h*, то для різниці функції* $v(x,y) \in C^2\left(\overline{\Omega}\right)$ *і її кусочно-лінійного заповнення* $\tilde{v}(x,y)$ *справедлива оцінка*

$\left\|v-\tilde{v}\right\|_1^2 = O\left(h^4+h^2\right)\cdot \mathrm{mes}(\tau) = O\left(h^2\right)\cdot \mathrm{mes}(\tau)$. *(3)*

Ця оцінка справедлива і для квазірівномірних тріангуляцій:

$0 < c_0 \cdot h \le r\left(\tau_i^{(h)}\right) < R\left(\tau_i^{(h)}\right) \le c_1 \cdot h \ \ \forall\, \tau_i^{(h)} \in \Omega_h$. (1)

Система сіткових рівнянь методу Гальоркіна в підпросторі кусково-лінійних заповнень для першої крайової задачі:

$$\begin{aligned} u \in H_A = \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega) : (u,v)_A \equiv \int_\Omega \left(\sum_{i,j=1}^{2} a_{i,j} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i} + a_0 uv \right) d\Omega = \\ = f(v) \equiv \int_\Omega f(x) v(x) d\Omega, \quad \forall v \in H_A \end{aligned} \qquad (4)$$

Нехай

$\Omega_h = \left\{\tau_i\right\}_{i=1}^{K}$ - тріангуляція багатокутника Ω,

$\left\{P_j\right\}_{j=1}^{N}$ - множина вершин трикутників, що лежать всередині області,

$\left\{P_j\right\}_{j=N+1}^{N+N_r}$ - множина вершин трикутників, що лежать на межі області,

$P_{j_0(i)}, P_{j_1(i)}, P_{j_2(i)}$ - вершини трикутника τ_i,

$V_N \subset H_A = \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ - простір кусково-лінійних заповнень, тобто неперервних функцій, рівних нулю на межі області, лінійних в кожному трикутнику, однозначно визначених вектором своїх (ненульових) значень в точках $\left\{P_j\right\}_{j=1}^{N}$.

Тоді наближення u^h до розв’язку u задачі (4) методом Гальоркіна (як ми вже знаємо) визначається з проекційного рівняння

$$u^h \in V_N : (u^h, v)_A \equiv \int_\Omega \left(\sum_{i,j=1}^{2} a_{i,j} \frac{\partial u^h}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i} + a_0 u^h v \right) d\Omega = \\ = f(v) \equiv \int_\Omega f(x) v(x) d\Omega, \quad \forall v \in V_N \tag{5}$$

На кожному трикутнику τ_i з вершинами $P_{j_0(i)}, P_{j_1(i)}, P_{j_2(i)}$ маємо (див. (2)):

$$v(x,y) = \lambda_{0(i)}(x,y) \cdot v\left(P_{j_0(i)}\right) + \lambda_{1(i)}(x,y) \cdot v\left(P_{j_1(i)}\right) + \lambda_{2(i)}(x,y) \cdot v\left(P_{j_2(i)}\right),$$

$$u^h(x,y) = \lambda_{0(i)}(x,y) \cdot u^h\left(P_{j_0(i)}\right) + \lambda_{1(i)}(x,y) \cdot u^h\left(P_{j_1(i)}\right) + \lambda_{2(i)}(x,y) \cdot u^h\left(P_{j_2(i)}\right),$$

(де $\left(\lambda_{1(i)}, \lambda_{2(i)}\right) = \left[(x,y) - P_{j_0(i)}\right] \cdot \begin{bmatrix} P_{j_1(i)} - P_{j_0(i)} \\ P_{j_2(i)} - P_{j_0(i)} \end{bmatrix}^{-1}$, $\lambda_{0(i)} = 1 - \lambda_{1(i)} - \lambda_{2(i)}$)

- лінійні функції, тобто частинні похідні від них є константами.

Тоді

$$\int_{\tau_i} \left[\sum_{k,m=1}^{2} a_{k,m} \frac{\partial \sum_{r=0}^{2} \lambda_{r(i)} u^h\left(P_{j_r(i)}\right)}{\partial x_m} \frac{\partial \sum_{t=0}^{2} \lambda_{t(i)} v\left(P_{j_t(i)}\right)}{\partial x_k} + \right. \\ \left. + a_0 \sum_{r=0}^{2} \lambda_{r(i)} u^h\left(P_{j_r(i)}\right) \cdot \sum_{t=0}^{2} \lambda_{t(i)} u^h\left(P_{j_t(i)}\right) \right] dxdy =$$

$$\sum_{t,r=0}^{2} \left(\int_{\tau_i} \left(\sum_{k,m=1}^{2} a_{k,m} \frac{\partial \lambda_{r(i)}}{\partial x_m} \frac{\partial \lambda_{t(i)}}{\partial x_k} + a \lambda_{r(i)} \lambda_{t(i)} \right) dxdy \right) u^h\left(P_{j_r(i)}\right) v\left(P_{j_r(i)}\right) = \\ = \sum_{t,r=0}^{2} a_{t,r}^{(\tau_i)} \cdot u^h\left(P_{j_r(i)}\right) \cdot v\left(P_{j_t(i)}\right) \equiv \left(A^{(\tau_i)} P^{(\tau_i)} \overline{u}^h, P^{(\tau_i)} \overline{v} \right)_{R^3},$$

де $P^{(\tau_i)} \overline{v} = \left(v\left(P_{j_0(i)}\right), v\left(P_{j_1(i)}\right), v\left(P_{j_2(i)}\right) \right)^T$.

Матриця $A^{(\tau_i)}$ третього порядку називається *локальною матрицею жорсткості*.

Аналогічно отримаємо, що

$$\int_{\tau_i} f(x) v(x) dxdy = \sum_{t=0}^{2} \left(\int_{\tau_i} f(x) \cdot \lambda_{t(i)} dxdy \right) \cdot v\left(P_{j_t(i)}\right) = \left(\overline{f}^{(\tau_i)}, P^{(\tau_i)} \overline{v} \right)_{R^3},$$

де $\overline{f}^{(\tau_i)}$ - локальний вектор навантажень.

Тоді задача (5) еквівалентна задачі $A_h \overline{u}^h = \overline{f}^h$, так як

$$\bar{u}^h \in R^N : \ \left(u^h, v\right)_A \equiv \sum_{i=1}^{K} \int_{\tau_i} \left(\sum_{i,j=1}^{2} a_{i,j} \frac{\partial u^h}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i} + a_0 u^h v \right) dx \equiv$$

$$\equiv \left(\left(\sum_{i=1}^{K} \left(P^{(\tau_i)}\right)^T A^{(\tau_i)} P^{(\tau_i)} \right) \bar{u}^h, \bar{v} \right)_{R^N} \equiv \left(A_h \bar{u}^h, \bar{v}\right)_{R^N} = \qquad `(6)$$

$$= f(v) \equiv \sum_{i=1}^{K} \int_{\tau_i} f(x) v(x) dx dy \equiv \left(\left(\sum_{i=1}^{K} \left(P^{(\tau_i)}\right)^T \bar{f}_t^{(\tau_i)} \right), \bar{v} \right)_{R^N} \equiv$$

$$\equiv \left(\bar{f}^h, \bar{v} \right)_{R^N} \qquad \forall \bar{v} \in R^N,$$

тобто

$$A_h = \sum_{i=1}^{K} \left(P^{(\tau_i)}\right)^T A^{(\tau_i)} P^{(\tau_i)}, \ \bar{f}^h = \sum_{i=1}^{K} \left(P^{(\tau_i)}\right)^T \bar{f}_t^{(\tau_i)}$$

- глобальні матриця жорсткості і вектор навантажень.