Лекція 8. МСЕ в багатомірному випадку.

Нагадаємо, що однорідні крайові задачі для диференціального рівняння $Lu = f$ з еліптичним симетричним і додатно визначеним в $L_2(\Omega)$ оператором

$$Lu \equiv -\sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{i,j}(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} \right) + a_0(x) \cdot u(x),\ x = \left(x_1, ..., x_m \right) \in \Omega,$$

мають у відповідному енергетичному просторі H_A еквівалентні проекційну:

$$u \in H_A : (u,v)_A = f(v) \quad \forall v \in H_A, \qquad (1)$$

і варіаційну:

$$u \in H_A : F(u) = \min_{v \in H_A} F(v),\ F(v) \equiv (v,v)_A - 2f(v), \ (2)$$

формулювання, де $(u,v)_A$ - скалярний добуток в H_A:

1-ша крайова задача (Діріхле):

$$H_A = \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega),\ (u,v)_A = \int_{\Omega} \left(\sum_{i,j=1}^{m} a_{i,j} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_i} + a_0 uv \right) dx\ , \qquad (3)$$

2 і 3-ті крайові задачі:

$$H_A = W_2^1(\Omega),\ (u,v)_A = \int_{\Omega} \left(\sum_{i,j=1}^{m} a_{i,j} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_i} + a_0 uv \right) dx + \int_{\Gamma} \sigma uv ds, \quad (4)$$

$f(v) = \int_{\Omega} f(x) v(x) d\Omega$ - лінійний неперервний функціонал в H_A:

$$\exists c_f : \left| f(v) \right| \le c_f \cdot \|v\|_A \ \ \forall v \in H_A. \ (5)$$

Крім того, якщо γ - постійна додатної визначеності в $L_2(\Omega)$ оператора L, то

$$(v,v)_A \ge \gamma \cdot (v,v) \equiv \gamma \cdot \int_{\Omega} |v|^2 dx \ \ \forall v \in H_A, \ (6)$$

і енергетична норма еквівалентна нормі

$$\|v\|_1 = \sqrt{\int_{\Omega} \left(|\nabla v|^2 + |v|^2 \right) d\Omega}:$$

$\exists 0 < \gamma_0 \le \gamma_1 : \gamma_0 \|v\|_1^2 \le (v,v)_A \le \gamma_0 \|v\|_1^2$. (7)

Метод скінчених елементів розв'язування задачі (1) – метод Гальоркіна (або еквівалентної задачі (2) - метод Ритця) складається з 3-х етапів:

1. розбиття області Ω на скінчену кількість елементів τ_k малого об'єму,

2. задання функцій на елементі τ_k, що визначаються скінченим числом параметрів - формою (елемент + форма = скінчений елемент),

3. визначення скінчено мірного підпростору $V_n \subset H_A$, функції з якого мають задану форму на кожному елементі τ_k,

4. розв'язання еквівалентних скінчено вимірних задач:

$u^{(n)} \in V_n : (u^{(n)}, v)_A = f(v) \quad \forall v \in V_n$, (8)

або

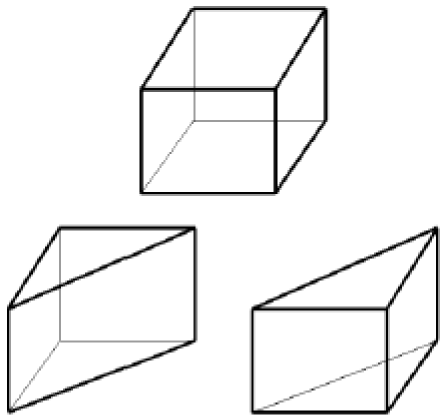
$u^{(n)} \in V_n : F(u^{(n)}) = \min\limits_{v \in V_n} F(v),\ F(v) \equiv (v,v)_A - 2f(v)$, (9)

Тоді лема Вішика-Сеа дає нам оцінку наближення розв'язку $u \in H_A$ функцією $u^{(n)} \in V_n$:

$\left\| u - u^{(n)} \right\|_A \le \left\| u - v^{(n)} \right\|_A \ \ \forall v^{(n)} \in V_n$. (10)

Тріангуляція області Ω

Найпростішими елементами в R^m є m -мірні прямокутники і m-мірні симплекси (трикутники в R^2, тетраедри в R^3).



Якщо область Ω - довільний m-мірний багатокутник (ми обмежимося випадком таких областей для $m = 2,3$), то розбити її на m-мірні прямокутники в загальному випадку не можна. Але можна розбити на m-мірні симплекси:

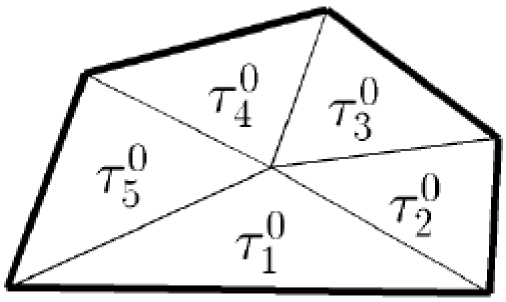


Рис. Приклад розбиття плоского багатокутника на трикутники.

Відзначимо, що будь-які два трикутника (2-мірні симплекси) мають спільними:

- Або одну сторону (1 мірний симплекс),
- Або одну вершину (0-мірний симплекс).

Така тріангуляція називається правильною.

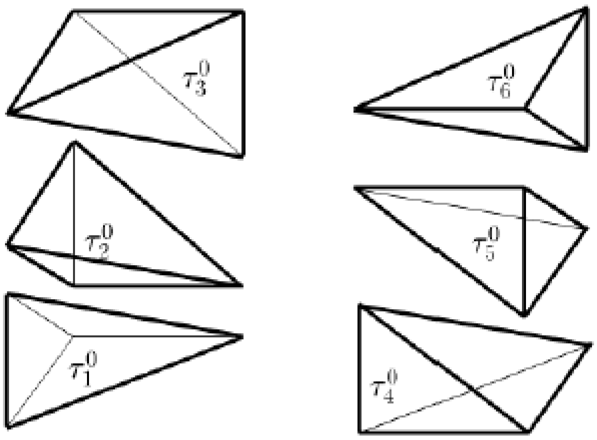
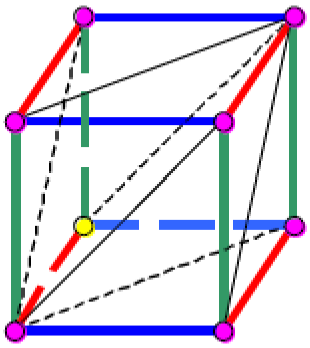


Рис. Приклад розбиття куба на тетраедри.

Нижче наводиться кольорове зображення розбиття куба на тетраедри, в якому колір ребра визначається ортом, якому це ребро паралельно.



Протилежні грані куба діляться на трикутники однаково спрямованою діагоналлю (це дозволяє "правильно" розбити область складену з кубиків на тетраедри).

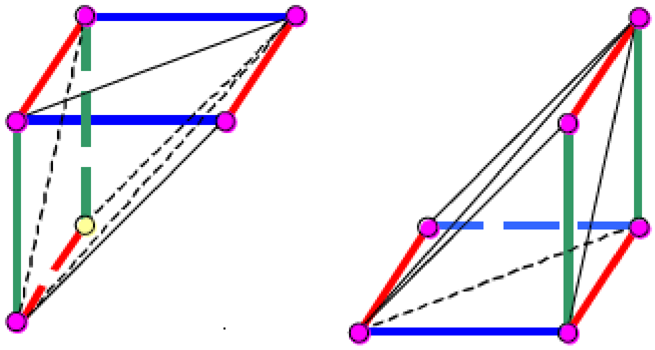


Рис. Розбиття куба на дві призми.

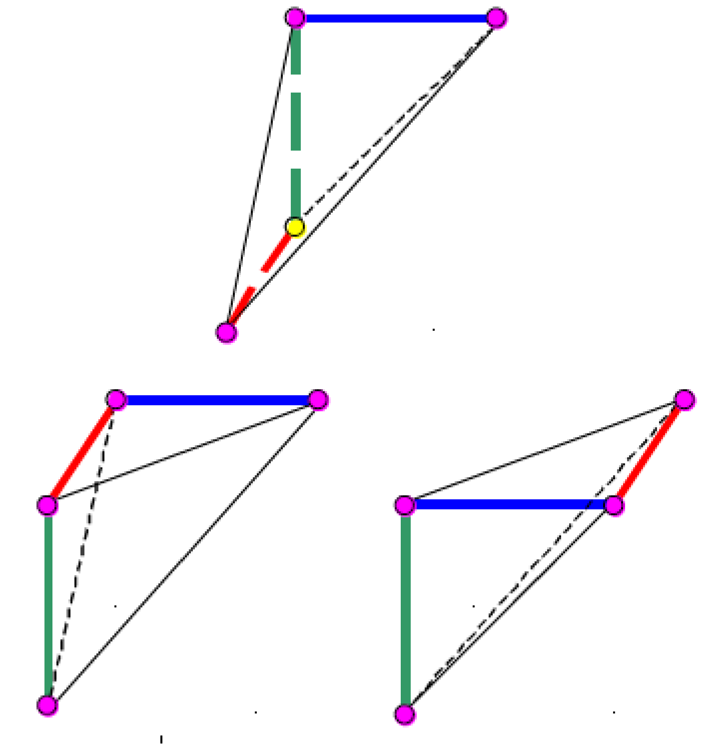


Рис. Розбиття призми на 3тетраедра.

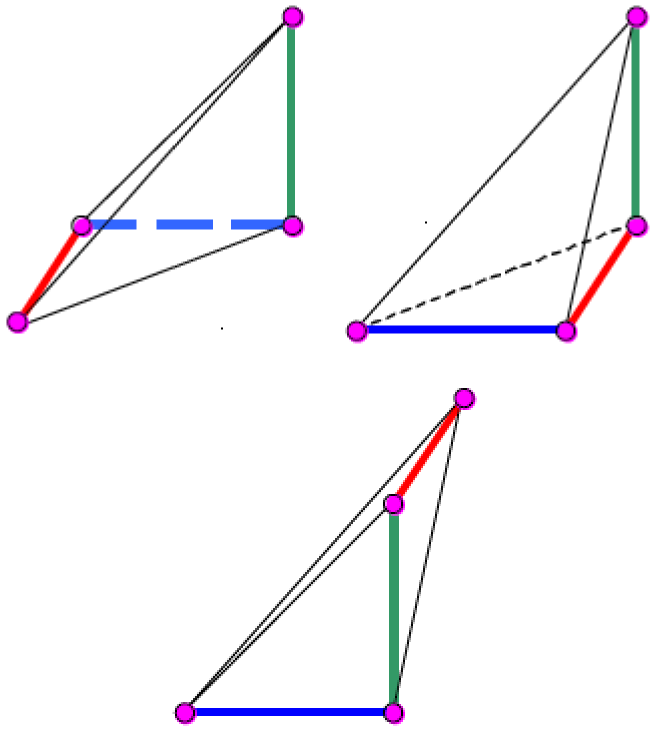


Рис. Розбиття призми на 3 тетраедра:

Будь-які два тетраедра (3-мірні симплекси) можуть мати спільними:

- Або одну грань (2-мірний симплекс),
- Або одне ребро (1-мірний симплекс),
- Або одну вершину (0-мірний симплекс).

Така тріангуляція куба називається ***правильною***.

Відзначимо, що в кожному тетраедра є три ребра паралельні відповідним трьом ортам, причому ці ребра утворюють просторову ламану; об'єми всіх тетраедрів однакові.

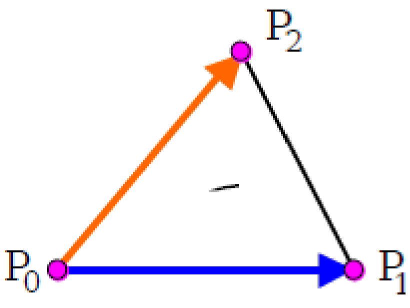
Невироджений m***-мірний симплекс*** в R^m - це (за визначенням) опукла оболонка $(m+1)$ точки $P_0,\ldots,P_m$, які не лежать в одній площині:

$$\tau\left(P_0,P_1,\ldots,P_m\right)\equiv\left\{\begin{array}{l} x\in R^m:\ x=\lambda_0\cdot P_0+\lambda_1\cdot P_1+\ldots+\lambda_m\cdot P_m= \\ \qquad\qquad =P_0+\lambda_1\cdot(P_1-P_0)+\ldots+\lambda_m\cdot(P_m-P_0) \\ \qquad\qquad \forall\ \lambda_0+\lambda_1+\ldots+\lambda_m=1,\ \lambda_i\geq 0 \end{array}\right\}. \qquad (11)$$

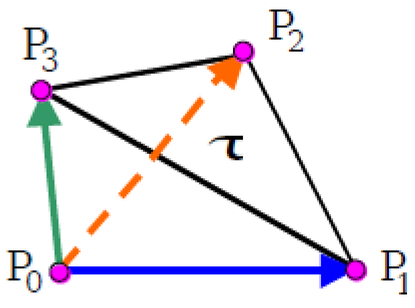
Нагадаємо, що необхідним і достатнім критерієм відсутності площини, якій належали б одночасно всі точки $P_0,P_1,\ldots,P_m$ є умова:

$$\det\begin{bmatrix} P_1 & L & P_m & P_0 \\ 1 & L & 1 & 1 \end{bmatrix}=\det\left[P_1-P_0 \quad L \quad P_m-P_0\right]=m!\cdot V(\tau)\neq 0, \qquad (12)$$

що означає лінійну незалежність векторів $P_1-P_0,\ldots,P_m-P_0$, що утворюють базис в R^m:



2-мірний симплекс.



3-мірний симплекс.

Означення. *r-мірною гранню симплексу $\tau\left(P_0,P_1,\ldots,P_m\right)$ називається r-мірний симплекс $\tau\left(P_{k_0},P_{k_1},\ldots,P_{k_r}\right)$ в гіперплощині з базисом $\left\{P_{k_1}-P_{k_0},\ldots,P_{k_r}-P_{k_0}\right\}$.*

Довести, що r-мірна грань невиродженого m-мірного симплекса - невироджений r-мірний симплекс в r-мірної гіперплощини.

Приклади. $m = 2$: 2-мірний симплекс - трикутник,

1-мірні грані - сторони трикутника,

0-мірні грані - вершини трикутника.

$m = 3$: 3-мірний симплекс - тетраедр,

2-мірні грані - трикутники (грані тетраедра),

1-мірні грані - ребра тетраедра,

0-мірні грані - вершини тетраедра.

Невироджений m-мірний симплекс $\tau\left(P_0, P_1, \ldots, P_m\right)$ будемо характеризувати:

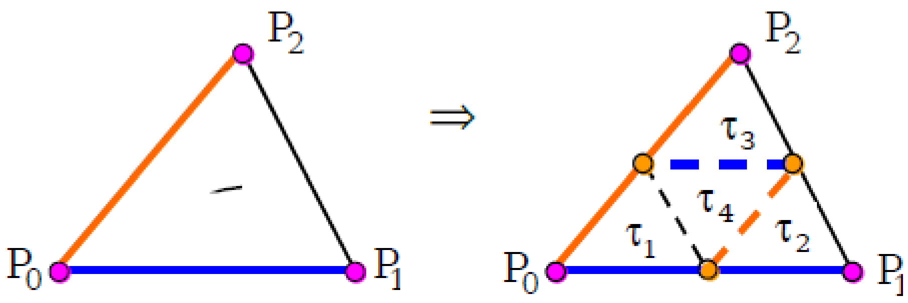
- Радіусом $r(\tau)$ вписаного в нього кулі і
- Радіусом $R(\tau)$ описаного навколо нього кулі.

Нехай $\tau_a = \tau\left(a \cdot P_0, a \cdot P_1, \ldots, a \cdot P_m\right)$ - промасштабований симплекс τ.

Довести, що $r\left(\tau_a\right) = a \cdot r(\tau)$ та $R\left(\tau_a\right) = a \cdot R(\tau)$.

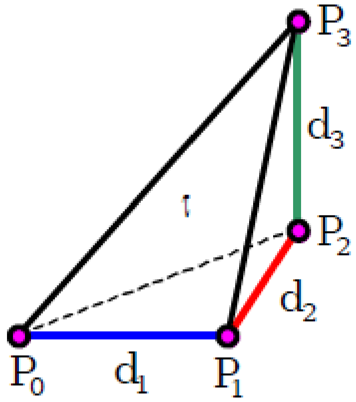
Розбиття невиродженого 2-мірного симплекса

Через k кроків $\forall \tau^{(k)} \in T^{(k)} : r\left(\tau^{(k)}\right) = 2^{-k} r(\tau),\ R\left(\tau^{(k)}\right) = 2^{-k} R(\tau)$. (13)

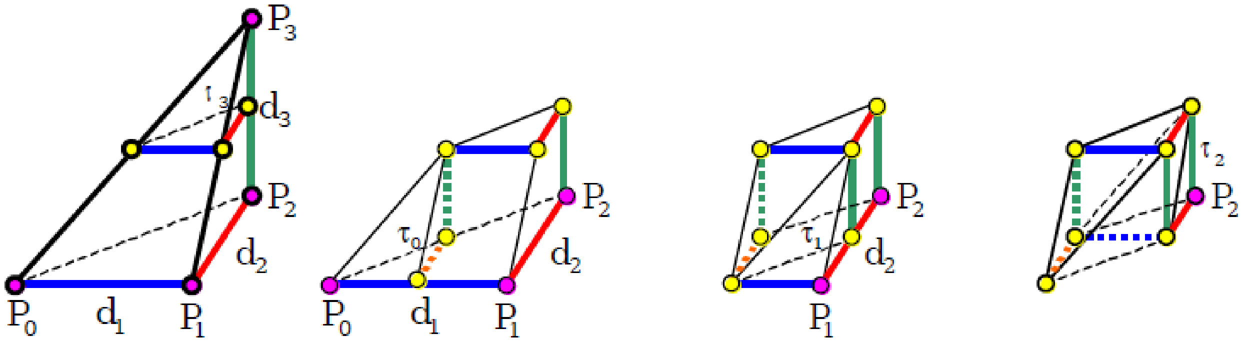


Розбиття невиродженого 3-мірного симплекса

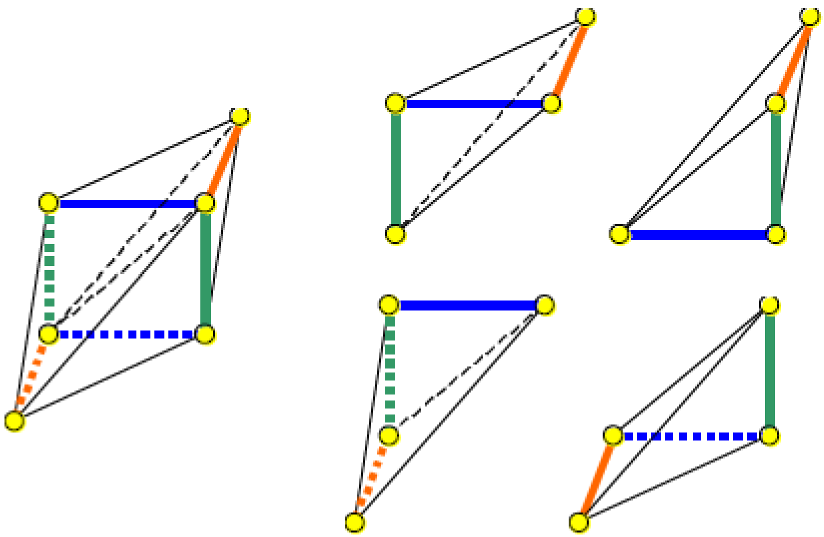
Виділимо в тетраедрі τ ламану з 3 ребер:



ділимо ребра навпіл і відрізаємо 4 тетраедра, подібних вхідному:



в отриманому восьмиграннику проводимо діагональ, що з'єднує вершини, в яких сходяться три виділених напівребра, і розбиваємо його на 4 тетраедра:



кожний з яких містить ламану з трьох виділених напівребер.

Таким чином, для початкового тетраедра з виділеними 3-ма ребрами, що складають просторову ламану, побудовано "правильне" розбиття $T^{(1)}$ на 8 симплексів, кожен з яких містить ламану з половинок трьох виділених ребер.

Повторивши цю процедуру розбиття для кожного тетраедра з $T^{(1)}$, отримаємо для початкового тетраедра з виділеними 3-ма ребрами, які складають просторову ламану, "правильне" розбиття $T^{(2)}$ на 8^2 симплексів, кожен з яких містить ламану з $(1/2)^2$ частин трьох виділених ребер.

Через k кроків отримаємо для початкового тетраедра з виділеними 3-ма ребрами, які складають просторову ламану, "правильне" розбиття $T^{(k)}$ на 8^k симплексів, кожен з яких містить ламану з $(1/2)^k$ частин трьох спочатку виділених ребер.

Очевидно, що з трьох спочатку виділених ребер ламаних можна скласти (з точністю до подібності) скінчене число K, тобто все симплекси останнього розбиття розбиваються максимум на K класів C_j симплексів, подібних тетраедру $\tau_j\left(d_1,d_2,d_3\right)$, і кожен симплекс $\tau^{(k)} \in C_j$ має

$$\begin{aligned} r\left(\tau^{(k)}\right) &= 2^{-k} \cdot r\left(\tau_j\left(d_1,d_2,d_3\right)\right) \geq 2^{-k} \cdot \min_{1\leq j\leq K} r\left(\tau_j\left(d_1,d_2,d_3\right)\right), \\ R\left(\tau^{(k)}\right) &= 2^{-k} \cdot R\left(\tau_j\left(d_1,d_2,d_3\right)\right) \leq 2^{-k} \cdot \max_{1\leq j\leq K} R\left(\tau_j\left(d_1,d_2,d_3\right)\right). \end{aligned} \qquad (14)$$

Таким чином ми показали, що початкову тріангуляцію $T^{(0)} = \left\{\tau_i^{(0)}\right\}_{i=1}^{K^{(0)}}$ багатокутної або багатогранної області Ω можна подрібнити і отримати правильну тріангуляцію $T^{(k)} = \left\{\tau_i^{(k)}\right\}_{i=1}^{K^{(k)}}$ з $K^{(k)} = \left(2^m\right)^k \cdot K^{(0)}$ симплексів, для яких

$$1 \leq \frac{\max R\left(\tau_i^{(k)}\right)}{\min r\left(\tau_i^{(k)}\right)} \leq c\left(T^{(0)}\right). \qquad (15)$$

Нерівності (15) гарантують існування незалежної від числа симплексів $K^{(k)}$ тріангуляції $T^{(k)}$ постійної C, обмежують кількість симплексів із спільною вершиною.

Дійсно,

1. всі симплекси із спільною вершиною V лежать в кулі радіуса $2 \cdot \max R\left(\tau_i^{(k)}\right)$ з центром в цій вершині і його об'єм дорівнює

$$c_m \left[2 \max R\left(\tau_i^{(k)}\right)\right]^m \left(c_2 = \pi; c_3 = 4\pi / 3\right);$$

2. в цей об'єм може поміститися не більше

$$C = c_m \left[2 \max R\left(\tau_i^{(k)}\right)\right]^m / \left\{ c_m \left[\min r\left(\tau_i^{(k)}\right)\right]^m \right\} = 2c$$ симплексів.