

Лекція 7. МСЕ в одновимірному випадку (закінчення)

Нагадаємо, що для розв'язання двоточкової крайової задачі

$$Lu \equiv -\frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{du(x)}{dx} \right) + q(x)u(x) = f(x), \quad x \in \Omega = (0,1) \quad (1)$$

$$u(0) = 0, \quad u'(1) = 0 \text{ - крайові умови, (2)}$$

ми побудували систему сіткових рівнянь (12) методу Гальоркіна в підпросторі V_{nm} кусочно-лагранжевих заповнень порядку m на сітці

$$\{0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = 1\}, \quad h_{k+1} = x_{k+1} - x_k, \text{ з проміжними вузлами}$$

$$x_{k+j/m} = x_k + j \cdot h_{k+1} / m, \quad j = 1, \dots, m-1 :$$

$$A^{(nm)} \bar{u}^{(nm)} = \left(\sum_{j=1}^{nm} (\varphi_{j/m}, \varphi_{l/m})_A \cdot u_{j/m}^{(nm)} \right)_{l=1}^{nm} = (f(\varphi_{l/m}))_{l=1}^{nm} \equiv \bar{f}^{(nm)}, \quad (12)$$

де $\varphi_{l/m}(x) = \varphi_{k+j/m}(x)$, $j = 0, \dots, m$; $k = 0, \dots, n$, (за виключенням $\varphi_0(x)$)

відмінні від нуля тільки на $[x_{k-1}, x_k] \cup [x_k, x_{k+1}]$, якщо $j = 0 \vee j = m$, і відмінні від нуля тільки на елементі $[x_k, x_{k+1}]$,

якщо $0 < j < m$.

Обчислення компонент вектора $\bar{f}^{(nm)}$

Так як

$$f(\varphi_{l/m}) = \int_0^1 f(x) \cdot \varphi_{l/m}(x) dx = \begin{cases} \int_{x_{k-1}}^{x_{k+1}} f(x) \cdot \varphi_k(x) dx, & l/m = k, \\ \int_{x_{k-1}}^{x_{k+1}} f(x) \cdot \varphi_{k+j/m}(x) dx, & l/m = k + j/m, \end{cases}$$

то для обчислення компонент вектора $\bar{f}^{(nm)}$ досить

обчислити інтеграли

$$f_{k,j} = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) \cdot \varphi_{k+j/m}(x) dx, \quad j = 0, \dots, m; \quad k = 0, \dots, n-1 \quad (15)$$

$$\text{Тоді } \left(\bar{f}^{(nm)} \right)^T = (f_{0,1}, \dots, f_{0,m-1}, f_{0,m} + f_{1,0}, \dots$$

$$\dots, f_{k-1,m} + f_{k,0}, f_{k,1}, \dots, f_{k,m-1}, f_{k,m} + f_{k+1,0}, \dots$$

$$\dots, f_{n-2,m} + f_{n-1,0}, f_{n-1,1}, \dots, f_{n-1,m-1}, f_{n-1,m})^T$$

Інтеграл (15) можна обчислювати наближено, замінивши функцію $f(x)$ на

$$P_{f,m}(x) = f_{k+0/m} \cdot \varphi_{k+0/m}(x) + \dots + f_{k+m/m} \cdot \varphi_{k+m/m}(x).$$

Тоді

$$\tilde{f}_{k,j} = \int_{x_k}^{x_{k+1}} P_{f,m}(x) \cdot \varphi_{k+j/m}(x) dx = \sum_{i=0}^m f_{k+i/m} \cdot h_{k+1} \cdot \gamma_{i,j},$$

$$y = (x - x_k) / h_{k+1}, \quad \tilde{\varphi}_{j,m}(y) = \varphi_{k+j/m}(x), \quad \gamma_{i,j} = \int_0^1 \tilde{\varphi}_{i,m}(y) \tilde{\varphi}_{j,m}(y) dy, \quad (16)$$

тобто знадобиться проінтегрувати тільки $(m+1)^2$ полиномів ступеня $2m$ і за формулою (16) ми отримаємо всі наближені компоненти вектора $\bar{f}^{(nm)}$.

Обчислення елементів матриці $A^{(nm)}$

Так як

$$\begin{aligned} \left(A^{(nm)} \right)_{I,J} &= \left(\varphi_{J,m}, \varphi_{I,m} \right)_A \equiv \\ &\equiv \int_0^1 \left[p(x) \cdot \varphi'_{J,m}(x) \cdot \varphi'_{I,m}(x) + q(x) \cdot \varphi_{J,m}(x) \cdot \varphi_{I,m}(x) \right] dx = \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \left[p(x) \cdot \varphi'_{J,m}(x) \cdot \varphi'_{I,m}(x) + q(x) \cdot \varphi_{J,m}(x) \cdot \varphi_{I,m}(x) \right] dx, \end{aligned}$$

а на інтервалі $[x_k, x_{k+1}]$ відмінні від нуля тільки базисні функції з номерами $I/m = k + i/m$, $J/m = k + j/m$, $i, j = 0, \dots, m$.

Звідси випливає, що в рядку з номером $I = (k + i/m)t$, $0 < i < m$,

відмінні від нуля елементи з номерами $J = (k + j/m)t$, $0 \leq j \leq m$,

а в рядку з номером $I = kt$ відмінні від нуля елементи з номерами $J = (k \pm j/m)t$, $0 \leq j \leq m$.

Для обчислення елементів матриці $A^{(nm)}$ досить обчислити інтеграл

$$\left. \begin{aligned} a_{k,(i,j)} &= \int_{x_k}^{x_{k+1}} p(x) \cdot \varphi'_{k+j/m}(x) \cdot \varphi'_{k+i/m}(x) dx, \\ b_{k,(i,j)} &= \int_{x_k}^{x_{k+1}} q(x) \cdot \varphi_{k+j/m}(x) \cdot \varphi_{k+i/m}(x) dx, \end{aligned} \right\} \begin{aligned} k &= 0, \dots, n-1 \\ i, j &= 0, \dots, m. \end{aligned} \quad (17)$$

Тоді, якщо ввести $A_{i,j}^k \equiv a_{k,(i,j)} + b_{k,(i,j)}$, то

$$\begin{aligned} \left(A^{(nm)}\right)_{kn,km} &= A_{m,m}^{k-1} + A_{0,0}^k, \text{ але } \left(A^{(nm)}\right)_{nm,nm} = A_{m,m}^{n-1}, \\ \left(A^{(nm)}\right)_{kn,(k+1)m} &= \left(A^{(nm)}\right)_{(k+1)m,km} = A_{m,0}^k = A_{0,m}^k, \\ \left(A^{(nm)}\right)_{km+i,km+j} &= \left(A^{(nm)}\right)_{km+j,km+i} = A_{i,j}^k = A_{j,i}^k, \end{aligned} \quad (18)$$

$$\{i = 0, m; j = 1, \dots, m-1\} \text{ або } \{j = 0, m; i = 1, \dots, m-1\}$$

$$\text{або } \{i, j = 1, \dots, m-1\}$$

Наприклад, ненульові елементи перших $2m-1$ рядків матриці утворюють підматрицю:

I / J	1	...	$m-1$	m	$m+1$...	$2m-1$	$2m$
1	$A_{1,1}^0$	L	$A_{1,m-1}^0$	$A_{1,m}^0$	O	L	O	O
M	M	O	M	M	M	M	M	M
$m-1$	$A_{m-1,1}^0$	L	$A_{m-1,m-1}^0$	$A_{m-1,m}^0$	O	L	O	O
m	$A_{m,1}^0$	L	$A_{m,m-1}^0$	$A_{m,m}^0 + A_{0,0}^1$	$A_{0,1}^1$	L	$A_{0,m-1}^1$	$A_{0,m}^1$
$m+1$	O	L	O	$A_{1,0}^1$	$A_{1,1}^1$	L	$A_{1,m-1}^1$	$A_{1,m}^1$
M	M	M	M	M	M	O	M	M
$2m-1$	O	L	O	$A_{m-1,0}^1$	$A_{m-1,1}^1$	L	$A_{m-1,m-1}^1$	$A_{m-1,m}^1$

Інтеграли (17) можна обчислювати наближено, замінивши функції $p(x)$ і $q(x)$ на інтерполяційні поліноми:

$$P_{p,m}(x) = p_{k+0/m} \cdot \varphi_{k+0/m}(x) + \dots + p_{k+m/m} \cdot \varphi_{k+m/m}(x),$$

$$P_{q,m}(x) = q_{k+0/m} \cdot \varphi_{k+0/m}(x) + \dots + q_{k+m/m} \cdot \varphi_{k+m/m}(x).$$

Тоді

$$\left. \begin{aligned}
\tilde{a}_{k,(i,j)} &= \int_{x_k}^{x_{k+1}} P_{p,m}(x) \cdot \varphi'_{k+j/m}(x) \cdot \varphi'_{k+i/m}(x) dx = \\
&= \sum_{t=0}^m p_{k+t/m} \cdot h_{k+1}^{-1} \cdot \gamma'_{t,i,j} \\
\gamma'_{t,i,j} &= \int_0^1 \tilde{\varphi}_{t/m}(y) \tilde{\varphi}'_{i/m}(y) \tilde{\varphi}'_{j/m}(y) dy; \\
\tilde{b}_{k,(i,j)} &= \int_{x_k}^{x_{k+1}} P_{q,m}(x) \cdot \varphi_{k+j/m}(x) \cdot \varphi_{k+i/m}(x) dx = \\
&= \sum_{t=0}^m q_{k+t/m} \cdot h_{k+1} \cdot \gamma_{t,i,j} \\
\gamma_{t,i,j} &= \int_0^1 \tilde{\varphi}_{t/m}(y) \tilde{\varphi}_{i/m}(y) \tilde{\varphi}_{j/m}(y) dy;
\end{aligned} \right\} t, i, j = 0, \dots, m$$

(19)

тобто знадобиться проінтегрувати тільки $2(m+1)^3$ поліномів ступеня $3m-2$ (числа $\gamma'_{t,i,j}$) і $3m$ (числа $\gamma_{t,i,j}$), і по формулі (18) ми отримаємо всі наближені елементи матриці $A^{(nm)}$.

Можливість розв'язання задачі при наближеному обчисленні інтегралів

Результатом наближеного обчислення інтегралів при формуванні матриці і вектора правої частини системи сіткових рівнянь (12) є нова система:

$$\tilde{A}^{(nm)} \tilde{u}^{(nm)} \equiv \left(\sum_{J=1}^{nm} (\varphi_{J/m}, \varphi_{I/m})_{\tilde{A}} \cdot \tilde{u}_{J/m}^{(nm)} \right)_{I=1}^{nm} = \left(\tilde{f}(\varphi_{I/m}) \right)_{I=1}^{nm} \equiv \tilde{f}^{(nm)} \quad (20)$$

$$(u, v)_{\tilde{A}} \equiv \left(\tilde{A}^{(nm)} \bar{u}, \bar{v} \right)_{R^{nm}} \equiv \int_0^1 [\tilde{p}(x) \cdot u'(x) \cdot v'(x) + \tilde{q}(x) \cdot u(x) \cdot v(x)] dx,$$

$$\tilde{f}(v) \equiv \left(\tilde{f}^{(nm)}, \bar{v} \right)_{R^{nm}} \equiv \int_0^1 \tilde{f}(x) \cdot v(x) dx \quad \forall \bar{u}, \bar{v} \in R^{nm} \leftrightarrow u, v \in V_{nm}.$$

Звідси випливає, що система (20) є алгебраїчною формулюванням проекційної задачі

$$\tilde{u}^{(nm)}(x) \in V_{nm} : \left(\tilde{u}^{(nm)}, v \right)_{\tilde{A}} = \tilde{f}(v) \quad \forall v(x) \in V_{nm}. \quad (21)$$

Розв'язок цієї задачі існує і єдиний, якщо:

1. білінійна форма $(u, v)_{\tilde{A}}$ є скалярним добутком в V_{nm} ;
2. Лінійний функціонал $\tilde{f}(v)$ обмежений з V_{nm} в R .

Припустимо, що функції $p(x), \tilde{p}(x), q(x), \tilde{q}(x), f(x), \tilde{f}(x)$

неперервні на кожному елементі сітки $[x_k, x_{k+1}]$ (саме на комірці сітки ми апроксимували коефіцієнти і праву частину диференціального рівняння при обчисленні інтегралів) і

$$|p(x) - \tilde{p}(x)| \leq \varepsilon, |q(x) - \tilde{q}(x)| \leq \varepsilon, |f(x) - \tilde{f}(x)| \leq \varepsilon \quad \forall x, \quad (22)$$

де $\varepsilon > 0$ - мала величина - оцінка приближених функцій.

Якщо $\sqrt{\gamma_0}, \sqrt{\gamma_1}$ - постійні еквівалентності норм $\|v\|_A$ і $\|v\|_1$:

$$\gamma_0 \cdot (v, v)_1 \leq (v, v)_A \leq \gamma_1 \cdot (v, v)_1 \quad \forall v \in H_A,$$

то

$$\begin{aligned} |(u, v)_A - (u, v)_{\tilde{A}}| &\leq \varepsilon \cdot \left| \int \left[|u'(x)| \cdot |v'(x)| + |u(x)| \cdot |v(x)| \right] dx \right| \leq \\ &\leq \varepsilon \cdot \left| \int_0^1 \sqrt{|u'(x)|^2 + |u(x)|^2} \cdot \sqrt{|v'(x)|^2 + |v(x)|^2} dx \right| \leq \\ &\leq \varepsilon \cdot \|u\|_1 \cdot \|v\|_1 \leq \varepsilon \gamma_0^{-1} \cdot \|u\|_A \cdot \|v\|_A. \end{aligned}$$

Звідси слідує, що

$$\begin{aligned} (v, v)_{\tilde{A}} &= (v, v)_A - \left[(v, v)_A - (v, v)_{\tilde{A}} \right] \geq (v, v)_A - \varepsilon \gamma_0^{-1} \cdot (v, v)_A, \\ (v, v)_{\tilde{A}} &= (v, v)_A + \left[(v, v)_{\tilde{A}} - (v, v)_A \right] \leq (v, v)_A + \varepsilon \gamma_0^{-1} \cdot (v, v)_A. \end{aligned} \quad (23)$$

З першого нерівності випливає, що білінійна форма $(u, v)_{\tilde{A}}$

є скалярним добутком в H_A , а значить і в V_{nm} , при $\varepsilon < \gamma_0$, так як

$$(v, v)_{\tilde{A}} \geq (1 - \varepsilon / \gamma_0) \cdot (v, v)_A > 0 \quad \forall v \neq 0.$$

Обидві нерівності (23) встановлюють еквівалентність норм $\|v\|_{\tilde{A}}$ і $\|v\|_A$.

Обмеженість лінійного функціоналу $\tilde{f}(v)$ в нормі $\|v\|_{\tilde{A}}$ слідує з нерівностей:

$$|f(v)| \leq \sqrt{\int_0^1 |f(x)|^2 dx} \cdot \sqrt{\int_0^1 |v(x)|^2 dx} \leq \|f\| \cdot \|v\|_1,$$

$$|f(v) - \tilde{f}(v)| \leq \varepsilon \cdot \int_0^1 |v(x)| dx \leq \sqrt{\int_0^1 |v(x)|^2 dx} \leq \varepsilon \cdot \|v\|_1,$$

$$(v, v)_1 \leq \gamma_0^{-1} \cdot (v, v)_A \leq \gamma_0^{-1} \cdot (1 - \varepsilon / \gamma_0)^{-1} \cdot (v, v)_{\tilde{A}} = (\gamma_0 - \varepsilon)^{-1} \cdot (v, v)_{\tilde{A}}.$$

Дійсно:

$$|\tilde{f}(v)| = |f(v) + (\tilde{f}(v) - f(v))| \leq \|f\| \cdot \|v\|_1 + \varepsilon \cdot \|v\|_1 \leq \frac{\|f\| + \varepsilon}{\sqrt{\gamma_0 - \varepsilon}} \|v\|_{\tilde{A}}.$$

Оцінка $\|u^{(nm)} - \tilde{u}^{(nm)}\|_A$

Тепер оцінимо різницю між розв'язком $u^{(nm)}$ проекційної задачі (6) і розв'язком $\tilde{u}^{(nm)}$ проекційної задачі (21):

$$\begin{aligned} (u^{(nm)}, v)_A &= f(v), (\tilde{u}^{(nm)}, v)_{\tilde{A}} = \tilde{f}(v), \forall v(x) \in V_{nm} \\ \Rightarrow (u^{(nm)} - \tilde{u}^{(nm)}, v)_A &= f(v) - \left[(\tilde{u}^{(nm)}, v)_A - (\tilde{u}^{(nm)}, v)_{\tilde{A}} \right] - \tilde{f}(v) \leq \\ &\leq \varepsilon \cdot \|v\|_1 + \varepsilon \gamma_0^{-1} \cdot \|\tilde{u}^{(nm)}\|_A \cdot \|v\|_A \leq \varepsilon \cdot (1 + \gamma_0^{-1}) \cdot \|\tilde{u}^{(nm)}\|_A \cdot \|v\|_A \\ \Rightarrow \|u^{(nm)} - \tilde{u}^{(nm)}\|_A &\leq \varepsilon \cdot (1 + \gamma_0^{-1}) \cdot \|\tilde{u}^{(nm)}\|_A. \quad (24) \end{aligned}$$

Обумовленість матриці $\tilde{A}^{(nm)}$

Так як $(\tilde{A}^{(nm)}\bar{u}, \bar{v})_{R^{nm}} \equiv (u, v)_{\tilde{A}}$ та $(A^{(nm)}\bar{u}, \bar{v})_{R^{nm}} \equiv (u, v)_A$, то з

нерівностей (23) слідує, що

$$(\tilde{A}^{(nm)}\bar{v}, \bar{v})_{R^{nm}} \geq (1 - \varepsilon \gamma_0^{-1}) \cdot (A^{(nm)}\bar{v}, \bar{v})_{R^{nm}} \geq (1 - \varepsilon \gamma_0^{-1}) \cdot \lambda_1 \cdot (\bar{v}, \bar{v})_{R^{nm}},$$

$$(\tilde{A}^{(nm)}\bar{v}, \bar{v})_{R^{nm}} \leq (1 + \varepsilon \gamma_0^{-1}) \cdot \rho(A^{(nm)}) \cdot (\bar{v}, \bar{v})_{R^{nm}}$$

$$\Rightarrow \text{cond } \tilde{A} \leq \frac{\gamma_0 + \varepsilon}{\gamma_0 - \varepsilon} \text{cond } A. \quad (25)$$