Лекція 6. МСЕ в одновимірному випадку (продовження).

Базис в підпросторі кусково-лагранжевих заповнень

Очевидно, що між $V_{nm} \subset H_A$ та R^{nm} встановлюється взаємно-однозначна відповідність (див. (8)):

$$v(x) \leftrightarrow \left\{ v_{1/m}, ..., v_{(m-1)/m}, v_1, ..., v_i, v_{i+1/m}, ..., v_{i+(m-1)/m}, v_{i+1}, ..., v_n \right\} \qquad (10)$$

тут ми врахували, що $v_0 = v\left(x_0\right) = 0$.

Тоді (10) також визначає відповідність між базисами в цих просторах, наприклад:

$$\begin{array}{lcl}
\varphi_{1/m}\left(x\right) & \leftrightarrow & \left\{\underline{1,...,0},0,...,0,\underline{0,...,0},0,...,0\right\} \\
L & & L \\
\varphi_{1/m}\left(x\right) & \leftrightarrow & \left\{\underline{0,...,1},0,...,0,\underline{0,...,0},0,...,0\right\} \\
\varphi_{1/m}\left(x\right) & \leftrightarrow & \left\{\underline{0,...,0},1,...,0,\underline{0,...,0},0,...,0\right\} \\
L & & L \\
\varphi_{1/m}\left(x\right) & \leftrightarrow & \left\{\underline{0,...,0},0,...,1,\underline{0,...,0},0,...,0\right\} \\
\varphi_{1/m}\left(x\right) & \leftrightarrow & \left\{\underline{0,...,0},0,...,0,\underline{1,...,0},0,...,0\right\} \\
L & & L \\
\varphi_{1/m}\left(x\right) & \leftrightarrow & \left\{\underline{0,...,0},0,...,0,\underline{0,...,1},0,...,0\right\} \\
\varphi_{1/m}\left(x\right) & \leftrightarrow & \left\{\underline{0,...,0},0,...,0,\underline{0,...,0},1,...,0\right\} \\
L & & L \\
\varphi_{1/m}\left(x\right) & \leftrightarrow & \left\{\underline{0,...,0},0,...,0,\underline{0,...,0},0,...,1\right\}
\end{array} \qquad (11)$$

Саме цей базис використовується в (8):

функції з дробовим індексом $k + j/m,\ j = 1, ..., m-1,$ відмінні від нуля тільки на елементі $\left[x_k, x_{k+1}\right]$:

$$\varphi_{k+j/m}\left(x\right) = \frac{\left(x - x_k\right)...\left(x - x_{k+(j-1)/m}\right)\left(x - x_{k+(j+1)/m}\right)...\left(x - x_{k+1}\right)}{\left(x_{k,j} - x_k\right)...\left(x_{k,j} - x_{k+(j-1)/m}\right)\left(x_{k,j} - x_{k+(j+1)/m}\right)...\left(x_{k,j} - x_{k+1}\right)} ,$$

функції з цілим індексом k відмінні від нуля тільки на двох елементах $\left[x_{k-1}, x_k\right]$ та $\left[x_k, x_{k+1}\right]$:

$$\varphi_{k+j/m}(x)=\begin{cases}\dfrac{(x-x_{k-1})(x-x_{k-(m-1)/m})\dots(x-x_{k-1/m})}{(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k-(m-1)/m})\dots(x_k-x_{k-1/m})}, & x\in[x_{k-1},x_k]\\ \dfrac{(x-x_{k+1/m})(x-x_{k+(m-1)/m})\dots(x-x_{k+1})}{(x_k-x_{k+1/m})(x_k-x_{k+(m-1)/m})\dots(x_k-x_{k+1})}, & x\in[x_k,x_{k+1}]\end{cases}$$

Система сіткових рівнянь методу Гальоркіна

в підпросторі кусочно-лагранжевих заповнень

Кожній функції $v(x)\in V_{nm}$ співставимо вектор $\overline{v}(x)\in R^{nm}$:

$$v(x)\leftrightarrow\overline{v}=\left(v_{1/m},\dots,v_{(m-1)/m},v_1,\dots,v_i,v_{i+1/m},\dots,v_{i+(m-1)/m},v_{i+1},\dots,v_n\right)^T$$

коефіцієнтів її розкладу по базису (11).

Тоді наближена задача

$$u^{(nm)}\in V_{nm}:\ \left(u^{(nm)},v\right)_A=\int_0^1 f\cdot vdx\equiv f(v)\quad\forall v\in V_{nm}\ ,\qquad (6)$$

еквівалентна системі лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\sum\left(\varphi_{J/m},\varphi_{I/m}\right)_A\cdot\overline{u}_{J/m}^{(nm)}=f\left(\varphi_{I/m}\right),\ \ I=1,\dots,nm\ ,\qquad (12)$$

із симетричною і додатно визначеною матрицею

$$A^{(nm)}=\left(\left(\varphi_{J/m},\varphi_{I/m}\right)_A\right)_{J,I=1}^{nm}$$

Довести, що у цій матриці в кожному рядку не більше 2m + 1 ненульових елементів.

Число обумовленості матриці

Перш за все нагадаємо, що (див. Лекцію 4):

$$\operatorname{cond}A^{(nm)}\le\left(\gamma^{(nm)}/\gamma\right)\cdot\operatorname{cond}M^{(nm)}\ ,\qquad (13)$$

де $M^{(nm)}$ - матриця мас, γ - постійна додатно визначеності оператора задачі в $L_2(0,1)$:

$$\gamma\cdot\left(M^{(nm)}\overline{v},\overline{v}\right)_{R^{nm}}=\gamma(v,v)\le(v,v)_A=\left(A^{(nm)}\overline{v},\overline{v}\right)_{R^{nm}}\quad\forall v\in V_{nm}\ ,$$

а постійна $\gamma^{(nm)}$ визначається з умови

$$\left(v,v\right)_A \le \gamma^{(nm)} \cdot \left(v,v\right) \;\; \forall v \in V_{nm} . \quad (14)$$

Спочатку оцінимо число обумовленості матриці мас.

Лема 4. Якщо $\max h_k / \min h_k \le \mathrm{const}$ (тобто сімейство сіток регулярно), то число обумовленості матриці мас рівномірно (по n) обмежена:

$$\mathrm{cond}\, M^{(nm)} \le 2 \cdot \mathrm{const} \cdot \mathrm{cond}\,\Gamma_{m+1} = \rho_m ,$$

де Γ_{m+1} - матриця Грама системи базисних поліномів інтерполяції Лагранжа порядку m в скалярному добутку $L_2\left(0,1\right)$.

Доведення. Маємо

$$\left(M^{(nm)}\overline{v},\overline{v}\right)_{R^{nm}} = \left(v,v\right) = \int_0^1 \left|v\left(x\right)\right|^2 dx = \sum\nolimits_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \left|v\left(x\right)\right|^2 dx .$$

Оцінимо доданки цієї суми:

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} \left|v\left(x\right)\right|^2 dx = \int_{x_k}^{x_{k+1}} \left|\sum\nolimits_{k=0}^{m} \varphi_{k+j/m}\left(x\right) \cdot v_{k+j/m}\right|^2 dx =$$

$$= h_{k+1} \int_0^1 \left|\sum\nolimits_{j=0}^{m} \tilde{\varphi}_{j/m}\left(y\right) \cdot v_{k+j/m}\right|^2 dy, \quad y = \left(x - x_k\right) / h_{k+1} ,$$

де функції

$$\tilde{\varphi}_{j/m}\left(y\right) = \frac{\left[y-0\right]...\left[y-(j-1)\right]\left[y-(j+1)\right]...\left[y-m\right]}{\left[j-0\right]...\left[j-(j-1)\right]\left[j-(j+1)\right]...\left[j-m\right]}$$

не залежить від h_{k+1}. Ці функції лінійно незалежні в $L_2\left(0,1\right)$. Отже матриця Грама

$$\Gamma_{m+1} = \left(\gamma_{ij} = \int_0^1 \tilde{\varphi}_{i/m}\left(y\right) \tilde{\varphi}_{j/m}\left(y\right) dy\right)_{i,j=0}^{m}$$ додатно визначена, а її власні значення залежать тільки від m.

Тоді

$$\lambda_1\left(\Gamma_{m+1}\right)\left(\overline{v}_k, \overline{v}_k\right)_{R^{m+1}} \le \int_0^1 \left|\sum\nolimits_{j=0}^{m} \tilde{\varphi}_{j/m}\left(y\right) \cdot v_{k+j/m}\right|^2 dy \equiv$$

$$\equiv \left(\Gamma_{m+1}\overline{v}_k, \overline{v}_k\right)_{R^{m+1}} \le \lambda_{m+1}\left(\Gamma_{m+1}\right)\left(\overline{v}_k, \overline{v}_k\right)_{R^{m+1}}$$

та

$$\left\{\lambda_1\left(\Gamma_{m+1}\right) \min h_{k+1}\right\}\left(\overline{v}, \overline{v}\right)_{R^{nm}} \le \lambda_1\left(\Gamma_{m+1}\right) \sum\nolimits_{k=0}^{n-1} h_{k+1} \left(\overline{v}_k, \overline{v}_k\right)_{R^{m+1}} \le$$

$$\le \left(M^{(nm)}\bar{v},\bar{v}\right)_{R^{nm}} = \sum_{k=0}^{n-1} h_{k+1}\left(\Gamma_{m+1}\bar{v}_k,\bar{v}_k\right)_{R^{m+1}} \le$$

$$\le \lambda_{m+1}\left(\Gamma_{m+1}\right)\sum_{k=0}^{n-1} h_k\left(\bar{v}_k,\bar{v}_k\right)_{R^{m+1}} \le \left\{\lambda_{m+1}\left(\Gamma_{m+1}\right)2\max h_k\right\}\left(\bar{v},\bar{v}\right)_{R^{nm}} ,$$

тобто

$$\operatorname{cond} M^{(nm)} \le \frac{\lambda_{m+1}\left(\Gamma_{m+1}\right)2\max h_k}{\lambda_1\left(\Gamma_{m+1}\right)2\min h_k} = \rho_m$$ не залежить від кроку сітки.

Тепер оцінимо константу нерівності

$$\left(v,v\right)_A \le \gamma^{(nm)}\cdot\left(v,v\right) \quad \forall v\in V_{nm} .$$

Лема 5. $\gamma^{(nm)} \le \gamma_1\left\{1+\max h_k^{-2}\cdot\rho\left(\Gamma_{m+1}^{-1}\Gamma'_{m+1}\right)\right\} = O\left(h_{\min}^{-2}\right)$,

де Γ_{m+1} та Γ'_{m+1}- матриці Грама системи базисних поліномів і їх похідних відповідно інтерполяції Лагранжа порядку m в скалярному добутку $L_2\left(0,1\right)$.

Доведення. Так як $\left(v,v\right)_A \le \gamma_1\cdot\left(v,v\right)_1 \quad \forall v\in H_A$, то

$$\gamma^{(nm)} = \sup_{v\in V_{nm}}\frac{\left(v,v\right)_A}{\left(v,v\right)} \le \gamma_1\sup_{v\in V_{nm}}\frac{\left(v,v\right)_1}{\left(v,v\right)} = \gamma_1\left\{1+\sup_{v\in V_{nm}}\frac{\int_0^1\left|v'\left(x\right)\right|^2 dx}{\int_0^1\left|v\left(x\right)\right|^2 dx}\right\}.$$

Порівняємо елементи сум: $\int_0^1\left|v\left(x\right)\right|^2 dx = \sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}}\left|v\left(x\right)\right|^2 dx$ та

$$\int_0^1\left|v'\left(x\right)\right|^2 dx = \sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}}\left|v'\left(x\right)\right|^2 dx$$

Як і при доведенні леми 4 зробимо заміну змінної $y=\left(x-x_k\right)/h_{k+1}$. Тоді

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}}\left|v\left(x\right)\right|^2 dx = \int_{x_k}^{x_{k+1}}\left|\sum_{j=0}^{m}\varphi_{k+j/m}(x)\cdot v_{k+j/m}\right|^2 dx =$$

$$= h_{k+1}^{-1}\int_0^1\left|\sum_{j=0}^{m}\tilde{\varphi}_{j/m}(y)\cdot v_{k+j/m}\right|^2 dy = h_{k+1}^{-1}\left(\Gamma_{m+1}\bar{v}_k,\bar{v}_k\right)_{R^{m+1}},$$

де матриця Грама $\Gamma_{m+1} = \left(\gamma_{ij} = \int_0^1\tilde{\varphi}_{i/m}(y)\tilde{\varphi}_{j/m}(y)dy\right)_{i,j=0}^{m}$

додатно визначена, а її власні значення залежать тільки від m, та

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}}\left|v'\left(x\right)\right|^2 dx = \int_{x_k}^{x_{k+1}}\left|\sum_{j=0}^{m}\varphi'_{k+j/m}(x)\cdot v_{k+j/m}\right|^2 dx =$$

$$= h_{k+1}^{-1}\int_0^1\left|\sum\nolimits_{j=0}^{m}\tilde{\varphi}'_{j/m}(y)\cdot v_{k+j/m}\right|^2 dy = h_{k+1}^{-1}\left(\Gamma'_{m+1}\bar{v}_k,\bar{v}_k\right)_{R^{m+1}},$$

де матриця $\Gamma'_{m+1} = \left(\gamma'_{ij} = \int_0^1 \tilde{\varphi}'_{i/m}(y)\tilde{\varphi}'_{j/m}(y)dy\right)_{i,j=0}^{m}$

додатно напіввизначена, а її власні значення

залежать тільки від m.

З цих міркувань слідує, що

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}}\left|v'(x)\right|^2 dx = h_{k+1}^{-1}\left(\Gamma'_{m+1}\bar{v}_k,\bar{v}_k\right)_{R^{m+1}} =$$

$$= h_{k+1}^{-1}\frac{\left(\Gamma'_{m+1}\bar{v}_k,\bar{v}_k\right)_{R^{m+1}}}{h_{k+1}\left(\Gamma_{m+1}\bar{v}_k,\bar{v}_k\right)_{R^{m+1}}}\int_{x_k}^{x_{k+1}}\left|v(x)\right|^2 dx \le$$

$$\le h_{k+1}^{-2}\cdot\rho\left(\Gamma_{m+1}^{-1}\Gamma'_{m+1}\right)\int_{x_k}^{x_{k+1}}\left|v(x)\right|^2 dx.$$

Підсумувавши отримане нерівність по всім коміркам сітки, отримаємо

$$\int_0^1\left|v'(x)\right|^2 dx \le \max h_k^{-2}\cdot\rho\left(\Gamma_{m+1}^{-1}\Gamma'_{m+1}\right) = \int_0^1\left|v(x)\right|^2 dx,$$

тобто $\gamma^{(nm)} \le \gamma_1\left\{1+\max h_k^{-2}\cdot\rho\left(\Gamma_{m+1}^{-1}\Gamma'_{m+1}\right)\right\} = O\left(h_{\min}^{-2}\right)$, що і тр.д.

Наслідком лем 4 і 5 є

Теорема 5. Число обумовленості матриці $A^{(nm)}$ системи сіткових рівнянь (12) методу Гальоркіна в підпросторі кусочно-лагранжевих заповнення порядку m є величиною $O\left(h_{\min}^{-2}\right)$, якщо $\frac{h_{\max}}{h_{\min}} = \mathrm{const}$, тобто сімейство сіток регулярно.