Лекція 5. МКЕ в одномірному випадку. Двоточкова крайова задача

$$Lu \equiv -\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du}{dx} \right) + q(x)u = f(x),\ x \in \Omega = (0,1) \qquad (1)$$

$u(0) = 0,\ \dfrac{du(1)}{dx} = 0$ – крайові умови, (2)

$p(x) \in C^1[0,1] : 0 < p_0 \le p(x) \le p_1$; $q(x) \in C[0,1] : 0 \le q(x) \le q_1$; (3)

$f(x) \in C[0,1] \subset L_2(0,1)$ - задані функції.

Область визначення оператора L:

$D(L) = \{ v \in C^2[0,1] : v(0) = v'(1) = 0 \}$.

Симетричність оператора L:

$$(Lu, v) = \int_0^1 \left(-(pu')' + qu \right) v dx = -(pu')v\Big|_0^1 + \int_0^1 (pu'v' + quv)\, dx =$$

$$= \int_0^1 (pu'v' + quv)\, dx = u(x)\big(p(x)v'(x)\big)\Big|_0^1 + \int_0^1 u\left(-(pv')' + qv \right) dx = (u, Lv).$$

Додатна визначеність оператора L:

$$(Lv, v) = \int_0^1 \left(p|v'|^2 + q|v|^2 \right) dx \ge p_0 \int_0^1 |v'|^2\, dx \ge \frac{p_0}{c} \int_0^1 |v|^2\, dx \equiv \gamma \|v\|^2,$$

де $c > 0$ – стала узагальненої нерівності Фридрихса

(знайдіть її!):

$$\int_0^1 |v|^2\, dx \le c\left(\int_0^1 |v'|^2\, dx + |v(0)|^2 \right).$$

Енергетичний простір оператора $A = L : D(L) \subset L_2(0,1) \to L_2(0,1)$

- поповнення H_A лінійної множини $D(L)$ у нормі

$\|v\|_A = \sqrt{(v,v)_A}$, де

$(u,v)_A = (Lu, v) = \int_0^1 (pu'v' + quv)\, dx \quad \forall u, v \in D(L)$, (4)

- функції з $W_2^1(0,1)$, рівні нулю при $x = 0$ (головна крайова умова), що й приймають будь-яке значення при $x = 1$ (природня крайова умова).

Лема 1. В $H_A = \{ v \in W_2^1(0,1) : v(0) = 0 \}$ норми $\|v\|_A = \sqrt{(v,v)_A}$ та

$\|v\|_1 = \sqrt{(v,v)_1} = \sqrt{\int_0^1 \left(|v'|^2 + |v|^2 \right) dx}$ еквівалентні.

(Довести.)

Проекційне формулювання задачі (1) – (2):

$u \in H_A : (u,v)_A = \int_0^1 fv dx \equiv f(v) \quad \forall v \in H_A$. (5)

Лема 2. $\forall f \in L_2(0,1)$ функціонал $f(v)=\int\limits_0^1 f(x)v(x)dx$ лінійний та обмежений в $H_A=\left\{v\in W_2^1(0,1):\ v(0)=0\right\}$. (Довести.)

Наближена проекційна задача:

$$u^{(n)}\in V_n:\ \left(u^{(n)},v\right)_A=\int\limits_0^1 fvdx\equiv f(v),\ \forall v\in V_n, \qquad (6)$$

де $V_n\subset H_A$ – n-мірний підпростір.

По лемі Вишика-Сеа (лекція 4) $\left\|u-u^{(n)}\right\|_A=\inf\limits_{v\in V_n}\|u-v\|_A$, тобто розмірність і сам підпростір V_n потрібно вибирати так, щоб розв'язок u задачі (5) можна було наблизити з заданою точністю функцією з V_n.

Підпростір кусково-лінійних заповнень

Лема 3. *Функція* $v\in H_A=\left\{v\in W_2^1(0,1):v(0)=0\right\}$ *неперервна.*

Доведення.

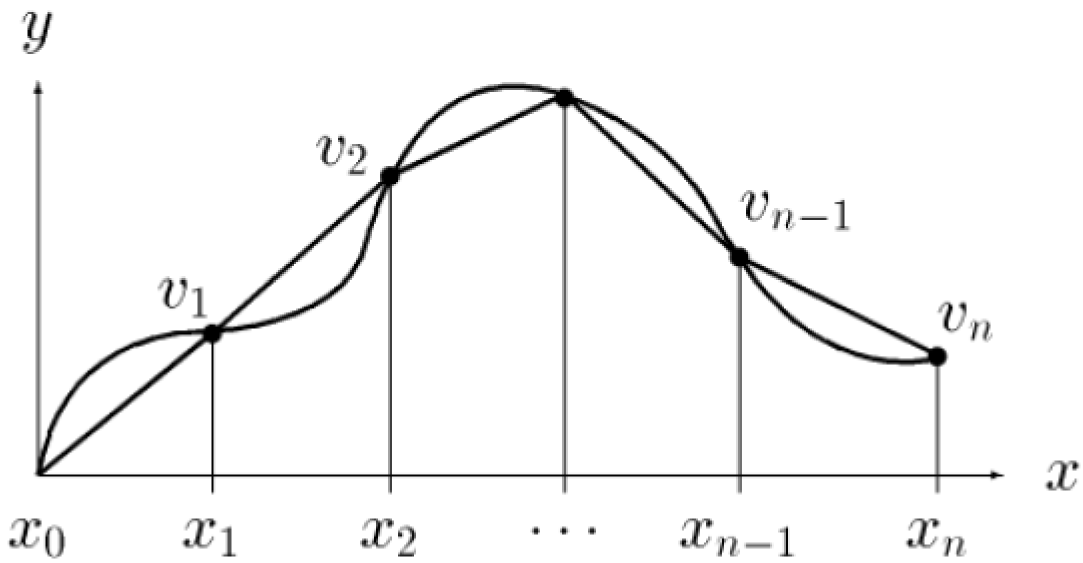
$$\forall x\in[0,1]\ |v(x)|=\left|\int\limits_0^x v'(t)dt\right|\le\sqrt{x}\sqrt{\int\limits_0^x|v'(t)|^2dt}\le\frac{1}{p_0}\|v\|_A.$$

$\Rightarrow\ \|v\|_{C[0,1]}\le p_0^{-1}\|v\|_A$, тоді фундаментальна в H_A послідовність буде фундаментальної в $C[0,1]$, отже її границя – неперервна функція.

Розіб'ємо відрізок $[0,1]$ на n частин (елементів) вузлами $0=x_0<x_1<\ldots<x_n=1$, на кожному елементі $[x_k,x_{k+1}]$ функцію $v\in H_A$ наблизимо лінійною функцією:

$$\tilde v(x)=\frac{x_{k+1}-x}{h_{k+1}}v(x_k)+\frac{x-x_k}{h_{k+1}}v(x_{k+1}),\ h_{k+1}=x_{k+1}-x_k$$

Очевидно, що $\tilde v(x)$ неперервна, сумована у квадраті й має сумовану у квадраті першу похідну, тобто $\tilde v\in H_A$, і однозначно визначається умовою $v(x_0)=0$ і довільними значеннями $v(x_1),v(x_2),...,v(x_n)$.



Означення. Множина таких функцій називається підпростором кусково-лінійних заповнень $V_n \subset H_A$ на сітці $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = 1$.

Теорема 1. *Нехай* $\tilde{v}(x)$ *– кусочно-лінійне заповнення на сітці* $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = 1$ *функції* $v(x) \in C^2[0,1]$*, тоді*

$$\|v - \tilde{v}\|_1 \le h(1-h)\|v''\|, \; h = \max h_k \qquad (7)$$

Доведення. На кожному елементі $[x_k, x_{k+1}]$ маємо

$$|v(x) - \tilde{v}(x)|^2 = \left| \int_{x_k}^{x} \big(v(t) - \tilde{v}(t)\big)' \, dt \right|^2 \le h_{k+1} \int_{x_k}^{x} |v'(t) - \tilde{v}(t)|^2 \, dt,$$

$$|v'(x) - \tilde{v}(x)|^2 = \left| \frac{1}{h_{k+1}} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \big(v'(x) - v'(t)\big) dt \right|^2 =$$

$$= \left| \frac{1}{h_{k+1}} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \left(\int_{t}^{x} v''(z) dz \right) dt \right|^2 \le h_{k+1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} |v''|^2 \, dz.$$

Якщо проинтегрировать ці нерівності й просумувати по всіх комірках, то одержимо

Теорема 2. *Послідовність підпросторів* $\{V_n\}_{n=1}^{\infty}$ *кусково-лінійних заповнень на сітках* $\omega_n = \left\{0 = x_0^{(n)} < x_1^{(n)} < \ldots < x_n^{(n)} = 1\right\}$, $h^{(n)} = \max\limits_k \left\{h_k^{(n)}\right\} \to 0$*, гранично щільна в* H_A.

Доведення. Нехай $v \in H_A$, тоді

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists v_\varepsilon(x) \in C^2[0,1], v_\varepsilon(0) = 0 : \|v - v_\varepsilon\|_1 \le \varepsilon / 2$.

Нехай $n : h^{(n)}\left(1 + h^{(n)}\right)\|v''_\varepsilon\| \le \varepsilon / 2$ та $\tilde{v}_{\varepsilon,n} \in V_n$ –

Интерполянт v_ε,

тоді по теоремі 1 маємо $\|v - \tilde{v}_{\varepsilon,n}\|_1 \le \varepsilon / 2$.

Використовуючи нерівність трикутника, одержимо
$\left\| v-\tilde{v}_{\varepsilon,n} \right\|_1 \le \left\| v-v_\varepsilon \right\|_1 + \left\| v_\varepsilon - \tilde{v}_{\varepsilon,n} \right\|_1 \le \varepsilon$,
тобто $\left\{ V_n \right\}_{n=1}^{\infty}$ щільна в H_A, так як $\| \ \|_1 \sim \| \ \|_A$.

Підпростір кусково-лагранжевих заповнень

Якщо на кожному елементі $\left[x_k, x_{k+1} \right]$ сітки $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = 1$ функція $v \in H_A$ має $\left(m+1 \right)$-у похідну, то її зручно наближати інтерполяційним поліномом Лагранжа ступеня m вигляду,

$$\tilde{v}\left(x \right) = \sum_{j=0}^{m} \frac{\left(x-y_0 \right)\ldots\left(x-y_{j-1} \right)\left(x-y_{j+1} \right)\ldots\left(x-y_m \right)}{\left(y_j-y_0 \right)\ldots\left(y_j-y_{j-1} \right)\left(y_j-y_{j+1} \right)\ldots\left(y_j-y_m \right)} v_{k+j/m}, \qquad (8)$$

де $y_j = x_{k+j/m} = x_k + jh_{k+1}/m$, $v_{k+j/m} = v\left(y_j \right)$.

Зауваження. Очевидно, що $\tilde{v}\left(x \right) \in C\left[0,1 \right]$, можна показати що $\tilde{v}\left(x \right) \in W_2^1\left(0,1 \right)$.

Означення. Множина функцій, визначених за формулою (8), називається підпростором кусково-лагранжевих заповнень порядку m на сітці
$0 = x_0 < x_{1/m} < \ldots < x_{(m-1)/m} < x_1 < \ldots < x_n = 1$.

Розмірність цього підпростору дорівнює числу всіх вузлів сітки:
$N = \left(m+1 \right) n - \left(n-1 \right)$.

Якщо додатково будемо вимагати, щоб $v\left(0 \right) = 0$, то розмірність на одиницю зменшається й ми одержимо $V_{nm} \subset H_A$.

Теорема 3. Нехай $\tilde{v}\left(x \right) \in V_{nm} \subset H_A$ – кусково-лагранжеве заповнення порядку m функції $v\left(x \right) \in C^{m+1}\left[0,1 \right]$, тоді

$$\left\| v-\tilde{v} \right\|_1 \le h^m \left(1+h \right) \left\| v^{(m+1)} \right\|, \; h = \max_k \left\{ h_k \right\}. \qquad (9)$$

Доведення. На кожному елементі $\left[x_k, x_{k+1} \right]$ функція $w\left(x \right) = v\left(x \right) - \tilde{v}\left(x \right)$ має як мінімум $m+1$ корінь, $w'\left(x \right)$ – m коренів, ..., $w^{(m)}\left(x \right)$ – 1 корінь. Тоді

$$\left| w^{(j)}\left(x \right) \right|^2 = \left| \int_{r_j}^{x} \left(w^{(j)}\left(t \right) \right)' dt \right|^2 \le h_{k+1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \left| w^{(j+1)}\left(t \right) \right|^2 dt$$

де $r_j \in \left[x_k, x_{k+1} \right]$ – корінь функції $w^{(j)}\left(x \right)$, $j = 0,1,...,m$.

Інтегруючи ці нерівності по комірці сітки, одержимо

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} \left| w^{(j)}\left(t \right) \right|^2 dt \le h_{k+1}^2 \int_{x_k}^{x_{k+1}} \left| w^{(j+1)}\left(t \right) \right|^2 dt \le \ldots \le h_{k+1}^{2(m+1-j)} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \left| w^{(m+1)}\left(t \right) \right|^2 dt .$$

Так як $w^{(m+1)}(x) = v^{(m+1)}(x)$ та $h_{k+1} < h$ то, підсумовуючи ці нерівності по всіх комірках, одержимо

$\left\| v - \tilde{v} \right\|_1^2 \le h^{2m}\left(1 + h^2\right)\left\| v^{(m+1)} \right\|^2 \Rightarrow$ (9).

Із цієї теореми й леми Вишика-Сеа випливає

Теорема 4. Якщо розв'язок задачі

$u \in H_A : (u,v)_A = \int\limits_0^1 fvdx \equiv f(v) \;\; \forall v \in H_A$, (5)

належить $W_2^{m+1}(0,1)$, то послідовність методу Гальоркіна:

$u^{(mn)} \in V_{nm} : \left(u^{(mn)}, v\right)_A = \int\limits_0^1 fvdx \equiv f(v) \;\; \forall v \in V_{nm}$, (6)

де $V_{nm} \subset H_A - nm$ -мірний підпростір кусково-лагранжевих заповнень порядку m, прямує до нього й має місце оцінка:

$\left\| u - u^{(nm)} \right\|_1 \le \sqrt{\gamma_1 / \gamma_0}\, h^m (1+h)\left\| u^{(m+1)} \right\| \le h^m (1+h)\left\| u \right\|_{m+1}$,

де γ_0 і γ_1– сталі в нерівностях еквівалентності норм $\| \;\; \|_A$ та $\| \;\; \|_1$.