

Лекція 4. Наближені задачі. Лема Вишика-Сea. Матриця жорсткості.

Отже, однорідні крайові задачі для диференціального рівняння $Lu = f$ з еліптичним симетричним і додатно визначеним оператором

$$Lu \equiv - \sum_{i,j=1}^m \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{i,j}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + a_0(x)u, \quad x = (x_1, \dots, x_m) \in \Omega$$

мають у відповідному енергетичному просторі H_A (поповнення області визначення оператора L з обліком крайових умов: задача Дирихле – $W_2^{1,0}(\Omega)$ або задача Неймана – $W_2^1(\Omega)$) еквівалентні проекційну:

$$u \in H_A : a(u, v) = f(v) \quad \forall v \in H_A, \quad (1)$$

і варіаційну:

$$u \in H_A : F(u) = \min_{v \in H_A} F(v), \quad F(v) \equiv a(v, v) - 2f(v), \quad (2)$$

формулювання, де $a(u, v)$ – скалярний добуток в H_A (що породжує норму, еквівалентну нормі $\| \cdot \|_1$ в $W_2^1(\Omega)$):

$$\exists 0 < \gamma_0 \leq \gamma_1 : \gamma_0 \|v\|_1^2 \leq a(v, v) \leq \gamma_1 \|v\|_1^2 \quad \forall v \in H_A, \quad (3)$$

$f(v)$ – лінійний неперервний функціонал в H_A :

$$\exists c_f > 0 : \|f(v)\|_{H_A} \leq c_f \|v\|_{H_A} \quad \forall v \in H_A. \quad (4)$$

У якості вправ для кожної з розглянутих на лекції 2 задач виписати в явному виді задачі (1) – (2) і постійні γ_0, γ_1 та c_f .

Зауваження. Билинейная форма $a(u, v)$ породжує лінійний самоспряжений оператор $A : H_A \rightarrow H_A$ по формулі

$(Au, v)_* = a(u, v) \quad \forall v \in H_A$, де $(u, v)_*$ – скалярний добуток в H_A , що визначає норму, еквівалентну нормі $\| \cdot \|_{H_A}$.

При $(u, v)_* = a(u, v)$ оператор $A = E$ – тотожному операторові.

Наближена задача

Складність розв'язку задачі (1) або (2) визначається перш за все нескінченномірністю простору H_A : якщо розв'язок u шукати у вигляді розкладу

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \varphi_k \quad \text{по базису } \{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}, \quad \text{то потрібно знайти нескінченне число невідомих } \{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}.$$

Виберемо в H_A n -мірний підпростір V_n з базисом $\{\varphi_k\}_{k=1}^n$ і наближений розв'язок

будемо шукати у вигляді $u^{(n)} = \sum_{k=1}^n \alpha_k^{(n)} \varphi_k^{(n)}$ як розв'язок наближеної проєкційної

задачі (метод Гальоркіна):

$$u^{(n)} \in V_n : a(u^{(n)}, v) = f(v) \quad \forall v \in V_n, \quad (5)$$

або наближеної варіаційної задачі (метод Ритца):

$$u^{(n)} \in V_n : F(u^{(n)}) = \min_{v \in V_n} F(v), \quad F(v) \equiv a(v, v) - 2f(v), \quad (6)$$

Зауваження. Тут ми відмовилися від класичної вимоги методів Гальоркіна й Ритца вкладеності підпросторів $\dots \subset V_n \subset V_{n+1} \subset \dots$.

Довести наступні твердження.

Теорема 1. Розв'язки наближених задач (5) і (6) існують, єдині й співпадають.

Теорема 2. Вектор $\alpha^{(n)} = (\alpha_1^{(n)}, \alpha_2^{(n)}, \dots, \alpha_n^{(n)})^T$ коефіцієнтів розв'язку

$u^{(n)} = \sum_{k=1}^n \alpha_k^{(n)} \varphi_k^{(n)}$ наближених задач (5) і (6) задовольняє системі лінійних

алгебраїчних рівнянь

$$A^{(n)} \alpha^{(n)} = f^{(n)}, \quad A^{(n)} \equiv \left(a_{i,j}^{(n)} = a(\varphi_j^{(n)}, \varphi_i^{(n)}) \right)_{i,j=1}^n = \left(A^{(n)} \right)^* > 0, \quad (7)$$

$$f^{(n)} = \left(f(\varphi_1^{(n)}), f(\varphi_2^{(n)}), \dots, f(\varphi_n^{(n)}) \right)^T.$$

Засіб для оцінки точності наближення надає

Лема Вишика-Сеа

Нехай $u \in H_A$ – розв'язок задачі $a(u, v) = f(v) \quad \forall v \in H_A$,

$u^{(n)} \in V_n \subset H_A$ – розв'язок задачі $a(u^{(n)}, v) = f(v) \quad \forall v \in V_n$, і виконуються умови (3)

–(4). Тоді

$$\|u - u^{(n)}\|_{H_A} \leq \|u - v^{(n)}\|_{H_A} \quad \forall v^{(n)} \in V_n \quad (8)$$

$$\|u - u^{(n)}\|_1 \leq \sqrt{\gamma_1/\gamma_0} \|u - v^{(n)}\|_1 \quad \forall v^{(n)} \in V_n \quad (9)$$

Доведення. Так як $\forall v^{(n)} \in V_n$

$$a(u - u^{(n)}, v^{(n)}) = a(u, v^{(n)}) - a(u^{(n)}, v^{(n)}) = f(v^{(n)}) - f(v^{(n)}) = 0, \text{ то}$$

$$\|u - u^{(n)}\|_{H_A}^2 = a(u - u^{(n)}, u - u^{(n)}) = a(u - u^{(n)}, u) - a(u - u^{(n)}, u^{(n)}) =$$

$$= a(u - u^{(n)}, u) - a(u - u^{(n)}, v^{(n)}) = a(u - u^{(n)}, u - v^{(n)}) \leq \|u - u^{(n)}\|_{H_A}.$$

\Rightarrow (8). Нерівність (9) є наслідком нерівностей (3) і (8).

Означення. Послідовність замкнених підпросторів $\{V_n \subset H_A\}_{n=1}^{\infty}$

називається гранично щільною в H_A , якщо

$$\forall u \in H_A \exists \{v^{(n)} \in V_n\}_{n=1}^{\infty} : \|u - v^{(n)}\|_{H_A} \rightarrow 0. \quad (10)$$

Теорема 3. Якщо $\{V_n \subset H_A\}_{n=1}^{\infty}$ щільна в H_A , то послідовність $\{u^{(n)} \in V_n\}_{n=1}^{\infty}$ методу Гальоркіна (5) (або Ритца (6)) збігається до розв'язку $u \in H_A$ проекційної задачі (1) (або варіаційної задачі (2)).

Доведення. Нехай $u \in H_A$ – розв'язок задачі $a(u, v) = f(v) \forall v \in H_A$.

З (10) випливає, що $\exists \{v^{(n)} \in V_n\}_{n=1}^{\infty} : \|u - v^{(n)}\|_{H_A} \rightarrow 0$.

Нехай $\{u^{(n)} \in V_n\}_{n=1}^{\infty}$ – розв'язки задач $a(u^{(n)}, v) = f(v) \forall v \in V_n$.

З (8) і (10) випливає, що $\|u - u^{(n)}\|_{H_A} \leq \|u - v^{(n)}\|_{H_A} \rightarrow 0$

Теорема доведена.

Наслідок. Якщо $\{V_n \subset H_A\}_{n=1}^{\infty}$ щільна в H_A , то наближення за методом Гальоркіна-Ритца $\{u^{(n)} \in V_n\}_{n=1}^{\infty}$ збігається до розв'язку $u \in H_A$ проекційної задачі (1) (або задачі (2)) в нормі $\|\cdot\|_1$. (Доведіть!).

Число обумовленості матриці жорсткості $A^{(n)}$

Матриця системи методу Гальоркіна або Ритца

$$A^{(n)} \alpha^{(n)} = f^{(n)}, \quad A^{(n)} \equiv \left(a_{i,j}^{(n)} = a(\varphi_j^{(n)}, \varphi_i^{(n)}) \right)_{i,j=1}^n = \left(A^{(n)} \right)^* > 0, \quad (7)$$

називається **матрицею жорсткості**.

Кожній функції $v = \sum_{k=1}^n v_k \varphi_k^{(n)} \in V_n$ поставимо у взаємно-однозначну відповідність

вектор $\bar{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)^T \in R^n$, тоді $\left(A^{(n)} \bar{v}, \bar{v} \right)_{R^n} = a(v, v)$.

З додатної визначеності оператора крайової задачі (лекція 2) випливає

$$\left(A^{(n)} \bar{v}, \bar{v} \right)_{R^n} = a(v, v) \geq \gamma(v, v) \equiv \gamma \left(M^{(n)} \bar{v}, \bar{v} \right)_{R^n},$$

де $M^{(n)} = \left\{ m_{i,j}^{(n)} = \left(\varphi_j^{(n)}, \varphi_i^{(n)} \right) \right\}_{i,j=1}^n$ – **матриця мас**.

Доведіть, що константи в нерівностях

$$\gamma \leq \frac{a(v, v)}{(v, v)} = \frac{\left(A^{(n)} \bar{v}, \bar{v} \right)_{R^n}}{\left(M^{(n)} \bar{v}, \bar{v} \right)_{R^n}} \leq \gamma^{(n)} \quad \forall v \in V_n \quad (11)$$

не залежать від вибору базису в V_n .

Нехай $\text{Sp}M^{(n)} \subset [\mu_1, \mu_n]$.

Доведіть, що $M^{(n)} = (M^{(n)})^* > 0, \mu_1 > 0$ та

$$\gamma\mu_1 \cdot (\bar{v}, \bar{v})_{R^n} \leq (A^{(n)}\bar{v}, \bar{v})_{R^n} \leq \gamma^{(n)}\mu_n \cdot (A^{(n)}\bar{v}, \bar{v})_{R^n} \quad \forall \bar{v} \in R^n, \quad (12)$$

тобто $\text{cond} A^{(n)} \leq (\gamma^{(n)}/\gamma)\text{cond} M^{(n)}$.

Означення. Сімейство базисів $\left\{ \left\{ \varphi_k^{(n)} \right\}_{k=1}^n \right\}_{n=1}^{\infty}$ називається стійким, якщо

$\exists \rho < \infty : \text{cond} M^{(n)} \leq \rho \quad \forall n \in N$.