Лекція 3. Формулювання еліптичних крайових задач

Однорідна крайова задача Дирихле:

Знайти $u \in C^2(\overline{\Omega}) \subset L_2(\Omega)$:

$$\left.\begin{aligned} &Lu \equiv -\sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{i,j}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + a_0(x)u = f(x),\ x \in \Omega \\ &u(x)\big|_{\Gamma} = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

де $a_{i,j}(x) = a_{j,i}(x) \in C^1(\overline{\Omega}), a_0(x) \in C(\overline{\Omega})$ - задані, $\Omega \subset R^m$ – обмежена область із кусково-гладкою границею $\Gamma \equiv \partial\Omega$.

Операторне формулювання:

для заданої $f \in C^2(\overline{\Omega}) \subset L_2(\Omega)$

знайти $u(x) \in D_1(L) \equiv \left\{v(x) \in C^2(\overline{\Omega}) : v(x)\big|_{\Gamma} = 0\right\}:\ L_1 u = f$, (2)

де оператор

$$L_1 \equiv L : D(L_1) \equiv D_1(L) \subset L_2(\Omega) \to C(\overline{\Omega}) \subset L_2(\Omega)$$

- лінійний, еліптичний (нерівність (2.2)), симетричний (задача (2.4)), додатно визначений (нерівність (2.7)) при $a_0(x) \geq 0$ (леми 2.1 і 2.2).

Енергетичний простір $W_2^{1,0}(\Omega)$ оператора L_1

- Поповнення $D_1(L) \equiv \left\{v(x) \in C^2(\overline{\Omega}) : v(x)\big|_{\Gamma} = 0\right\}$ за нормою

$$\|v\|_{L_1} \equiv \sqrt{a(v,v)}\ ,\ a(u,v) = \int_{\Omega}\left(\sum_{i,j=1}^{m} a_{i,j}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_i} + a_0 uv\right)dx. \qquad (3)$$

З теореми 1.1 випливає, що $D(L_1) \subset W_2^{1,0}(\Omega) \subset L_2(\Omega)$ (перевірити!).

Зауваження. $W_2^{1,0}(\Omega)$ - це підпростір рівних нулю на границі області функцій простору С.Л. Соболєва $W_2^1(\Omega)$ функцій, інтегровних по Лебегу з квадратом разом зі своїми першими похідними, з наступними нормою й скалярним добутком:

$$\|v\|_1 \equiv \sqrt{(v,v)_1}\ ,\ (u,v)_1 = \int_{\Omega}\left(\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial u}{\partial x_k}\frac{\partial v}{\partial x_k} + uv\right)dx. \qquad (3)$$

Теорема 1. *Якщо* $c_1 = \min_{i,j=1,\dots,m;\, x\in\Omega}\left\{a_{i,j}(x), a_0(x)\right\} < \infty$, $c_0 = \min_{x\in\Omega} a_0(x) \geq 0$, *то в* $D(L_1)$ *(а отже і в* $W_2^{1,0}(\Omega)$*) норми* $\|v\|_{L_1}$ *та* $\|v\|_1$ *еквівалентні*

$$\exists \gamma_0 > 0, \exists \gamma_1 > 0 : \gamma_0\|v\|_1 \leq \|v\|_{L_1} \leq \gamma_1\|v\|_1.$$

Доведення. Використовуючи нерівності (2.2) (λ_0 постійна еліптичності оператора L) і (2.8) (c – константа нерівності Фридрихса при $\Gamma' = \Gamma$), $\forall v \in D(L_1)$ одержимо

$$\|v\|_{L_1}^2 \equiv \int_{\Omega}\left(\sum_{i,j=1}^{m} a_{i,j}\frac{\partial v}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_i} + a_0|v|^2\right)dx \geq \lambda_0\int_{\Omega}\sum_{k=1}^{m}\left|\frac{\partial v}{\partial x_k}\right|^2 dx,$$

$$\|v\|_{L_1}^2 \geq \int_{\Omega}\left(\sum_{k=1}^{m}\left|\frac{\partial v}{\partial x_k}\right|^2 + c_0|v|^2\right)dx \geq \left(\lambda_0 / c + c_0\right)\int_{\Omega}|v|^2 dx,$$

або

$$\|v\|_{L_1}^2 \ge \frac{1}{2}\min\left\{\lambda_0, \left(\lambda_0 / c + c_0\right)\right\}\left(\int_\Omega \sum_{k=1}^m \left|\frac{\partial v}{\partial x_k}\right|^2 dx + \int_\Omega |v|^2 dx\right) \equiv \gamma_0^2 \|v\|_1^2 .$$

З іншої сторони:

$$\|v\|_{L_1}^2 \le c_1 \int_\Omega \left(\sum_{i,j=1}^m \left|\frac{\partial v}{\partial x_j}\right|\left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right| + |v|^2\right) dx \le c_1 \int_\Omega \left(2\sum_{i,j=1}^m \left(\left|\frac{\partial v}{\partial x_j}\right|^2 + \left|\frac{\partial v}{\partial x_j}\right|^2\right) + |v|^2\right) dx \le 4mc_1 \|v\|_1^2 \equiv \gamma_1^2 \|v\|_1^2$$

.

Теорема 2. $\exists c > 0 : \int_\Gamma |u|^2 ds \le c\|u\|_1^2 \quad \forall u \in C^1\left(\overline{\Omega}\right)$. (5)

Доведення. Доведемо (5) для випадку, коли Ω - одиничний квадрат:

$$|u(x,0)|^2 = \left|u(x,y) - \int_0^y \frac{\partial u(x,\tilde{y})}{\partial \tilde{y}} d\tilde{y}\right|^2 \le 2|u(x,y)|^2 + 2\int_0^1 \left|\frac{\partial u(x,\tilde{y})}{\partial \tilde{y}}\right|^2 d\tilde{y},$$

або, інтегруючи по Ω:

$$\int_0^1 |u(x,0)|^2 dx \le 2\int_0^1\int_0^1 |u(x,y)|^2 dxdy + 2\int_0^1\int_0^1 \left|\frac{\partial u(x,\tilde{y})}{\partial \tilde{y}}\right|^2 d\tilde{y}dx .$$

Аналогічно:

$$\int_0^1 |u(x,1)|^2 dx \le 2\int_0^1\int_0^1 |u(x,y)|^2 dxdy + 2\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \left|\frac{\partial u(x,\tilde{y})}{\partial \tilde{y}}\right|^2 d\tilde{y}dx$$

$$\int_0^1 |u(0,y)|^2 dy \le 2\int_0^1\int_0^1 |u(x,y)|^2 dxdy + 2\int_0^1\int_0^1 \left|\frac{\partial u(\tilde{x},y)}{\partial \tilde{x}}\right|^2 d\tilde{x}dy$$

$$\int_0^1 |u(1,y)|^2 dy \le 2\int_0^1\int_0^1 |u(x,y)|^2 dxdy + 2\int_0^1\int_0^1 \left|\frac{\partial u(\tilde{x},y)}{\partial \tilde{x}}\right|^2 d\tilde{x}dy$$

Підсумовуючи останні чотири нерівності, одержимо (5) з константою $c = 8$.

Наслідок. Оператор сліду $tr_\Gamma : W_2^1(\Omega) \to L_2(\Omega)$ неперервний.

Проекційне формулювання:

для заданої $f(x) \in L_2(\Omega)$ знайти $u(x) \in W_2^{1,0}(\Omega)$:

$$a(u,v) \equiv \int_\Omega \left(\sum_{i,j=1}^m a_{i,j} \frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_i} + a_0 uv\right) dx = \int_\Omega fv dx \qquad (6)$$

$\forall v \in W_2^{1,0}(\Omega)$.

Однорідні друга й третя крайові задачі

знайти $u(x) \in C^2\left(\overline{\Omega}\right) \subset L_2(\Omega)$:

$$\left.\begin{aligned} &Lu \equiv -\sum_{i,j=1}^m \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{i,j}(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_j}\right) + a_0(x)u(x) = f(x),\ x \in \Omega \\ &\left.\left(\frac{\partial u(x)}{\partial N} + \sigma(x)u(x)\right)\right|_\Gamma = 0,\ \frac{\partial u(x)}{\partial N} = \sum_{i,j=1}^m a_{i,j}\frac{\partial u}{\partial x_j}\cos\left(\overline{n}, \overline{x}_i\right) \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

де $a_{i,j}(x)=a_{j,i}(x)\in C^1(\overline{\Omega}), a_0(x), f(x)\in C(\overline{\Omega})$, $\sigma(x)\in C(\Gamma)$ - задані, $\Omega\subset R^m$ – обмежена область із границею $\Gamma\equiv\partial\Omega$.

Якщо $\sigma(x)\equiv 0$ це друга задача, при $\sigma(x)\neq 0$ - третя крайова задача.

Операторная формулювання:

для заданої $f(x)\in C(\overline{\Omega})\subset L_2(\Omega)$ знайти

$u(x)\in D_3(L)\equiv\left\{v\in C^2(\overline{\Omega}):\left[\frac{\partial v}{\partial N}+\sigma v\right]\Big|_\Gamma=0\right\}: L_3u=f$,(8)

де оператор $L_3\equiv L: D(L_3)\equiv D_3(L)\subset L_2(\Omega)\to C(\overline{\Omega})\subset L_2(\Omega)$

- лінійний, еліптичний (нерівність (2.2)), симетричний (задача (2.4)), додатно визначений (нерівність (2.7)) при $a_0(x)\geq c_0>0$ або при $\sigma(x)\geq\sigma_0>0$ (лема 2.5).

Енергетичний простір $W_2^1(\Omega)$ оператора L_3

- Поповнення $D(L_3)\equiv\left\{v(x)\in C^2(\overline{\Omega}):\left[\frac{\partial v}{\partial N}+\sigma v\right]\Big|_\Gamma=0\right\}$ в нормі

$\|v\|_{L_3}\equiv\sqrt{a(v,v)}$, $a(u,v)=\int\limits_\Omega\left(\sum\limits_{i,j=1}^m a_{i,j}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_i}+a_0uv\right)dx+\int\limits_\Gamma\sigma uvds$. (9)

З теореми 1.1 випливає, що $D(L_3)\subset W_2^1(\Omega)\subset L_2(\Omega)$ (перевірити!).

Теорема 3. *Якщо* $c_1=\min\limits_{i,j=1,\dots,m;x\in\Omega}\{a_{i,j}(x),a_0(x)\}<\infty$, $c_0=\min\limits_{x\in\Omega}a_0(x)\geq 0$, $\sigma_0=\min\limits_{x\in\Gamma}\sigma(x)\geq 0$, $\min\{a_0,\sigma_0\}>0$, *то в* $C^2(\overline{\Omega})$ *(а значить і в* $D(L_3)$*) норми* $\|\ \|_{L_3}$ *й* $\|\ \|_1$ *еквівалентні:*

Доведення практично збігається з доведенням теореми 1 і залишається читачеві.

Зауваження. $W_2^1(\Omega)$- це простір С.Л. Соболєва функцій, інтегровних по Лебегу з квадратом разом зі своїми першими похідними, що є поповненням $C^2(\overline{\Omega})$ в нормі $\|v\|_1=\sqrt{\int\limits_\Omega\left(|\nabla v|^2+|v|^2\right)dx}$, а ми поповнювали множину функцій, що задовольняють крайовій умові, $D_3(L)\subset C^2(\overline{\Omega})$. Так як норми $\|\ \|_{L_3}$ й $\|\ \|_1$ по теоремі 3 еквівалентні, то поповнення множин $D(L_3)$ і $C^2(\overline{\Omega})$ будуть співпадати, якщо $D(L_3)$ щільна в $C^2(\overline{\Omega})$.

Теорема 4.

$D(L_3)$ *щільна в* $C^2(\overline{\Omega})$ *за нормою* $\|\ \|_1$,

тобто $\forall v\in C^2(\overline{\Omega})\,\exists\{v_\varepsilon\in D(L_3)\}:\|v_\varepsilon-v\|_1\to 0$ при $\varepsilon\to 0$.

Доведення для $\Omega=(0,1)$. Нехай $v\in C^2(\overline{\Omega})$ *та* $v_\varepsilon=v+\alpha_\varepsilon$,

Де

$$\alpha_\varepsilon(x)=\begin{cases}\left(a_\varepsilon^0\right)^{-1}(\varepsilon-x)^3\left(v'(0)-\sigma(0)v(0)\right), x\in[0,\varepsilon], a_\varepsilon^0=\varepsilon^2\left(3+\varepsilon\sigma(0)\right)\\ 0,\ x\in[\varepsilon,1-\varepsilon]\\ \left(b_\varepsilon^0\right)^{-1}(1-\varepsilon-x)^3\left(v'(1)+\sigma(1)v(1)\right), x\in[1-\varepsilon,1], b_\varepsilon^0=\varepsilon^2\left(3+\varepsilon\sigma(1)\right)\end{cases}$$

Тоді (перевірити!) $\|v_\varepsilon - v\|_1 \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

Проекційне формулювання:

для заданої $f(x)\in L_2(\Omega)$ знайти $u(x)\in W_2^{1,0}(\Omega)$:

$$a(u,v)\equiv\int_\Omega\left(\sum_{i,j=1}^m a_{i,j}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_i}+a_0uv\right)dx+\int_\Gamma \sigma uvds=\int_\Omega fvdx\equiv f(v) \quad (10)$$

$\forall v\in W_2^1(\Omega)$.

Зауваження. На функції енергетичного простору оператора другої або третьої крайових задач ніяких умов на границі не накладається, але якщо розв'язок проекционной задачі (10) гладкий (з $D(L_3)$), то він є розв'язком операторной задачі (8) і автоматично задовольняє граничній умові. Така гранична умова називається природньою.