Лекція 2. Еліптичний диференціальний оператор другого порядку

$$Lu \equiv -\sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{i,j}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + a_0(x)u = f(x),\ x = (x_1,...,x_m) \in \Omega \qquad (1)$$

де $a_{i,j}(x) = a_{j,i}(x) \in C^1(\bar{\Omega}), a_0(x) \in C(\bar{\Omega})$, $\Omega \subset R^m$ – обмежена область із кусково-гладкою границею $\Gamma \equiv \partial\Omega$.

Очевидно, що в якості $D(L)$ можна взяти $C^2(\bar{\Omega}) \subset L_2(\Omega)$ і L – лінійний оператор з $C^2(\bar{\Omega})$ в $C(\bar{\Omega}) \subset L_2(\Omega)$.

Оператор L називається еліптичним, якщо

$$\exists \lambda_0 > 0 : \forall x \in \Omega\ \forall \xi \in R^m\ \sum_{i,j=1}^{m} a_{i,j}(x)\xi_i\xi_j \geq \lambda_0 \sum_{k=1}^{m} \xi_k^2 . \qquad (2)$$

Для будь-яких функцій $u, v \in C^2(\bar{\Omega})$ вірна формула Гріна:

$$\int_\Omega (Lu)v dx = \int_\Omega \left(\sum_{i,j=1}^{m} a_{i,j}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_i} + a_0 uv \right) dx - \int_\Gamma \left(\sum_{i,j=1}^{m} a_{i,j}\frac{\partial u}{\partial x_j}\cos(\bar{n}, \bar{x}_i) \right) v ds,$$

що є наслідком застосування формули Гауса-Остроградського:

$$\int_\Omega \frac{\partial v}{\partial x_i} dx = \int_\Gamma w \cos(\bar{n}, \bar{x}_i) ds \text{ для } w = a_{i,j}\frac{\partial u}{\partial x_j} v,$$

де $\bar{n}(x)$ – вектор зовнішньої нормалі в точці $x \in \Gamma$, $\bar{x}_i$ – орт і-тої вісі.

Білінійна форма (перевірити!)

$$a(u,v) = \int_\Omega \left(\sum_{i,j=1}^{m} a_{i,j}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_i} + a_0 uv \right) dx \quad (3)$$

симетрична ($a(u,v) = a(v,u)\ \forall u, v \in D(L)$), тому що $a_{i,j}(x) = a_{j,i}(x)$.

Довести, що оператор L буде симетричним (тобто $(Lu, v) = (u, Lv)$ на лінійних множинах функцій):

$$D_1(L) \equiv \left\{ v(x) \in C^2(\bar{\Omega}) : v(x)\big|_\Gamma = 0 \right\}, \quad (4)$$

$$D_2(L) \equiv \left\{ u(x) \in C^2(\bar{\Omega}) : \frac{\partial u(x)}{\partial N} \equiv \sum_{i,j=1}^{m} a_{i,j}\frac{\partial u}{\partial x_j}\cos(\bar{n}, \bar{x}_i)\Big|_\Gamma = 0 \right\} \quad (5)$$

- похідна по нормалі дорівнює нулю,

$$D_3(L) \equiv \left\{ u(x) \in C^2(\bar{\Omega}) : \left[\frac{\partial u(x)}{\partial N} + \sigma(x)u(x) \right]\Big|_\Gamma = 0 \right\} \quad (6)$$

для заданого $\sigma(x) \in C(\Gamma)$.

Додатна визначеність оператора $L : D_1(L) \to L_2(\Omega)$

Потрібно знайти або довести існування постійної $\gamma = \gamma(\{a_{i,j}\}, a_0, \Omega) > 0$:

$$(Lv,v)=\int_\Omega\left(\sum_{i,j=1}^{m}a_{i,j}\frac{\partial v}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_i}+a_0v^2\right)dx\ge\gamma\int_\Omega|v|^2\,dx\equiv\gamma\|v\|^2 \quad (7)$$

для будь-якої функції з $D_1(L)\equiv\left\{v(x)\in C^2(\bar{\Omega}):v(x)\big|_\Gamma=0\right\}$.

Лема 1. *Якщо* $\gamma=\min_{x\in\Omega}\{a_0(x)\}>0$*, то еліптичний оператор* $L:D_1(L)\to L_2(\Omega)$ *додатно визначений із цією константою.*

Доведення.

Використовуючи умови теореми й еліптичності оператора (2), одержимо

$$(Lv,v)=\int_\Omega\left(\sum_{i,j=1}^{m}a_{i,j}\frac{\partial v}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_i}+a_0v^2\right)dx\ge\int_\Omega\left(\lambda_0\sum_{k=1}^{m}\left|\frac{\partial v}{\partial x_k}\right|^2+a_0v^2\right)dx\ge\gamma\int_\Omega|v|^2\,dx\equiv\gamma\|v\|^2.$$

$a_0(x)\equiv0$ для оператора $L=-\Delta\equiv-\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+...+\frac{\partial^2}{\partial x_m^2}\right)$, він додатно визначений як оператор $L:D_1(L)\to L_2(\Omega)$.

Для широкого класу областей Ω вірна

Теорема 1. (узагальнена нерівність Фридрихса)

$\exists c>0:\forall v\in C^1(\bar{\Omega})$ справедлива нерівність

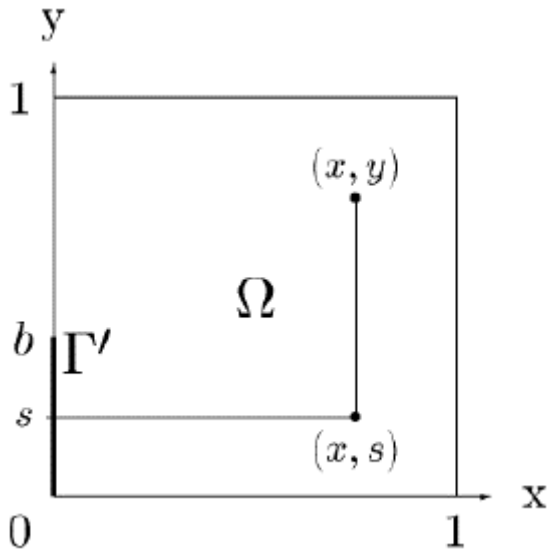
$$\int_\Omega|v|^2\,dx\le c\left\{\int_\Omega\sum_{k=1}^{m}\left|\frac{\partial v}{\partial x_k}\right|^2dx+\int_{\Gamma'}v^2ds\right\}, \quad (8)$$

де $\Gamma'\subset\Gamma, mes\,\Gamma'>0$.

Доведення. Приведемо доведення для випадку, коли Ω – одиничний квадрат:

Нехай $s=by$, тоді

$$v(x,y)=v(x,s)+\int_s^y\frac{\partial v(x,\mu)}{\partial\mu}d\mu=v(0,s)+\int_0^x\frac{\partial v(\eta,s)}{\partial\eta}d\eta+\int_s^y\frac{\partial v(x,\mu)}{\partial\mu}d\mu.$$



Зведемо ліву й праву частину цієї рівності у квадрат і проінтегруємо по Ω:

так як

$$\left(a_1+a_2+a_3\right)^2 \le 3\left(a_1^2+a_2^2+a_3^2\right), \left(a_1\right)^2 = \left[v\left(0,s\right)\right]^2,$$

$$\left(a_2\right)^2 = \left(\int_0^x \frac{\partial v\left(\eta,s\right)}{\partial \eta} d\eta\right)^2 \le x\int_0^x \left|\frac{\partial v\left(\eta,s\right)}{\partial \eta}\right|^2 d\eta \le \int_0^1 \left|\frac{\partial v\left(\eta,s\right)}{\partial \eta}\right|^2 d\eta,$$

$$\left(a_3\right)^2 = \left(\int_s^x \frac{\partial v\left(x,\mu\right)}{\partial \mu} d\mu\right)^2 \le \left(y-s\right)\int_s^y \left|\frac{\partial v\left(x,\mu\right)}{\partial \mu}\right|^2 d\mu \le \int_0^1 \left|\frac{\partial v\left(x,\mu\right)}{\partial \mu}\right|^2 d\mu,$$

$$\int_0^1\int_0^1 \left(a_1\right)^2 dxdy = \int_0^1\int_0^1 \left|v\left(0,s\right)\right|^2 dxdy = b^{-1}\int_0^1 \left|v\left(0,s\right)\right|^2 ds,$$

$$\int_0^1\int_0^1 \left(a_2\right)^2 dxdy \le \int_0^1\int_0^1 \left[\int_0^1 \left|\frac{\partial v\left(\eta,s\right)}{\partial \eta}\right|^2 d\eta\right] dxdy = b^{-1}\int_0^1\int_0^1 \left|\frac{\partial v\left(\eta,s\right)}{\partial \eta}\right|^2 d\eta ds,$$

$$\int_0^1\int_0^1 \left(a_3\right)^2 dxdy \le \int_0^1\int_0^1 \left[\int_0^1 \left|\frac{\partial v\left(x,\mu\right)}{\partial \mu}\right|^2 d\mu\right] dxdy = \int_0^1\int_0^1 \left|\frac{\partial v\left(x,\mu\right)}{\partial \mu}\right|^2 d\mu dx,$$

то

$$\iint_\Omega |v|^2 dxdy \le 3\left(b^{-1}\int_0^1 \left|v\left(0,s\right)\right|^2 ds + b^{-1}\int_0^1\int_0^1 \left|\frac{\partial v\left(\eta,s\right)}{\partial \eta}\right|^2 d\eta ds + \int_0^1\int_0^1 \left|\frac{\partial v\left(x,\mu\right)}{\partial \mu}\right|^2 d\mu dx\right) \le$$

$$\le 3b^{-1}\left(\int_{\Gamma'} |v|^2 ds + \iint_\Omega \left(\left|v_x\right|^2 + \left|v_y\right|^2\right) dxdy\right),$$

що й треба було довести.

Лема 2. *Якщо* $c_0 = \min\limits_{x\in\Omega}\left\{a_0\left(x\right)\right\} > 0$, c *– константа нерівності Фридрихса (8) при* $\Gamma' = \Gamma$, $\gamma = \lambda_0 / c + c_0 > 0$, *(де* λ_0 *– постійна з (2)),*

то еліптичний оператор $L: D_1\left(L\right) \to L_2\left(\Omega\right)$ *додатно визначений із константою* γ.

Доведення залишається в якості вправи.

Позитивна визначеність оператора $L: D_2\left(L\right) \to L_2\left(\Omega\right)$

Потрібно знайти або довести існування постійної $\gamma = \gamma\left(\left\{a_{i,j}\right\}, a_0, \Omega\right) > 0$:

$$\left(Lv, v\right) = \int_\Omega \left(\sum_{i,j=1}^m a_{i,j}\frac{\partial v}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_i} + a_0 v^2\right) dx \ge \gamma\int_\Omega |v|^2 dx \equiv \gamma\left\|v\right\|^2 \quad (9)$$

для будь-якої функції з $D_2\left(L\right) \equiv \left\{v\left(x\right) \in C^2\left(\bar{\Omega}\right): \left.\frac{\partial v\left(x\right)}{\partial N}\right|_\Gamma = 0\right\}$.

Лема 3. *Якщо* $\gamma = \min\limits_{x\in\Omega}\left\{a_0\left(x\right)\right\} > 0$, *то еліптичний оператор* $L: D_2\left(L\right) \to L_2\left(\Omega\right)$

додатно визначений із цією константою γ.

Доведення повторює доведення леми 1.

У випадку $a_0(x) \equiv 0$ оператор $L \equiv -\sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{i,j}(x) \frac{\partial}{\partial x_j} \right)$ в $D_2(L)$ має ядро

$Ker\, L = \{v(x) \equiv const\}$. Визначимо в $D_2(L)$ підпростір

$$(Ker\, L)^{\perp} \equiv \left\{ v(x) \in C^2(\bar{\Omega}) : \left. \frac{\partial v(x)}{\partial N} \right|_{\Gamma} = 0, (1, v) \equiv \int_{\Omega} v(x)\, dx \right\}. \quad (10)$$

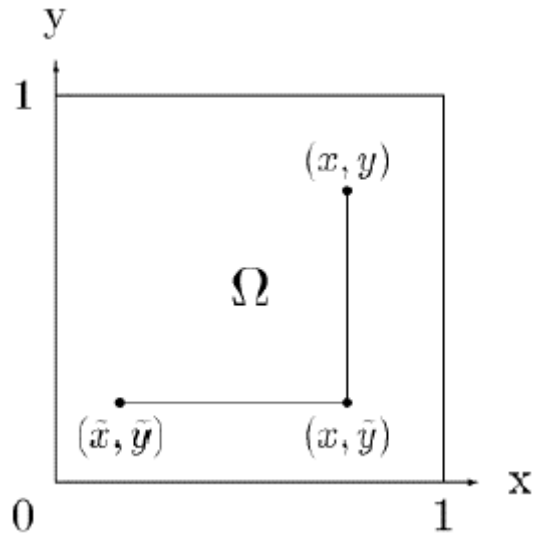
Для широкого класу областей Ω слушна

Теорема 2. (нерівність Пуанкаре)

$\exists c > 0 : \forall v \in C^1(\bar{\Omega})$ справедлива нерівність

$$\int_{\Omega} |v|^2\, dx \le c \left\{ \int_{\Omega} \sum_{k=1}^{m} \left| \frac{\partial v}{\partial x_k} \right|^2 dx + \left(\int_{\Omega} v(x)\, d\Omega \right)^2 \right\}, \quad (11)$$

Доведення наведемо для випадку, коли Ω – одиничний квадрат:



$$v(x,y) = v(x,\tilde{y}) + \int_{\tilde{y}}^{y} \frac{\partial v(x,\mu)}{\partial \mu} d\mu = v(\tilde{x},\tilde{y}) + \int_{\tilde{x}}^{x} \frac{\partial v(\eta,\tilde{y})}{\partial \eta} d\eta + \int_{\tilde{y}}^{y} \frac{\partial v(x,\mu)}{\partial \mu} d\mu .$$

Проінтегруємо по $\tilde{x}, \tilde{y} \in \Omega$:

$$v(x,y) = \iint_{\Omega} v(\tilde{x},\tilde{y})\, d\tilde{x} d\tilde{y} + \iint_{\Omega} \left(\int_{\tilde{x}}^{x} \frac{\partial v(\eta,\tilde{y})}{\partial \eta} d\eta \right) dx dy + \int_{0}^{1} \left(\int_{\tilde{y}}^{y} \frac{\partial v(x,\mu)}{\partial \mu} d\mu \right) d\tilde{y}$$

Піднесемо ліву й праву частину цієї рівності в квадрат:

т.к. $(a_1 + a_2 + a_3)^2 \le 3\left(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2\right)$, $(a_1)^2 = \left(\iint_{\Omega} v(\tilde{x},\tilde{y})\, d\tilde{x} d\tilde{y} \right)^2$,

$$(a_2)^2 = \left(\iint_{\Omega} \left(\int_{\tilde{x}}^{x} \frac{\partial v(\eta,\tilde{y})}{\partial \eta} d\eta \right) d\tilde{x} d\tilde{y} \right)^2 \le \iint_{\Omega} \left| \frac{\partial v(\eta,\tilde{y})}{\partial \eta} \right|^2 d\eta d\tilde{y},$$

$$(a_3)^2 = \left(\int_{0}^{1} \left(\int_{\tilde{y}}^{y} \frac{\partial v(x,\mu)}{\partial \mu} d\mu \right) d\tilde{y} \right)^2 \le \int_{0}^{1} \left| \frac{\partial v(x,\mu)}{\partial \mu} \right|^2 d\mu,$$ то

$$\iint\limits_{\Omega} |v|^2 \, dxdy \le 3\left(\left(\iint\limits_{\Omega} v(\tilde{x},\tilde{y})\, d\tilde{x}d\tilde{y} \right)^2 + \iint\limits_{\Omega} \left| \frac{\partial v(\eta,\tilde{y})}{\partial \eta} \right|^2 d\eta d\tilde{y} + \int\limits_0^1 \left| \frac{\partial v(x,\mu)}{\partial \mu} \right|^2 d\mu \right).$$

Інтегруючи цю нерівність по $x, y \in \Omega$, одержимо нерівність (11).

Лема 4. Якщо $a_0(x) \equiv 0$, c – константа нерівності Пуанкаре (11), то еліптичний оператор $L : (Ker\, L)^{\perp} \to L_2(\Omega)$ *додатно* визначений константою $\gamma = \lambda_0 / c > 0$ (де λ_0 – постійна з (2)).

Доведення залишається в якості вправи.

Додатна визначеність оператора $L : D_3(L) \to L_2(\Omega)$

Потрібно знайти або довести існування постійної $\gamma = \gamma\left(\{a_{i,j}\}, a_0, \sigma, \Omega\right) > 0$:

$$(Lv, v) = \int\limits_{\Omega} \left(\sum_{i,j=1}^{m} a_{i,j} \frac{\partial v}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i} + a_0 v^2 \right) dx + \int\limits_{\Gamma} \sigma v^2 ds \ge \gamma \int\limits_{\Omega} |v|^2 \, dx \qquad (12)$$

для будь-якої функції з $D_3(L) \equiv \left\{ v(x) \in C^2(\bar{\Omega}) : \left(\frac{\partial v(x)}{\partial N} + \sigma(x) v(x) \right)\Big|_{\Gamma} = 0 \right\}$.

Лема 5.

Якщо $c_0 = \min\limits_{x \in \Omega} \{a_0(x)\}$, $\sigma_0 = \min\limits_{s \in \Gamma} \{\sigma(s)\}$, c *– константа нерівності Фридрихса (8) при* $\Gamma' = \Gamma$, *то оператор* $L : D_3(L) \to L_2(\Omega)$ *додатно визначений із константою* $\gamma = \min\{\lambda_0, \sigma_0\} / c + c_0 > 0$. *(де* λ_0 *– постійна з (2)).*

Доведення.

Використовуючи: умови теореми, еліптичність оператора (2), нерівність Фридрихса, одержимо

$$(Lv, v) \ge \int\limits_{\Omega} \left(\lambda_0 \sum_{k=1}^{m} \left| \frac{\partial v}{\partial x_k} \right|^2 + c_0 v^2 \right) dx + \sigma_0 \int\limits_{\Gamma} |v|^2 \, ds \ge \left(\min\{\lambda_0, \sigma_0\} / c + c_0 \right) \int\limits_{\Omega} |v|^2 \, dx,$$

що і треба було довести.