Лекція 1. Гільбертові простори й рівняння в них

Наша мета – побудувати метод наближеного розв'язування крайових задач для еліптичного рівняння

$$Lu \equiv -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{i,j}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + a_0(x)u = f(x),\ x = (x_1,...,x_n) \in \Omega$$
,

де Ω - обмежена область з R^n,

використовуючи інтегральну тотожність $\int_\Omega (Lu - f)v(x)dx = 0$, яка справедлива для будь-якої достатньо гладкої функції $v(x)$. Ми завжди будемо припускати, що коефіцієнти, права частина та розв’язок диференціального рівняння достатньо гладкі дійсні функції, та позначати через $(u,v) \equiv \int_\Omega u(x)v(x)dx$ скалярний добуток в гільбертовому просторі $L_2(\Omega)$ функцій, квадрат яких інтегрований за Лебегом, з нормою $\|u\| \equiv \sqrt{(u,u)}$.

Оператор диференціального рівняння можна розглядати як відображення A множини $D(A) \subset L_2(\Omega)$ двічі неперервно дифференційовних функцій (з виконанням крайових умов) в $L_2(\Omega)$. У такий спосіб ми приходимо до операторної постановки крайової задачі в гільбертовому просторі $H = L_2(\Omega)$: $Au = f$.

Якщо в H вибрати базис $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$, то наближений розв'язок цього рівняння можна шукати у вигляді $u^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^{(n)}\varphi_k$, визначаючи параметри $\{\alpha_k^{(n)}\}_{k=1}^{n}$ з умов $\left(Au^{(n)} - f, \varphi_k\right) = 0,\ k = \overline{1,n}$. Такий спосіб розв'язку операторного рівняння називається *методом Гальоркіна*.

Предгільбертів простір

– це множина дійсних чисел D

зі скалярним добутком $(u,v): D \times D \to R$:

1. $(v,v) \ge 0;\ \ (v,v) = 0 \Leftrightarrow v = 0$
2. $(u,v) = (v,u)$
3. $(\alpha u + \beta v, w) = \alpha(u,w) + \beta(v,w),\ \forall u,v,w \in D,\ \forall \alpha,\beta \in R$

і нормою $\|u\|: D \to R$:

1. $\|v\| \ge 0;\ \|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$
2. $\|\alpha v\| = |\alpha|\|v\|$
3. $\|u+v\| \le \|u\| + \|v\|$
4. $|(u,v)| \le \|u\|\|v\|,\ \forall u,v \in D,\ \forall \alpha,\beta \in R$

Поповнення предгільбертого простору до гільбертового

– це лінійна множина H класів еквівалентності фундаментальних за Коші послідовностей $\{v_n \in D\}_{n=1}^{\infty}$, тобто $\|v_n - v_m\| \to 0$ при $n,m \to \infty$ та $\{u_n\} \sim \{v_n\}$, якщо

$\|u_n - v_m\| \to 0$.

Скалярний добуток і норма в H визначаються по формулах $(u,v) = \lim\limits_{n,m\to\infty}(u_n, v_m)$, $\|v\| = \lim\limits_{n\to\infty}\|v_n\|$, де $\{u_n\},\{v_n\}$ – будь-які представники елементів (класів) $u,v \in H$ (від їхнього вибору межі не залежать). Простір H замкнений (повний).

$D \subset H$ у тому розумінні, що кожному елементу $v \in D$ можна співставити стаціонарну послідовність $\{v,v,...\} \in H$.

D щільний в H, тому що будь-який елемент $\{v_n \in D\}_{n=1}^{\infty} \in H$ є границею елементів $\{v_n, v_n, ...\} \in D$.

Якщо $v \in H$ ортогональний до усіх елементів $d \in D : (v,d) = 0$, то $v = 0$.

.

Лінійний функціонал

це відображення $f(w) : D \subseteq H \to R$ таке, що $f(\alpha u + \beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v)$, $\forall u, v \in D,\ \forall \alpha, \beta \in R$.

Лінійний функціонал обмежений (неперервний), якщо

$\exists c > 0 : |f(v)| \le c\|v\|\ \ \forall v \in D$.

Надалі лінійний функціонал вважаємо обмеженим.

Завдання 1.1

Теорема про продовження лінійного функціонала $f(v) : D \subset H \to R$.

Якщо D щільний в H, то

$$f^*(v) = \begin{cases} f(v),\ v \in D \\ \lim\limits_{n\to\infty} f(v_n),\ v \in H,\ \forall \{v_n\}_{n=1}^{\infty} \to v, n \to \infty \end{cases}$$

лінійний і неперервний в H.

Завдання 1.2

Теорема (про представлення функціонала).

Для будь-якого лінійного обмеженого функціонала $f(v) : H \to R$ існує єдиний елемент $f \in H$ такий, що $f(v) = (f, v)\ \ \forall v \in H$.

Лінійний оператор

– це відображення $A : D(A) \subset H \to H$ таке, що

$A(\alpha u + \beta v) = \alpha Au + \beta Av$, $\forall u, v \in D(A),\ \forall \alpha, \beta \in R$.

Лінійний оператор обмежений (безперервний), якщо

$\exists c > 0 : \|Av\| \le c\|v\|\ \ \forall v \in D(A)$.

Теорема про продовження лінійного, обмеженого оператора $A : D(A) \subset H \to H$.

Якщо $D(A)$ щільний в H, то

$$\tilde{A}v = \begin{cases} Av,\ v \in D(A) \\ \lim\limits_{n\to\infty} Av_n,\ v \in D(A),\ \forall \{v_n\}_{n=1}^{\infty} \to v, n \to \infty \end{cases}$$

лінійний і неперервний в H , крім того, $\|\tilde{A}\| = \|A\|$.

Наслідком цієї теореми є можливість заміни задачі: знайти $u \in D(A):\ Au = f$ на задачу в гільбертовом просторі: знайти $u \in H:\ \tilde{A}u = f$.

На жаль, диференціальні оператори в $H = L_2(\Omega)$ не обмежені.

Енергетичний простір

Щодо лінійного оператора $A: D(A) \subset H \to H$, область визначення якого $D(A)$ щільна в H , припустимо, що він

симетричний, тобто $(Au, v) = (u, Av)\ \forall u, v \in D(A)$

додатно визначений, тобто $\exists \gamma > 0 : (Av, v) \ge \gamma \|v\|^2\ \ \forall v \in D(A)$.

Визначимо в $D(A)$ скалярний добуток і норму:

, .

(перевірити виконання аксіом для них).

Поповнимо $D(A)$ по цій нормі до гільбертового простору H_A (енергетичного простору оператора A), тобто до простору класів еквівалентних, фундаментальних по Коші в нормі $\|\cdot\|_A$ послідовностей. З додатної визначеності оператора A випливає, що така послідовність буде фундаментальної по Коші й у нормі основного простору H :
$\|v_n - v_m\| \le \gamma^{-1/2} \|v_n - v_m\|_A \to 0,\ n, m \to \infty$.

Таким чином, справедлива наступна

Теорема 1. *Енергетичний простір H_A симетричного, додатно визначеного оператора $A: D(A) \subset H \to H$ вкладений в H , і вкладення неперервне, тобто зі збіжності в H_A випливає збіжність в H . Якщо $D(A)$ щільна в H , то й H_A щільна в H (тому що $D(A) \subset H_A \subset H$).*

Надалі ми будемо вважати, що умови цієї теореми завжди виконуються.

Операторне й проекційне формулювання задачі

Задача А: розв'язати рівняння $Au = f$, де $A: D(A) \subset H \to H$.

Задача П: знайти $u \in H_A : (u, v)_A = (f, v)\ \forall v \in H_A$

(помітимо, що операторне формулювання в H_A цієї задачі ми не даємо).

Теорема 2. *Будь-який розв'язок задачі А є розв'язком задачі П.*

Доведення. Помножимо $Au = f$ на $\forall v \in H_A$ отримаємо $(u, v)_A = (f, v)$.

Теорема 3. *Розв'язок проекційної задачі П існує і єдиний.*

Доведення. З нерівності Шварца (Коші, Коші-Буняковского) і теореми 1 випливає, що лінійний функціонал $f(v) \equiv (f, v)$ обмежений в H_A:

$\left|f(v)\right| = \left|(f,v)\right| \le \|f\|\|v\| \le \gamma^{-1/2}\|f\|\|v\|_A$.

Тоді по теоремі про представлення функціонала

$\exists!\, u \in H_A : (u,v)_A = (f,v) \quad \forall v \in H_A$.

Наслідок. *Якщо розв'язок задачі А існує, то він єдиний.*

Теорема 4. *Якщо розв'язок проекційної задачі П належить $D(A)$, те він є розв'язком задачі А.*

Доведення. В цьому випадку $(u,v)_A = (Au,v) = (f,v) \quad \forall v \in H_A$, тобто $Au - f$ ортогональний усім елементам множини H_A, щільної в H. Отже, $Au - f = 0$.

Означення. Розв'язок $u \in H_A$, $u \notin D(A)$ проекційної задачі П називається узагальненим розв'язком задачі А.

Варіаційне формулювання задачі А

Задача В: знайти $u \in H_A$: $F(u) = \min\limits_{v \in H_A} F(v)$, $F(v) \equiv (v,v)_A - 2(f,v)$.

Теорема 5. *Розв'язок варіаційної задачі В існує, єдиний й співпадає з розв'язком проекційної задачі П і, отже, з розв'язком задачі А.*

Доведення. З теореми 3. випливає, $\exists!\, u \in H_A$ - розв'язок задачі П:

$(u,v)_A = (f,v) \quad \forall v \in H_A$. Тоді

$F(u+v) \equiv (u+v,u+v)_A - 2(f,u+v) = F(u) + 2\left[(u,v)_A - (f,v)\right] + (v,v)_A \ge F(u)$.

Тоді u – розв'язок задачі В.

Нехай u – розв'язок задачі В. Тоді

$\forall \alpha \in R,\ \forall v \in H_A\ F(u+\alpha v) = F(u) + 2\alpha\left[(u,v)_A - (f,v)\right] + \alpha^2 (v,v)_A \ge F(u)$.

Тоді u – розв'язок задачі П, оскільки якщо $\exists v \in H_A : (u,v)_A - (f,v) = r \ne 0$, то при $\alpha = -r/(v,v)_A$ $F(u+\alpha v) = F(u) - r^2/(v,v)_A < F(u)$ - протиріччя.

Якщо $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ - базис в H, то наближений розв'язок задачі В можна шукати у вигляді $u^{(n)} = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k^{(n)} \varphi_k$, визначаючи параметри з умов $\{\alpha_k^{(n)}\}_{k=1}^{n}$ з умов $\dfrac{\partial F\left(u^{(n)}\right)}{\partial \alpha_k^{(n)}} = 0,\ k = \overline{1,n}$.

Такий спосіб розв'язку операторного рівняння називається методом Ритца.