

Зачет 40

Функционалы последовательности и прог.

Озн. Пусть $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N}$, $D_f = D_{f_n}$.
 Если (f_n) наз. последовательностью f если $\forall x \in X \quad f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$.

Озн. Функция последовательности (f_n) наз. равномерно сходящейся к f если $\|f_n - f\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Лемма. $f_n \Rightarrow f$ при $n \rightarrow \infty$.

Озн. f_n — равн. функциями, если

$\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall (n \geq n_\varepsilon, p \in \mathbb{N}) \quad \|f_{n+p} - f_n\| < \varepsilon$.

Критерий Коши, $f_n \Rightarrow f \Leftrightarrow (f_n)$ — равн. функциями.

N 27 а) Если не адс. на условии сходимость
 функ. ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$

Решение. Застос. озн. Коши разнесению:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|f_n(x)|} = \left| \frac{1-x}{1+x} \right| \quad \text{при}$$

$$1) \left| \frac{1-x}{1+x} \right| > 1 \Rightarrow x < 0 \quad \text{ряд разд.}$$

$$2) \left| \frac{1-x}{1+x} \right| < 1 \Rightarrow x > 0 \quad \text{ряд сдвиг. (адс.)}$$

$$3) \left| \frac{1-x}{1+x} \right| = 1 \quad |1-x| = |1+x| \Rightarrow x = 0 \Rightarrow$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} \quad \text{— разд. по озн. Лейбница,}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{2n-1} \right| \quad \text{— разд. по степен. озн.} \Rightarrow$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} \quad \text{— услов. зб.}$$

Видно, что: при $x > 0$ адс. зб.

при $x < 0$ — разд.

при $x = 0$ — услов. зб.

N 27 б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} \left(\frac{x}{2x+1}\right)^n$

Решение. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|f_n(x)|} = \left| \frac{x}{2x+1} \right|$

$$\left| \frac{x}{2x+1} \right| < 1 \quad \text{при } x \in (-\infty, -1) \cup \left(-\frac{1}{3}, \infty\right)$$

$$\left| \frac{x}{2x+1} \right| > 1 \quad \text{при } x \in (-1, -\frac{1}{3})$$

$$\left| \frac{x}{2x+1} \right| = 1 \quad \text{при } x = -1 \text{ или } x = -\frac{1}{3}$$

$$x = -1: \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} - \text{розд.}$$

$$x = -\frac{1}{3}: \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} \left(\frac{-1/3}{1/3} \right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n+1} - \text{розд. (не удовлетворяет условиям)}$$

Рисновок: при $x \in (-\infty; -1) \cup (-\frac{1}{3}; +\infty)$ - адс. зб.

при $x \in [-1; -\frac{1}{3}] \setminus \{-\frac{1}{2}\}$ - розд.

$$N272) \sum f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \left(\frac{2x}{1+x^2} \right)^n$$

Розв'язок: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|f_n(x)|} \leq \left| \frac{2x}{1+x^2} \right| \leq 1$

$\Rightarrow \sum f_n(x)$ адс. зб. при $x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$ ($= \emptyset$ при $x = \pm 1$)

$$x = 1: \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$$

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{2(n+1)}{2(n+1)-1} = \frac{2n+2}{2n+1} = 1 + \frac{1}{2n+1} \sim 1 + \frac{1}{2n}$$

$\frac{1}{2} < 1 \Rightarrow$ розд. за озна Лейбница.

$$x = -1: \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \quad \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$\Rightarrow$ за озна Лейбница ряд збігається універсально.

$$N273) \sum f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}}$$

Розв'язок: 1) $|x| < 1$ $|f_n(x)| \sim x^n$

$$\sqrt[n]{|f_n(x)|} \rightarrow |x| < 1 \Rightarrow \text{ряд адс. зб.}$$

2) $|x| > 1$ $|f_n(x)| \sim \frac{|x|^n}{|x|^{2n}} = \frac{1}{|x|^n}$ $\sqrt[n]{|f_n(x)|} \rightarrow \frac{1}{|x|} < 1$

$\Rightarrow$ ряд адс. збігається

3) $|x| = 1$ $f_n(x) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} \nrightarrow 0, n \rightarrow \infty$

$\Rightarrow$ ряд розд.

N289) Досл. на адс. та універсальну збіжність ряду $\sum f_n(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n y^n}{x^n + y^n}, (x > 0, y > 0)$

Розв'язок: 1) $x = y$: $f_n(x, y) = \frac{x^{2n}}{2x^n} = \frac{x^n}{2}$

$x < 1$ - збігається

$x > 1$ - розділяється

2) $x > y$ $\sqrt[n]{|f_n(x, y)|} = \frac{xy}{\sqrt[n]{x^n + y^n}} \rightarrow \frac{xy}{x} = y$

$\Rightarrow$ при $y > 1$ - розд., а при $y < 1$ - збігається.

при $y=1$: $\sum \frac{x^n}{x^n+1}$ $x>1 \Rightarrow$ не сход. $y=1$ не сход. $\Rightarrow$ по

$x < y$
 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+y^n} \quad (y \geq 0)$

Решение: 1) $y=1$: $f_n(x, y) = \frac{x^n}{n+1}$ $|x| < 1$ адс. $|x| > 1$ - позд.
 $x=1$ - позд.
 $x=-1$ - условно зд. за Лебн

2) $y < 1$: $\sqrt[n]{|f_n(x, y)|} = \frac{|x|}{\sqrt[n]{n+y^n}} \rightarrow |x| = \begin{cases} > 1 & \text{позд} \\ < 1 & \text{адс.} \\ = 1 & ? \end{cases}$

$x=1$: $f_n(x, y) = \frac{1}{n+y^n} \sim \frac{1}{n}$ позд.

$x=-1$: $f_n(x, y) = \frac{(-1)^n}{n+y^n} \sim \frac{(-1)^n}{n}$ - условно зд. за Лебн

3) $y > 1$: $\sqrt[n]{|f_n(x, y)|} \rightarrow \frac{|x|}{y} = \begin{cases} < 1 & \text{адс.} \\ > 1 & \text{позд.} \\ = 1 & ? \end{cases}$

$x=y$: $f_n(x, y) \sim \left(\frac{x}{y}\right)^n = 1$ - позд.

$x=-y$: $f_n(x, y) \sim \left(\frac{x}{y}\right)^n \cdot (-1)^n$ - позд. (не сход. $y=1$)

N30 2-4)

Доказать, что функции, последовательность которых при $x \rightarrow \infty$ сходится к 0, не обязательно

$f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}$ 1) на промежутке $A = [0, \frac{9}{10}]$.

Решение: $\|f_n(x)\| = \sup_{x \in A} |f_n(x)|$

~~$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{1+x^n} = 0$~~ Значит, мы имеем точку, которую можно считать $x \in [0, \frac{9}{10}]$.
 $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{1+x^n} = 0$ Отсюда, $f(x) \equiv 0$.

Далее проверяем, что $f_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

$\|f_n - 0\| = \sup_{x \in [0, \frac{9}{10}]} \left| \frac{x^n}{1+x^n} - 0 \right| \leq \left(\frac{9}{10} \right)^n \rightarrow 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \|f_n - 0\| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty \Rightarrow f_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$

3) $A = (0, 1)$:

$\|f_n - 0\| = \sup_{x \in (0, 1)} \left| \frac{x^n}{1+x^n} - 0 \right| \geq \sup_{x \in (0, 1)} \left| \frac{x^n}{1+x^n} \right| =$

$\frac{1}{1 + \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n} \rightarrow \frac{1}{1 + \frac{1}{e}} \neq 0$ $\Rightarrow f_n \not\rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

N 30 8-1) $A = [0, 1]$, $f_n(x) = x^n - x^{n+1}$

Pozbierzok $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0 \quad \forall x \in [0, 1]$

$$\sup_{x \in [0, 1]} |f_n(x)| = \sup_{x \in [0, 1]} |x^n - x^{n+1}| \quad \text{---}$$

$$\text{---} / f'_n(x) = nx^{n-1} - (n+1)x^n = 0$$

$$x^{n-1}(n - (n+1)x) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = \frac{n}{n+1} = \arg \max / \text{---}$$

$$\text{---} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n - \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n+1} = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} - \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$

$$\Rightarrow f_n \xrightarrow[A]{} 0, \quad n \rightarrow \infty$$

N 30 m) 2) $f_n(x) = n \left(\sqrt{x + \frac{1}{n}} - \sqrt{x} \right)$, $A = (0, +\infty)$

2), 3) Pozbierzok $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\sqrt{x + \frac{1}{n}} - \sqrt{x} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{x + \frac{1}{n}} + \sqrt{x}} \rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$$\sup_{x \in (0, +\infty)} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in (0, +\infty)} \left| \frac{1}{\sqrt{x + \frac{1}{n}} + \sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x}} \right| =$$

$$= \sup_{x \in (0, +\infty)} \left| \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x + \frac{1}{n}}}{(\sqrt{x + \frac{1}{n}} + \sqrt{x}) \cdot 2\sqrt{x}} \right| = \sup_{x \in (0, +\infty)} \left| \frac{\frac{1}{n}}{(\sqrt{x + \frac{1}{n}} + \sqrt{x}) 2\sqrt{x} (\sqrt{x} + \sqrt{x + \frac{1}{n}})} \right|$$

$$= \sup_{x \in (0, +\infty)} \frac{1}{2n} \cdot \left| \frac{1}{(\sqrt{x + \frac{1}{n}} + \sqrt{x})^2 \cdot \sqrt{x}} \right| \geq \sup_{\left(x_n = \frac{1}{n^2}, n \in \mathbb{N}\right)} \frac{1}{2n} \cdot \frac{1}{(\sqrt{x + \frac{1}{n}} + \sqrt{x})^2 \sqrt{x}}$$

$$= \frac{1}{2n} \cdot \frac{1}{\left(\sqrt{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n}} + \sqrt{\frac{1}{n^2}}\right)^2 \cdot \frac{1}{n}} \sim \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}\right)^2} \sim \frac{n}{2} \rightarrow \infty$$

$$\Rightarrow f_n \not\xrightarrow[A]{} \text{---}$$

3) $A = (1, +\infty)$

$$\sup_{x \in (1, +\infty)} \left| \frac{1}{\sqrt{x + \frac{1}{n}} + \sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x}} \right| = \sup_{x \in (1, +\infty)} \frac{1}{2n} \left| \frac{1}{(\sqrt{x + \frac{1}{n}} + \sqrt{x})^2 \sqrt{x}} \right|$$

$\leq$ / $\frac{1}{2n} \cdot \frac{1}{(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + \sqrt{1})^2 \sqrt{1}}$
 chaque 3a x
 $\Rightarrow$ $\frac{1}{2n} \cdot 4 = \frac{1}{8n} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$

$$\Rightarrow f_n \xrightarrow[A]{} \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

D/3 N 27 g) p) 10) : N 28 b) 2) g) ;
 N 30 a-1,4) ; N 30 2-1,2) , N 30 5-3) ,
 N 30 1)