

Заняття 39. На зйскості ряди.

Озн. Ряд $\sum a_n$ наз. абсолютно збіжним,
якщо $\sum |a_n|$ — збіжний.

Озн. Якщо ряд $\sum a_n$ — збіжний, а $\sum |a_n|$ — розбіжний, то ряд наз. умовно збіжним.

Ознака Лебана Якщо $a_n = (-1)^n b_n$, $b_n \searrow$
 $b_n > 0$

$\Rightarrow$ ряд $\sum a_n$ — збіжний.

Ознаки Абеля та Дирхле
 $\left. \begin{array}{l} \sum a_n \text{ — збіжн} \\ b_n \text{ — монот.} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \left| \sum_{k=1}^n a_k \right| < M \quad \forall n \text{ — фикс.} \\ b_n \rightarrow 0, \text{ монотонно} \end{array}$
 $\Rightarrow \sum a_n$ — збіжн

N12 a) Дослідити на зйскість $\sum c_n$,

$$c_n = \frac{\ln^{100} n}{n} \sin \frac{n\pi}{4}$$

Розв'язок. Кош. $a_n = \sin \frac{n\pi}{4}$. $\left| \sum_{k=1}^n a_k \right| = \left| \sum_{k=1}^n \sin \frac{k\pi}{4} \right| =$

$$\stackrel{\text{кор. 43 N40.1)}}{=} \left| \sum_{k=1}^n \sin kx = \frac{\sin \frac{n\pi}{2} \sin \frac{(n+1)\pi}{2}}{\sin \frac{\pi}{2}} \right| = \left| \frac{\sin \frac{n\pi}{2} \sin \frac{(n+1)\pi}{2}}{\sin \frac{\pi}{2}} \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{\sin \frac{\pi}{2}} = M \Rightarrow \left| \sum_{k=1}^n a_k \right| < M$$

$b_n = \frac{\ln^{100} n}{n}$ — монот., $\rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$

$\Rightarrow$ за озн. Дирхле $\sum a_n$ — збіжн

N12 б) $c_n = (-1)^n \frac{\sin^2 n}{n}$

Розв'язок. $\sum c_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1 - \cos 2n}{2n} \right) =$

$$= \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n}}_{S_1} - \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos 2n}{2n}}_{S_2}$$

зд. за Лейбн.

S_2

S_2 : $a_n = (-1)^n \cos 2n$, $b_n = \frac{1}{2n}$ — монот., $\rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$

$$\left| \sum_{k=1}^n (-1)^k \cos 2k \right| = \left| \sum_{k=1}^n \cos k\pi \cos 2k \right| = \left| \sum_{k=1}^n \frac{\cos(k(\pi-2)) + \cos(k(\pi+2))}{2} \right|$$

$$\stackrel{\text{кор. 43 N40.4)}}{=} \left| \frac{\sin \left(\frac{2n+1}{2} (\pi-2) \right)}{2 \sin \frac{\pi-2}{2}} - \frac{1}{2} + \frac{\sin \left(\frac{2n+1}{2} (\pi+2) \right)}{2 \sin \frac{\pi+2}{2}} - \frac{1}{2} \right| \leq \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned}
 &= \left| \frac{\sin\left(\pi n + \frac{\pi}{2} - 2n - 1\right)}{2\sin\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)} + \frac{\sin\left(\pi n + \frac{\pi}{2} + 2n + 1\right)}{2\sin\left(\frac{\pi}{2} + 1\right)} - 1 \right| \cdot \frac{1}{2} \\
 &= \left| \frac{\sin\left(\pi n + \frac{\pi}{2} - 2n - 1\right)}{2\cos 1} + \frac{\sin\left(\pi n + \frac{\pi}{2} + 2n + 1\right)}{2\cos 1} - 1 \right| \cdot \frac{1}{2} \\
 &= \left| \frac{\cos(2n + 1 - \pi n) + \cos(2n + 1 + \pi n)}{2\cos 1} - 1 \right| \cdot \frac{1}{2} \\
 &= \left| \frac{\cos(2n + 1 - \pi n) + \cos(2n + 1 + \pi n)}{2\cos 1} - 1 \right| \cdot \frac{1}{2} \\
 &= \left| \frac{\cos(2n + 1) \cos \pi n + \sin(2n + 1) \sin \pi n}{2\cos 1} - 1 \right| \cdot \frac{1}{2} \\
 &= \left| \frac{(-1)^n \cos(2n + 1)}{2\cos 1} - \frac{1}{2} \right| < \frac{1 + \frac{1}{\cos 1}}{2} = M
 \end{aligned}$$

$\Rightarrow S_2$ — збіжний ряд за оц. Аболи $\Rightarrow$

$\sum C_n$ — збіжний.

N 12 e $C_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$

Розв'язок. $\sum C_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (\sqrt{n} - (-1)^n)}{n-1} = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{n-1}}_{S_1} - \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n-1}}_{S_2}$

$\frac{\sqrt{n}}{n-1} \rightarrow 0$ монот. $\Rightarrow S_1$ — збіжн. за Лейбн.

S_2 : $\frac{1}{n-1} \sim O^*\left(\frac{1}{n}\right)$ $p=1 \Rightarrow S_2$ — розд. ряд за критерієм оц.

$\Rightarrow \sum C_n$ — розд.

N 12 з $C_n = \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}$

Розв'язок. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k$

$[\sqrt{1}] = 1, [\sqrt{2}] = 1, [\sqrt{3}] = 1, [\sqrt{4}] = 2, \dots, [\sqrt{8}] = 2, \dots$

$[\sqrt{n}] = k \Rightarrow n \in [k^2, k^2 + 1, \dots, (k+1)^2 - 1]$

$\Rightarrow a_k \leq \frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^2+1} + \dots + \frac{1}{(k+1)^2-1} < \frac{2k+1}{k^2} \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$

монотонність? !

$$\begin{aligned}
 a_{k+1} - a_k &= \left(\frac{1}{k^2} + \dots + \frac{1}{(k+1)^2} - 1 \right) - \left(\frac{1}{(k+1)^2} + \dots + \frac{1}{(k+2)^2} - 1 \right) \\
 &= \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2} \right) + \dots + \left(\frac{1}{k^2+2k} - \frac{1}{(k+1)^2+2k} \right) - \\
 &\quad - \left(\frac{1}{(k+1)^2+2k+1} + \frac{1}{(k+1)^2+2k+2} \right) = \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2} + \dots + \frac{2k+1}{(k^2+2k)((k+1)^2+2k)} - \\
 &\quad - \frac{1}{k^2+4k+2} - \frac{1}{k^2+4k+3} > \frac{(2k+1)^2}{(k^2+2k)((k+1)^2+2k)} - \frac{1}{k^2+4k+2} - \frac{1}{k^2+4k+3} \\
 &> \frac{4k^2+4k+1}{(k^2+2k)(k^2+4k+1)} - \frac{1}{k^2+4k+1} - \frac{1}{k^2+4k+1} \\
 &= \frac{4k^2+4k+1 - 2(k^2+2k)}{(k^2+2k)(k^2+4k+1)} = \frac{2k^2+1}{(k^2+2k)(k^2+4k+1)} > 0
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow a_k \nearrow \Rightarrow$$

Зв. озн. ~~Дифференц.~~ ~~необходим.~~ $S = \sum c_n$ - ~~зв. озн.~~

N 12 n $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}$ ~~$a_n = (-1)^n$~~

Розв'язок. $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}} \rightarrow 1 \neq 0 \Rightarrow$

не викон. ~~необх.~~ ~~умови~~ $\Rightarrow$ ~~пер.~~ розв.

N 13 g Дослідити ~~не~~ абсолютну зв. умову ~~зв.~~ $\sum a_n$,

$$a_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^p}\right)$$

Розв'язок. Абс. зв. умови:

$$|a_n| = \left| \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^p}\right) \right| \sim \left| \frac{(-1)^n}{n^p} \right| = O\left(\frac{1}{n^p}\right)$$

$\Rightarrow$ зв. ~~сочен.~~ ~~означення~~ $\frac{1}{n^p}$ $p > 1$ ~~пер.~~ ~~абс.~~ ~~зв.~~

~~$\frac{1}{n^p}$ $p \leq 1$~~

Умови ~~зв.~~ $a_n \sim \frac{(-1)^n}{n^p} = \frac{1}{2n^{2p}} + O\left(\frac{1}{n^{2p}}\right)$

$\sum \frac{(-1)^n}{n^p}$ - зв. $\frac{1}{n^p}$ $p > 0$ зв. ~~пер.~~ ~~необх.~~

$\sum \frac{1}{2n^{2p}}$ - зв. $\frac{1}{n^p}$ $2p > 1$, тобто $p > \frac{1}{2}$

Висновок: $\frac{1}{n^p}$ $p > 1$ ~~абс.~~ ~~зв.~~

$\frac{1}{n^p}$ ~~$\frac{1}{2} < p \leq 1$~~ $\frac{1}{2} < p \leq 1$ - умови ~~зв.~~

N 13 K $a_n = (-1)^n \frac{n-1}{n+1} \frac{1}{100\sqrt{n}}$

Розв'язок Абс. зб'язність $|a_n| = \frac{n-1}{n+1} \cdot \frac{1}{100\sqrt{n}} = O\left(\frac{1}{n^{\frac{1}{100}}}\right)$

$p = \frac{1}{100} < 1 \Rightarrow \sum a_n$ не зб. абсолютно.

Умовне зб'язність: $a_n \rightarrow 0$ швидше
при $n \rightarrow \infty \Rightarrow$ За озч. Лейбні зб'язність
рег.

$\Rightarrow \sum a_n$ - умовно зб'язний.

N 13 n $a_n = (-1)^n \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right)^p$

Розв'язок Означено, що при $p \leq 0$ $a_n \not\rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$

$\Rightarrow \sum a_n$ - розб.

$$|a_n| = \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right)^p \quad \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \left(\frac{2n+2}{2n+1} \right)^p = \left(1 + \frac{1}{2n+1} \right)^p \sim$$

$$\sim 1 + \frac{p}{2n+1} \sim 1 + \frac{p/2}{n} \Rightarrow$$

За озч. Лейбні абс. розб. $\sum a_n$ абс.
зб'язний при $p/2 > 1$, тобто $p > 2$.

Озв., що при $p > 0$ $b_n = \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right)^p$ -
швидше $\rightarrow 0 \Rightarrow$ За озч. Лейбні

$\sum a_n$ - зб'язний

Висновок: при $0 < p \leq 2$ - умовно зб.

при $p > 2$ - абс. зб'язний

при інших p - розб'язний

$$\left(\frac{b_n}{b_{n+1}} - 1 \right) \cdot n \rightarrow p > 0 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall i \geq N$$

$$\left(\frac{b_i}{b_{i+1}} - 1 \right) \cdot i \in (p-\varepsilon, p+\varepsilon) \Rightarrow \forall i \geq N \quad 1 + \frac{p-\varepsilon}{i} < \frac{a_i}{a_{i+1}} < 1 + \frac{p+\varepsilon}{i}$$

$$\Rightarrow \left(1 + \frac{p-\varepsilon}{N} \right) \left(1 + \frac{p-\varepsilon}{N+1} \right) \dots \left(1 + \frac{p-\varepsilon}{n-1} \right) < \frac{a_N}{a_n} \Rightarrow a_n < \frac{a_N}{1 + (p-\varepsilon) \left(\frac{1}{N} + \frac{1}{N+1} + \dots + \frac{1}{n-1} \right)} \Rightarrow$$

$\left(\frac{p}{3}, N(2, \varepsilon), 1, p \right); N(3, \varepsilon), 1, p \right); N(3, \varepsilon), 1, p \right); N(3, \varepsilon), 1, p \right); N(3, \varepsilon), 1, p \right);$

$\Rightarrow a_n \rightarrow 0, n \rightarrow \infty.$