Заняття 38. Ряди. Знакосталі ряди

$\boxed{№1\ в)}$ Знайти суму ряду $\sum a_n$, $a_n = \frac{2n-1}{2^n}$

Розв'язок $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2^k} = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^{k-1}}}_{\tilde{S}_n} - \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}}_{\to 1,\ n\to\infty \text{ (геометр. пр)}}$

$$\tilde{S}_n : \begin{array}{llllll} 1 & & & & & \\ \frac{1}{2} & +\frac{1}{2} & & & & \\ \frac{1}{4} & +\frac{1}{4} & +\frac{1}{4} & & & \\ \frac{1}{8} & +\frac{1}{8} & +\frac{1}{8} & +\frac{1}{8} & & \\ & \dots & & & & \\ \frac{1}{2^{n-1}} & +\frac{1}{2^{n-1}} & +\frac{1}{2^{n-1}} & + \dots & + \frac{1}{2^{n-1}} & \end{array}$$

$$\Rightarrow \tilde{S}_n = \sum_{k=1}^{n} \sum_{m=k}^{n} \frac{1}{2^{m-1}} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2^{k-1}} \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k+1}}{1-\frac{1}{2}} \right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-2}} \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k+1} \right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-2}} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{n-1}} \to$$

$$= 2 - 0 = 2$$

Відповідь: $2 - 1 = 1$.

$\boxed{№1\ п)}$ $a_n = \frac{n^3+6n^2+11n+5}{(n+3)!}$

Розв'язок. $\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{(n+3)(n+2)(n+1)-1}{(n+3)!} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+3)!} \right) =$

$= \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{(n+2)!} - \frac{1}{(n+3)!} \to 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6}$

$\boxed{№2\ а)}$ Дослідити на збіжність ряд $\sum a_n$;

$a_n = (-1)^n$

Розв'язок. $a_n \not\to 0$, $n \to \infty$ $\Rightarrow$ не викон. необх. умова

$\Rightarrow$ розб.

$\boxed{№2\ е)}$ $a_n = \frac{1}{1000n+1}$

Розв'язок. Ознака порівн. із степінним

якщо $a_n = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$, при $n \to \infty$, то при $\alpha > 1$ ряд зб.

$\alpha \le 1$ – розб.

$a_n = O\left(\frac{1}{n^1}\right)$, $\alpha = 1$ $\Rightarrow$ розб.

$\boxed{№2\ г)}$ $a_n = \frac{1}{n!}$

Розвязок. Мажорантний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$, $\frac{1}{n!} < \frac{1}{2^{n-1}}$ $\forall n \in N$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$ – зб. $\Rightarrow$ $\sum a_n$ – зб.

$\boxed{№4\ г)}$ Дослідити на збіжність ряд з використанням ознак Д'Аламбера та Коші.

$a_n = \frac{2^n \cdot n!}{n^n}$

Розвязок. $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{2^n \cdot n!} = \frac{2(n+1)}{(n+1)^{n+1}} \cdot n^n =$

$= \frac{2n^n}{(n+1)^n} = \frac{2}{(1+\frac{1}{n})^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{2}{e} < 1$ $\Rightarrow$ ряд $\sum a_n$ – зб.

$\boxed{№4\ д)}$ $a_n = \frac{3^n \cdot n!}{n^n}$.

Розвязок. $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{2^n \cdot n!} = \frac{3}{(1+\frac{1}{n})^n} \to \frac{3}{e} > 1$

$\Rightarrow$ ряд розб.

$\boxed{№4\ о)}$ $a_n = n^{n+\frac{1}{n}} (n+\frac{1}{n})^{-n}$

Розвязок. Необх. умова $a_n = \frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{(n+\frac{1}{n})^{+n}} = \frac{n^{\frac{1}{n}}}{(1+\frac{1}{n^2})^n} \to 1$

$\not\to 0$, $n \to \infty$ $\Rightarrow$ ряд розб.

$\boxed{№4\ м}$ $a_n = \frac{n^{10}}{2^n + 5^n}$

Розвязок. $a_n < b_n = \frac{n^{10}}{2^n + 2^n} = \frac{n^{10}}{2^{n+1}} \to 0$, $n \to \infty$ необх. умова викон.

Ознака Коші (радикальна):

Якщо $\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = q$, то при $q < 1$ – зб

> 1 – розб.

$= 1$ – невідомо.

$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\frac{n^{10}}{2^n + 5^n}} \to \frac{1}{5} < 1 \Rightarrow$ ряд збіжний

$\boxed{№43}$ $a_n = \frac{\prod_{k=1}^{n} (3k+1)}{\prod_{k=1}^{n} (4k-2)}$

Розвязок. Ознака Д'Аламбера: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3n+4}{4n+2} \to \frac{3}{4}$

< 1 $\Rightarrow$ ряд збіжн.

$\boxed{N4л}$ $a_n = n^{n-1}(2n^2+n+1)^{-\frac{n+1}{2}}$

Розвязок. Ознака Коші радикальна:

$$\sqrt[n]{a_n} = \frac{n^{\frac{n-1}{n}}}{(2n^2+n+1)^{\frac{n+1}{2n}}} = \frac{n \cdot n^{-1/n}}{n \cdot n^{1/n}\left(2+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{n+1}{2n}}} \to \frac{1}{\sqrt{2}}$$

< 1 – ряд збіжний

$\boxed{N5a}$ Дослідити на збіжність, використовуючи ознаки Раабе та Гауса.

Озн. Раабе. Якщо $a_n > 0$, $\exists \lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = p$, то при $p>1$ ряд збіжний, а при $p<1$ – розб. (при $p=1$ – невідомо).

Озн. Гауса. Якщо $a_n > 0$, $\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda + \frac{\mu}{n} + \frac{\theta_n}{n^{1+\varepsilon}}$, де $\varepsilon > 0$, $|\theta_n| = O(1)$, то при $\lambda > 1$ ряд збіжн., при $\lambda < 1$ – розб.

а якщо $\lambda = 1$, то при $\mu > 1$ ряд збіжн., при $\mu \le 1$ – розб.

$a_n = \frac{n!\,e^n}{n^{n+p}}$.

Гауса: $\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{n!\,e^n}{n^{n+p}} \cdot \frac{(n+1)^{n+1+p}}{(n+1)!\,e^{n+1}} = \frac{(n+1)^{n+p}}{n^{n+p}\,e} =$

$$= \frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{n}\right)^p \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \sim \frac{1}{e}\left(1+\frac{p}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)e^{n\ln(1+\frac{1}{n})} \sim$$

$$\sim \frac{1}{e}\left(1+\frac{p}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)e^{n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)} =$$

$$= \left(1+\frac{p}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)e^{-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)} \sim \left(1+\frac{p}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\left(1-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

$$\sim 1+\frac{p}{n}-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right) = 1+\frac{p-1/2}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)$$

$\Rightarrow$ при $p - 1/2 > 1$ ряд збіж. $(p > 3/2)$

при $p - 1/2 \le 1$ розб. $(p \le 3/2)$

$\boxed{N5\,k-1)}$ $a_n = \frac{1}{n^q}\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^p$

Розвʼязок. Застос. ознаку Гауса

$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)^p \frac{(n+1)^q}{n^q} = \left(1+\frac{1}{2n+1}\right)^p \left(1+\frac{1}{n}\right)^q \sim$

$\sim \left(1+\frac{p}{2n+1}\right)\left(1+\frac{q}{n}\right) + o\left(\frac{1}{n}\right) \sim 1 + \frac{pn+q(2n+1)}{n(2n+1)} + o\left(\frac{1}{n}\right)$

$\sim 1 + \frac{p+2q+\frac{q}{n}}{2n+1} + o\left(\frac{1}{n}\right) \sim 1 + \frac{p+2q}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$

$\Rightarrow$ при $\frac{p+2q}{2} > 1$ ряд зб.

≤ 1 розб.

$\boxed{N\,6\,в}$ Викор. ознаку порівняння із степенем, дослідити на збіжність ряд

$a_n = \ln^p\left(\sec\frac{\pi}{n}\right) = \ln^p\left(\frac{1}{\cos\frac{\pi}{n}}\right)$

Розвʼязок. $a_n \sim \ln^p\left(\frac{1}{1-\frac{\pi^2}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)}\right) \sim$

$\sim \ln^p\left(1+\frac{\pi^2}{2n^2}\right) \sim \frac{\pi^{2p}}{2^p \cdot n^{2p}}$ $\quad \left| (1+x)^\alpha \sim 1+\alpha x \right.$ при $x \to 0 \,|$

$\Rightarrow$ Ряд зб., якщо $2p > 1$ $(p > 1/2)$

розб., якщо $p \leq 1/2$.

$\boxed{N6\,e}$ $a_n = \frac{1}{n^{1+\frac{k}{\ln n}}}$

Розвʼязок. $a_n = \frac{1}{n \cdot n^{\frac{k}{\ln n}}} = \frac{1}{n \cdot e^{\frac{\ln n \cdot k}{\ln n}}} =$

$= \frac{1}{n e^k} = O\left(\frac{1}{n^1}\right)$ $\Rightarrow$ ряд розбіжний.

$\boxed{N8\,в)}$ [Без доведення]

Якщо послід. $a_n \geq 0$ монотонно спадає, то ряди $\sum a_n$ та $\sum 2^n a_{2^n}$ збігаються або розбігаються одночасно.

$\boxed{N9\,г}$ Досл. на збіжність ряд $\sum a_n$, де

$a_n = \begin{cases} \frac{1}{n \ln^p n}, & n > 1 \\ 1, & n = 1 \end{cases}$

Розвʼязок. Інтегральна ознака Коші:

Якщо функція $(1,+\infty) \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ невідʼємна та не зростає на проміжку $(a,+\infty)$ $\exists a \in (1,+\infty)$ ~~$\forall a \in (1,+\infty)$~~

то ряд $\sum f(n)$ збіг., якщо $\exists \lim\limits_{A\to+\infty} \int_a^A f(x)dx$

$$\int_2^{+\infty} f(x)\,dx = \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^p x} = \left/ \begin{array}{c} \text{Заміна} \\ \ln x = y \\ \frac{dx}{x} = dy \end{array} \right/ = \int_{\ln 2}^{+\infty} y^{-p}\,dy =$$

$$= \left.\frac{\ln^{1-p}(x)}{1-p}\right|_2^{+\infty}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln^{1-p}(x)}{1-p} - \frac{\ln^{1-p}(2)}{1-p} =$$

$< \infty$, якщо $1-p<0$ $\Rightarrow p>1 \Rightarrow$ ряд збіжн.

$= \infty$, якщо $1-p>0$ $\Rightarrow p<1 \Rightarrow$ ряд розбіжн.

$p=1$: $a_n = \frac{1}{n \ln n}$

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln x} = \int_2^{+\infty} \frac{d(\ln x)}{\ln x} = \ln(\ln x)\Big|_2^{+\infty} = +\infty$$

$\Rightarrow$ ряд розбіжний.

$\boxed{\text{N9 и}}$ $a_n = \frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}$, $n>1$

<u>Розвʼязок</u> Застос. радикальну Ознаку Коші:

$$\sqrt[n]{a_n} = \frac{n^{\frac{\ln n}{n}}}{(\ln n)} = \frac{e^{\frac{\ln^2 n}{n}}}{e^{\ln \ln n}} = e^{\underbrace{\frac{\ln^2 n}{n}}_{\to 0} - \underbrace{\ln\ln n}_{\to+\infty}} \to 0 < 1$$

$\Rightarrow$ ряд збіжається.

Д/З. N 1е); 2р) с); N4 б) е) с), N5 г) д),

N6 а) б) о) с) х); N 9в)