

Задача 36. Формула Тейлора.
 Рассмотрим функцию второго порядка

$$f(x, y) = f(a, b) + \sum_{i=1}^n \frac{1}{i!} \left\{ (x-a) \frac{\partial}{\partial x} + (y-b) \frac{\partial}{\partial y} \right\}^i f(a, b) + R_n(x, y)$$

$$\text{и } R_n(x, y) = \frac{1}{n!} \left\{ (x-a) \frac{\partial}{\partial x} + (y-b) \frac{\partial}{\partial y} \right\}^n f(a + \theta(x-a), b + \theta(y-b))$$

$0 < \theta < 1$

$$f(x, y) = f(a, b) + \frac{\partial f(a, b)}{\partial x} (x-a) + \frac{\partial f(a, b)}{\partial y} (y-b) +$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(a, b)}{\partial x^2} (x-a)^2 + \frac{\partial^2 f(a, b)}{\partial x \partial y} (x-a)(y-b) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(a, b)}{\partial y^2} (y-b)^2 + R_2(x, y)$$

[N100 a-1)

Рассмотрим в пред Тейлора го разв в-го порядка в т. $M(1, 1)$, $f(x, y) = x^y$, $n=3$

Решение. $\frac{\partial f}{\partial x} = y x^{y-1}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = x^y \ln x$ Точка

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = y(y-1) x^{y-2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = x^y \ln^2 x,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = x^{y-1} + y x^{y-1} \ln x$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = y(y-1)(y-2) x^{y-3}, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} = x^y \ln^3 x,$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = (2y-1) x^{y-2} + (y^2-y) \cdot x^{y-2} \cdot \ln x$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} = x^{y-1} \ln x + \ln x (x^{y-1} + y x^{y-1} \ln x)$$

$$f(M) = 1, \quad f'_x(M) = 1, \quad f'_y(M) = 0, \quad f''_{x^2}(M) = 0, \quad f''_{y^2}(M) = 0$$

$$f'''_{x^3}(M) = 0, \quad f'''_{y^3}(M) = 0, \quad f'''_{x^2 y}(M) = 1, \quad f'''_{x y^2}(M) = 0$$

$$\Rightarrow f(x, y) = 1 + (x-1) + (x-1)(y-1) + \frac{1}{3!} \cdot 3(x-1)^2(y-1) + R_3$$

Точка. $x^y = e^{y \ln x} = / t = x-1, u = y-1 / = e^{(u+1) \ln(t+1)}$

$$= e^{ut} e^{\ln(1+t)} = \left(1 + ut + \frac{u^2 t^2}{2} + o(u^2 t^2) \right) \left(e^{t - \frac{t^2}{2} + o(t^2)} \right) =$$

$$= \left(1 + ut + \frac{u^2 t^2}{2} + o(u^2 t^2) \right) \left(1 + t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^2}{2} + o(t^2) \right) =$$

$$= 1 + t + ut + \frac{u^2 t^2}{2} + o(u^2 t^2)$$

N 100 2-1) $M(0,0)$, $n=2$, $f(x,y) = \arctg \frac{1+x+y}{1-x+y}$

Розглядає. $f(M) = \arctg 1 = \frac{\pi}{4}$

$$df = \frac{2(1+y)dx - 2xdy}{(1-x+y)^2 + (1+x+y)^2} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(M) = 1, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(M) = 0$$

$$d^2f = -\frac{(2(1+y)dx - 2xdy)(2(1-x+y)(-dx+dy) + 2(1+x+y)(dx+dy))}{((1-x+y)^2 + (1+x+y)^2)^2} \Rightarrow$$

$$d^2f(M) = -2dxdy \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(M) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(M) = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -2$$

$$\Rightarrow f(x,y) = \frac{\pi}{4} + x - xy + o(x^2 + xy + y^2)$$

N 101 a-1) Розглядає в півпросторі рівняння $M =$

$\Phi(x,y,z): z^3 - 2xz + y = 0$ в т. $(x_0, y_0, z_0) = (1, 1, 1)$,
2-2 напрямки.

Розглядає. $3z^2 dz - 2z dx - 2x dz + dy = 0$
 $dz = \frac{2z dx - dy}{3z^2 - 2x}$, $dz(M) = 2dx - dy$

$$d^2z = \frac{2dz dx \cdot (3z^2 - 2x) - (2z dx - dy) \cdot (6z dz - 2dx)}{3z^2 - 2x}$$

$$d^2z(M) = \frac{2(2dx - dy)dx \cdot 1 - (2dx - dy) \cdot (6(2dx - dy) - 2dx)}{3 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1} =$$

$$= dx^2 \cdot (4 - 2 \cdot (12 - 2)) + dx dy \cdot (-2 - 2 \cdot (-6) + (12 - 2)) + dy^2 \cdot (-6)$$

$$= -16 dx^2 + 20 dx dy - 6 dy^2$$

$$z(x,y) = 1 + 2(x-1) - (y-1) - 8(x-1)^2 + 10(x-1)(y-1) - 3(y-1)^2 + R_2$$

Екстремуми функції z знайти

Т. x_0 наз. екстремумом т. x_0 f , якщо $\exists \theta(x_0)$:
прич. $\Delta f(x_0)$ в цьому околі зберігає знак.

$$\Delta f(x) \leq 0 \quad - \text{max}; \quad \Delta f(x) \geq 0 \quad - \text{min}$$

Якщо f - гур., то
немає унікального екстр. $\Rightarrow df(x_0) = 0$

Дост. умови $d^2 f(x)$ - зберігає знак в $\theta(x_0)$:
якщо $d^2 f(x) > 0$ - min
 $d^2 f(x) < 0$ - max

Тодже M є тогкою мінімумом (максимумом), якщо f' - функція F , якщо матриця гуртова додативно визначена (від'ємно визначена).

Критерій Сільвестра.

Матриця додативно визначена, якщо всі головні мінори її додатні: $\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 > 0, \dots$

Матриця від'ємно визначена, якщо всі головні мінори мають таке знамення: $\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 < 0, \dots$

N 105 n Дослідити на екстремум функцію $z(x, y)$
 $z(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$

Розв'язок. Необх. умови $\begin{cases} z'_x = 3x^2 - 3y = 0 \\ z'_y = 3y^2 - 3x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = y \\ y^2 = x \end{cases}$

$\Rightarrow A_1(0, 0), A_2(1, 1)$

A_1 : крит. Сільвестра $\begin{pmatrix} z''_{xx} & z''_{xy} \\ z''_{yx} & z''_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$
 $\Delta_1 = 0 \Rightarrow$ не є екстремумом

A_2 : критер. Сільвестра $\begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$
 $\Delta_1 = 6 > 0, \Delta_2 = 27 > 0$

$\Rightarrow$ в точці A_2 локальний мінімум

A_1 : Через прирости:

$\Delta z(0, 0) = \Delta x^3 + \Delta y^3 - 3\Delta x \Delta y \sim -3\Delta x \Delta y$ — не залежить ~~від~~ $\Rightarrow$

в точці A_1 немає екстремуму

N 105 e $z(x, y) = x^4 y^2 (5 - x - y)$

Розв'язок. $\begin{cases} z'_x = 4x^3 y^2 (5 - x - y) - x^4 y^2 = x^3 y^2 (20 - 5x - 4y) = 0 \\ z'_y = 2x^4 y (5 - x - y) - x^4 y^2 = x^4 y (10 - 2x - 3y) = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow A_1(0, 0); A_2(0, y_0), y_0 \neq 0; A_3(x_0, 0), x_0 \neq 0;$

$A_4: \begin{cases} 5x + 4y = 20 \\ 2x + 3y = 10 \end{cases} \Rightarrow$

$A_4\left(\frac{20}{7}, \frac{10}{7}\right)$

$3.5y = 5, y = 5 \cdot \frac{2}{7} = \frac{10}{7}, x = \left(10 - \frac{30}{7}\right) \frac{1}{2} = \frac{20}{7}$

$\begin{pmatrix} z''_{xx} & z''_{xy} \\ z''_{yx} & z''_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x^2 y^2 (20 - 5x - 4y) - 5x^3 y^2 & 2x^3 y (20 - 5x - 4y) - 4x^4 y \\ 2x^3 y (20 - 5x - 4y) - 4x^4 y^2 & x^4 (10 - 2x - 3y) - 3x^4 y \end{pmatrix}$

$$A_4: \begin{pmatrix} -5 \cdot \left(\frac{20}{7}\right)^3 \left(\frac{10}{7}\right)^2 & -4 \left(\frac{20}{7}\right)^3 \left(\frac{10}{7}\right)^2 \\ -4 \left(\frac{20}{7}\right)^3 \left(\frac{10}{7}\right)^2 & -3 \left(\frac{20}{7}\right)^4 \left(\frac{10}{7}\right) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta_2 = \left(\frac{20}{7}\right)^6 \left(\frac{10}{7}\right)^3 \begin{pmatrix} -5 \cdot \frac{10}{7} & -4 \\ -4 & -3 \cdot \frac{20}{7} \end{pmatrix} \\ \left(\frac{20}{7}\right)^6 \left(\frac{10}{7}\right)^3 \left(\frac{15 \cdot 200}{49} - 16 \right) > 0 \end{pmatrix}$$

$$\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow A_4 \left(\frac{20}{7}, \frac{10}{7} \right)$ — локал. минимум.

$$A_1(0,0): \Delta z = \underbrace{\Delta x^4}_{\geq 0} \underbrace{\Delta y^2}_{\geq 0} \underbrace{(5 - \Delta x - \Delta y)}_{\geq 0} \geq 0 \text{ при } \Delta x \neq \Delta y \Rightarrow$$

$\Rightarrow A_1(0,0)$ — локал. минимум.

$$A_2(0, y_0 \neq 0):$$

$$\Delta z = \underbrace{\Delta x^4}_{\geq 0} \cdot \underbrace{(y_0 + \Delta y)^2}_{\geq 0} \cdot \underbrace{(5 - \Delta x - y_0 - \Delta y)}_{\geq 0}$$

при $y_0 = 5$ не является
при $y_0 < 5$ ≥ 0 min
при $y_0 > 5$ ≤ 0 max.

$$A_3(x_0 \neq 0, 0):$$

$$\Delta z = \underbrace{(x_0 + \Delta x)^4}_{\geq 0} \cdot \underbrace{\Delta y^2}_{\geq 0} \cdot \underbrace{(5 - x_0 - \Delta x - \Delta y)}_{\geq 0}$$

при $x_0 = 5$ не является
при $x_0 < 5$ ≥ 0 min
при $x_0 > 5$ ≤ 0 max

N 107 g

$$u = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z}$$

Решение:

$$\begin{cases} u'_x = 1 - \frac{y^2}{4x^2} = 0 \\ u'_y = \frac{y}{2x} - \frac{z^2}{y^2} = 0 \\ u'_z = \frac{2z}{y} - \frac{2}{z^2} = 0 \end{cases}$$

$$y = \pm 2x \quad x = \pm \frac{1}{2}$$

$$\frac{z^2}{y^2} = \pm 1 \Rightarrow z = 1$$

$$y = z^3 \quad y = 1$$

$M\left(\frac{1}{2}, 1, 1\right)$ — точка

$$\begin{pmatrix} \frac{y^2}{2x^3} & -\frac{y}{2x^2} & 0 \\ -\frac{y}{2x^2} & \frac{1}{2x} + \frac{2z^2}{y^3} & -\frac{2z}{y^2} \\ 0 & -\frac{2z}{y^2} & \frac{2}{y} + \frac{4}{z^3} \end{pmatrix} \Big|_M$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 > 0$$

$\Rightarrow$ в $M\left(\frac{1}{2}, 1, 1\right)$ — локал. минимум.

N 100 d)

$$y = x_1 + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{x_{k+1}}{x_k} + \frac{2}{x_m}, \quad x_k > 0, \quad k = \overline{1, m}$$

Решение.

$$y = x_1 + \frac{x_2}{x_1} + \frac{x_3}{x_2} + \dots + \frac{x_m}{x_{m-1}} + \frac{2}{x_m}$$

Косей. условия:

$$\begin{cases} u'_{x_1} = 1 - \frac{x_2}{x_1^2} = 0 \\ u'_{x_k} = \frac{1}{x_{k-1}} - \frac{x_{k+1}}{x_k^2} = 0, \quad k = \overline{2, m-1} \\ u'_{x_m} = \frac{1}{x_{m-1}} - \frac{2}{x_m^2} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_2 = x_1^2$$

$$x_{k+1} = \frac{x_k^2}{x_{k-1}} \Rightarrow x_{k+1} = \frac{1}{x_{k-1}} \left(\frac{x_{k-1}^2}{x_{k-2}} \right)^2 = \frac{x_{k-1}^3}{x_{k-2}^2} = \frac{1}{x_{k-2}} \left(\frac{x_{k-2}^2}{x_{k-3}} \right)^3 =$$

$$= \frac{x_{k-2}^4}{x_{k-3}^3} = \dots = \frac{x_2^k}{x_1^{k-1}} \quad \text{---} \quad x_3 = \frac{x_2^2}{x_1} = \frac{(x_1)^4}{x_1} = x_1^3$$

$$\text{---} \quad \frac{x_1^{2k}}{x_1^{k-1}} = x_1^{k+1} \Rightarrow x_k = x_1^k, \quad k = \overline{2, m}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x_1^{m-1}} - \frac{2}{x_1^{2m}} = 0 \Rightarrow x_1^{m+1} - 2 = 0 \Rightarrow x_1 = 2^{\frac{1}{m+1}}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{x_1} & -\frac{1}{x_1^2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{x_1} & -\frac{2}{x_1^2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -\frac{1}{x_1^{2m-2}} & \frac{2}{x_1^{2m-1}} \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} \frac{2}{x_1} & -\frac{1}{x_1^2} & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{1}{x_1^2} & \frac{2}{x_1^3} & -\frac{1}{x_1^4} & \dots & 0 \\ 0 & -\frac{1}{x_1^4} & \frac{2}{x_1^5} & -\frac{1}{x_1^6} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -\frac{1}{x_1^{2m-2}} & \frac{2}{x_1^{2m-1}} \end{pmatrix}$$

D/3 N105 b) g)

N106 b),

N107 e) o)

N105 io)

$$\sim \begin{pmatrix} \frac{2}{x_1} & -\frac{1}{x_1^2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{3}{2x_1^3} & -\frac{1}{x_1^4} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3x_1^5} & -\frac{1}{x_1^6} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -\frac{1}{x_1^{2m-2}} & \frac{2}{x_1^{2m-1}} \end{pmatrix} \Rightarrow \Delta_k > 0, \quad k = \overline{1, m} \Rightarrow \min$$