

Зачет № 35

Необходимо проверить
функции: векторной аргумента

Теор. (про непрерывность неявной функции)

Пусть $F: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ в некоторой точке

$(x_0, y_0) = (x_1^0, \dots, x_n^0, y_0)$ непрерывно та мат. завис. находим

$\frac{\partial F}{\partial y}$ непрерывно в т. (x_0, y_0) . Если $F(x_0, y_0) = 0$ та

$\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$, то в окрестности $\mathbb{R}^n$ та $\mathbb{R}$

$\exists O(x_0), O(y_0)$: $F(x, y) = 0$ определяет неявную
непрерывную функцию $O(x_0) \rightarrow O(y_0)$.

Теор. (про диф. неявной функции)

Пусть $F: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ - непрерывная диф. в некоторой
точке $(x_0, y_0) = (x_1^0, \dots, x_n^0, y_0)$

Если $F(x_0, y_0) = 0$ та $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$, то

$\exists O(x_0), O(y_0)$: равенство $F(x, y) = 0$ определяет
непрерывную диф. функцию $O(x_0) \rightarrow O(y_0)$ та

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} = - \frac{\partial F}{\partial x_k} \cdot \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)^{-1}$$

N93 а)

Доказать, что непрерывно та диф. на D_f
неявная функция. Убедитесь, что дифференциру-
емость означает, что дифференциал dy та dz
при этом находим 1-го та 2-го порядков
в т. M .

$$F(x, y) = x^y - y^x - 1, \quad M(3, 2).$$

Решение. Проверим выполнение условий теоремы
про непрерывно та диф. неявную функцию.

$D_F \subset \{(x, y), x > 0, y > 0\}$ F - непрерывна та дифференцируема.
ее функции двух переменных (оказывается).

$$\frac{\partial F}{\partial y} = x^y \cdot \ln x - x y^{x-1}$$

$$F(3, 2) = 3^2 - 2^3 - 1 = 9 - 8 - 1 = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(3, 2) = 3^2 \cdot \ln 3 - 3 \cdot 2^{3-1} = 9 \ln 3 - 12 \neq 0 \Rightarrow$$

$y(x)$ непрерывна та дифференцируема в некоторой окрестности точки $x_0 = 3$

$$dF = (yx^{y-1} - y^x \ln y) dx + (x^y \ln x - xy^{x-1}) dy = 0$$

$$\Rightarrow dy = \frac{yx^{y-1} - y^x \ln y}{x^y \ln x - xy^{x-1}} dx \Rightarrow \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{yx^{y-1} - y^x \ln y}{x^y \ln x - xy^{x-1}}$$

$$\frac{\partial y}{\partial x}(3) = \frac{2 \cdot 3^{2-1} - 2^3 \ln 2}{3^2 \ln 2 - 3 \cdot 2^{3-1}} = \frac{6 - 8 \ln 2}{9 \ln 2 - 12}$$

Введем $dx \equiv \text{const}$, тогда

$$d^2 F = (y(y-1)x^{y-2} - y^x (\ln y)^2) dx^2 + 2(x^{y-1} + yx^{y-1} \ln(y-1) - xy^{x-1} \ln y - y^{x-1}) dx dy + (x^y \ln^2 x - \frac{x^{y-1}}{y} - xy^{x-1} \ln(x-1)) dx - x(x-1)y^{x-2})(dy)^2 + (x^y \ln x - xy^{x-1}) d^2 y = 0$$

$$d^2 F(M) = (2 - 2^3 \ln^2 2) dx^2 + 2(3 + 2 \cdot 3 \ln 1 - 3 \cdot 2^2 \ln 2 - 2^3) dx dy + (3^2 \ln^2 3 - 3 \cdot 2 \cdot 2) dy^2 + (3^2 \ln 3 - 3 \cdot 2^2) d^2 y = 0$$

$$\Rightarrow d^2 y(M) = \frac{2 - 8 \ln^2 2}{9 \ln 3 - 12} dx^2 + \frac{2(1 + 12 \ln 2)}{9 \ln 3 - 12} dx dy - \frac{9 \ln^2 3 - 12}{9 \ln 3 - 12} dy^2 = \text{изобразим график } dy / \text{вдоль } dx$$

$$= - \frac{2 - 8 \ln^2 2}{9 \ln 3 - 12} dx^2 + \frac{2(1 + 12 \ln 2)}{9 \ln 3 - 12} \left(- \frac{6 - 8 \ln 2}{9 \ln 2 - 12} \right) dx^2 - \frac{9 \ln^2 3 - 12}{9 \ln 3 - 12} \cdot \left(- \frac{6 - 8 \ln 2}{9 \ln 2 - 12} \right)^2 dx^2 \Rightarrow \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(3)$$

№932 $F(x_1, x_2, y) = x_1 x_2 y - x_1 - x_2 - y$, $M(1, 2, 3)$

Решение. F — непрерывная функция на $\mathbb{R}^3$, ее максимум (ср. 6.1)

$$\frac{\partial F}{\partial y} = x_1 x_2 - 1$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(M) = 1 \cdot 2 - 1 = 1 \neq 0 \Rightarrow y(x_1, x_2) \text{ — непрерывная}$$

$$\text{в окрестности } (1, 2) \text{ — непрерывная}$$

$$dF = x_2 y dx_1 + x_1 y dx_2 + x_1 x_2 dy - dx_1 - dx_2 - dy = 0$$

$$\Rightarrow dy = \frac{x_2 y - 1}{x_1 x_2 - 1} dx_1 - \frac{x_1 y - 1}{x_1 x_2 - 1} dx_2 \Rightarrow \frac{\partial y}{\partial x_1} = \frac{x_2 y - 1}{1 - x_1 x_2}$$

$$\frac{\partial y}{\partial x_2} = \frac{x_1 y - 1}{1 - x_1 x_2}; \quad \frac{\partial y}{\partial x_1}(1, 2) = \frac{2 \cdot 3 - 1}{1 - 1 \cdot 2} = -5; \quad \frac{\partial y}{\partial x_2}(1, 2) = -2$$

$$d^2 F = y dx_1 dx_2 + x_2 dx_1 dy + y dx_1 dx_2 + x_1 dx_2 dy + (x_2 dx_1 + x_1 dx_2) dy + x_1 x_2 d^2 y - d^2 y = 0$$

$$\Rightarrow d^2 y \Big|_M = \frac{2}{1-x_1 x_2} (x_1 dx_2 dy + x_2 dx_1 dy + y dx_1 dx_2) \Big|_M$$

~~= / не требуется записывать dy~~

$$= \frac{2}{1-x_1 x_2} (x_1 dx_2 + x_2 dx_1 + y dx_1 dx_2)$$

$$= \frac{2}{1-1 \cdot 2} (dx_2 dy + 2 dx_1 dy + 3 dx_1 dx_2) = -2(dx_2 dy + 2 dx_1 dy + 3 dx_1 dx_2)$$

$$= -2(dx_2 \cdot (-5 dx_1 - 2 dx_2) + 2 dx_1 \cdot (-5 dx_1 - 2 dx_2) + 3 dx_1 dx_2)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} \Big|_M = 20, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_2} \Big|_M = 12, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} \Big|_M = 20$$

N94 a)

$$F(x_1, x_2, y) \equiv f(x_1 + x_2 + y, x_1^2 + x_2^2 + y^2) = 0$$

Решение. $dF = f'_1 (dx_1 + dx_2 + dy) + f'_2 (2x_1 dx_1 + 2x_2 dx_2 + 2y dy) = 0$

$$\Rightarrow dy (f'_1 + 2f'_2 y) = -f'_1 (dx_1 + dx_2) - 2f'_2 (x_1 dx_1 + x_2 dx_2)$$

$$\Rightarrow dy = - \frac{f'_1 + 2x_1 f'_2 dx_1 + f'_1 + 2x_2 f'_2 dx_2}{f'_1 + 2f'_2 y}$$

$$= - \frac{f'_1 + 2x_2 f'_2}{f'_1 + 2f'_2 y} dx_2 \quad (*)$$

$$d^2 F = f''_{11} (dx_1 + dx_2 + dy)^2 + 2f''_{12} (dx_1 + dx_2 + dy) \cdot 2(x_1 dx_1 + x_2 dx_2 + y dy) + f'_1 d^2 y + 2f'_2 (dx_1^2 + dx_2^2 + dy^2 + y dx_1 dx_2 + x_1 dx_2 dy + x_2 dx_1 dy + x_1 dx_2 dy)$$

$$\Rightarrow d^2 y = - \frac{f''_{11} (dx_1 + dx_2 + dy)^2 + 4f''_{12} (dx_1 + dx_2 + dy) (x_1 dx_1 + x_2 dx_2 + y dy) + 4f''_{22} (x_1 dx_1 + x_2 dx_2 + y dy)^2 + 2f'_2 (dx_1^2 + dx_2^2 + dy^2)}{f'_1 + 2f'_2 y}$$

Заменив dy на выражение (*), получим не требуется

N 95a

Знаем $dy_1, dy_2, d^2y_1, d^2y_2$ где
 решаем систему $y = (y_1, y_2):$
 $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} x + y_1 + y_2 = 0 \\ x^2 + y_1^2 + y_2^2 = 0 \end{cases}$$

Решение: $\begin{cases} dx + dy_1 + dy_2 = 0 \\ x dx + y_1 dy_1 + y_2 dy_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dy_1 + dy_2 = -dx \\ y_1 dy_1 + y_2 dy_2 = -x dx \end{cases}$

Реш. рассмотрим dy_1 и dy_2 :

$$dy_1 = \begin{vmatrix} -dx & 1 \\ -x dx & y_2 \end{vmatrix} / \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = \frac{(-y_2 dx + x dx)}{y_2 - y_1} \quad (*)$$

$$dy_2 = \begin{vmatrix} 1 & -dx \\ y_1 & -x dx \end{vmatrix} / \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = \frac{(-x dx + y_1 dx)}{y_2 - y_1}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial y_1}{\partial x} = \frac{x - y_2}{y_2 - y_1}, \quad \frac{\partial y_2}{\partial x} = \frac{y_1 - x}{y_2 - y_1}$$

Спробуем переписать d^2y_1 и d^2y_2 :

$$\int d^2y_1 + d^2y_2 = 0$$

$$\begin{cases} dx^2 + dy_1^2 + y_1 d^2y_1 + dy_2^2 + y_2 d^2y_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int d^2y_2 = -d^2y_1$$

$$\begin{cases} dx^2 + dy_1^2 + y_1 d^2y_1 + dy_2^2 - y_2 d^2y_1 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow d^2y_1 = \frac{dx^2 + dy_1^2 + dy_2^2}{y_2 - y_1}; \quad d^2y_2 = \frac{dx^2 + dy_1^2 + dy_2^2}{y_1 - y_2}$$

Заменяем dy_1 и dy_2 значениями из (*):

Вспомогательные (*)

$$d^2y_1 = \frac{1 + \left(\frac{x - y_2}{y_2 - y_1}\right)^2 + \left(\frac{x - y_1}{y_1 - y_2}\right)^2}{y_2 - y_1} dx^2$$

$$d^2y_2 = \frac{1 + \left(\frac{x - y_2}{y_2 - y_1}\right)^2 + \left(\frac{x - y_1}{y_1 - y_2}\right)^2}{y_1 - y_2} dx^2$$

N96 2 Задача гиперфункции dy, d^2y
 где $y(x_1, x_2)$, мы знаем канонический:

$$\begin{cases} x_1 - t_1^2 - t_2^2 = 0 \\ x_2 - t_1^2 + t_2^2 = 0 \\ y - 2t_1 t_2 = 0 \end{cases}$$

Решение гиперфункции можно решить следующим образом:

$$\begin{cases} dx_1 - 2t_1 dt_1 - 2t_2 dt_2 = 0 \\ dx_2 - 2t_1 dt_1 + 2t_2 dt_2 = 0 \\ dy - 2t_2 dt_1 - 2t_1 dt_2 = 0 \end{cases}$$

Здесь же п.в.ч. по dt_1 и dt_2

$$\begin{cases} t_1 dt_1 + t_2 dt_2 = \frac{dx_1}{2} \\ t_1 dt_1 - t_2 dt_2 = \frac{dx_2}{2} \\ dy = 2t_2 dt_1 + 2t_1 dt_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} dt_1 = \frac{\begin{vmatrix} \frac{dx_1}{2} & t_2 \\ \frac{dx_2}{2} & -t_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} t_1 & t_2 \\ t_1 & -t_2 \end{vmatrix}} \\ dt_2 = \frac{\begin{vmatrix} t_1 & \frac{dx_1}{2} \\ t_1 & \frac{dx_2}{2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} t_1 & t_2 \\ t_1 & -t_2 \end{vmatrix}} \\ dy = 2t_2 dt_1 + 2t_1 dt_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow dt_1 = \frac{1}{2} \frac{-t_2 dx_1 - t_2 dx_2}{t_1^2 - t_2^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{dx_1}{t_1} + \frac{dx_2}{t_1} \right)$$

$$dt_2 = \frac{1}{2} \frac{t_1 dx_2 - t_1 dx_1}{t_1^2 - t_2^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{dx_1}{t_2} - \frac{dx_2}{t_2} \right)$$

$$dy = \frac{t_2}{t_1} (dx_1 + dx_2) + \frac{t_1}{t_2} (dx_1 - dx_2) =$$

$$= \left(\frac{t_2}{t_1} + \frac{t_1}{t_2} \right) dx_1 + \left(\frac{t_2}{t_1} - \frac{t_1}{t_2} \right) dx_2$$

$$d^2y = \left(\frac{t_1 dt_2 - t_2 dt_1}{t_1^2} + \frac{t_2 dt_1 - t_1 dt_2}{t_2^2} \right) (dx_1 + dx_2) =$$

$$= \left(\frac{\frac{1}{2} \left(\frac{t_1}{t_2} (dx_1 - dx_2) - \frac{t_2}{t_1} (dx_1 + dx_2) \right)}{t_1^2} + \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{t_2}{t_1} (dx_1 + dx_2) - \frac{t_1}{t_2} (dx_1 - dx_2) \right)}{t_2^2} \right) \cdot (dx_1 + dx_2)$$

N 97 б)

Для отображения $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ заданы
дифференциалы 1-го и 2-го порядков в
обернутой функции, если

$f: (x_1, x_2) \rightarrow (\varphi(x_1, x_2), \psi(x_1, x_2))$, где
 φ и ψ — диф. функции кинематический разл.

Решение.

$$\begin{cases} y_1 = \varphi(x_1, x_2) \\ y_2 = \psi(x_1, x_2) \end{cases}$$

Однрч. $q = f^{-1}: (y_1, y_2) \rightarrow (x_1, x_2)$

тогда $dx_1, dx_2 = ?$

$d^2x_1, d^2x_2 = ?$

$$\begin{cases} dy_1 = \varphi'_{x_1} dx_1 + \varphi'_{x_2} dx_2 \\ dy_2 = \psi'_{x_1} dx_1 + \psi'_{x_2} dx_2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$dx_1 = \begin{vmatrix} dy_1 & \varphi'_{x_2} \\ dy_2 & \psi'_{x_2} \end{vmatrix} / \begin{vmatrix} \varphi'_{x_1} & \varphi'_{x_2} \\ \psi'_{x_1} & \psi'_{x_2} \end{vmatrix} = \frac{\psi'_{x_2} dy_1 - \varphi'_{x_2} dy_2}{\varphi'_{x_1} \psi'_{x_2} - \psi'_{x_1} \varphi'_{x_2}}$$

$$dx_2 = \begin{vmatrix} \varphi'_{x_1} & dy_1 \\ \psi'_{x_1} & dy_2 \end{vmatrix} / \begin{vmatrix} \varphi'_{x_1} & \varphi'_{x_2} \\ \psi'_{x_1} & \psi'_{x_2} \end{vmatrix} = \frac{\varphi'_{x_1} dy_2 - \psi'_{x_1} dy_1}{\varphi'_{x_1} \psi'_{x_2} - \psi'_{x_1} \varphi'_{x_2}}$$

$$\begin{cases} 0 = \varphi''_{x_1 x_1} dx_1^2 + 2\varphi''_{x_1 x_2} dx_1 dx_2 + \varphi''_{x_2 x_2} dx_2^2 + \\ + \varphi'_{x_1} d^2x_1 + \varphi'_{x_2} d^2x_2 \\ 0 = \psi''_{x_1 x_1} dx_1^2 + 2\psi''_{x_1 x_2} dx_1 dx_2 + \psi''_{x_2 x_2} dx_2^2 + \\ + \psi'_{x_1} d^2x_1 + \psi'_{x_2} d^2x_2 \end{cases} \quad (*)$$

$\Rightarrow$ Решить систему лнч. рвн. относительно
 d^2x_1, d^2x_2 и подставить значения dx_1 и dx_2
выражен (*)

9/3

N 93 б) 2)

; N 94 б) 2)

N 95 б) 2)

N 96 б) 2)

3)