Заняття 34. Похідні та диференціали вищих порядків для функції багатьох змінних

№85а Для функції $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ порівняти мішані похідні в точці $(0,0)$, якщо

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2>0 \\ 0, & x=y=0 \end{cases}$$

Розв'язок

$$f'_x(x,y) = y\cdot\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + \frac{4x^2y^3}{(x^2+y^2)^2},$$

$$f'_y(x,y) = x\cdot\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} - \frac{4x^3y^2}{(x^2+y^2)^2}, \quad x^2+y^2>0$$

$$f'_x(0,0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{0}{x} = 0$$

$$f'_y(0,0) = \lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = \lim_{y\to 0}\frac{0}{y} = 0$$

$$f''_{xy}(0,0) = \lim_{y\to 0}\frac{f'_x(0,y)-f'_x(0,0)}{y} = \lim_{y\to 0}\frac{-y}{y} = -1$$

$$f''_{yx}(0,0) = \lim_{x\to 0}\frac{f'_y(x,0)-f'_y(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{x} = 1$$

$$\Rightarrow f''_{xy}(0,0) \neq f''_{yx}(0,0).$$

№86 а) Дослідити функцію $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ та всі її похідні до другого порядку включно на неперервність на області визначення, якщо

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\sqrt{-\ln(x^2+y^2)}, & x^2+y^2>0 \\ 0, & x=y=0 \end{cases}$$

Розв'язок. D_f: $\ln(x^2+y^2)\le 0 \Rightarrow x^2+y^2\le 1 \Rightarrow$

$D_f = \{(x,y) \mid x^2+y^2\le 1\}$ – круг

При $1\ge x^2+y^2>0$ неперервність очевидна: f – непер. як композиція непер. ф-й

$(0,0)$: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} |xy|\sqrt{-\ln(x^2+y^2)} = \left|\text{Невизн. } 0\cdot\infty\right| \le$

$= \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2+y^2}{2}\sqrt{-\ln(x^2+y^2)} = \lim\limits_{t\to +0}\dfrac{t}{2}\sqrt{-\ln t} = \left|z=\dfrac{1}{t}\right| =$

$= \lim\limits_{z\to+\infty}\dfrac{\sqrt{\ln z}}{2z} = 0 = f(0,0) \Rightarrow f$ – непер. в $(0,0)$.

$$f'_x(x,y) = y\sqrt{-\ln(x^2+y^2)} + xy\frac{1}{2\sqrt{-\ln(x^2+y^2)}}\left(-\frac{1}{x^2+y^2}\cdot 2x\right)$$

$$f'_y(x,y) = x\sqrt{-\ln(x^2+y^2)} + xy\frac{1}{2\sqrt{-\ln(x^2+y^2)}}\left(-\frac{1}{x^2+y^2}\cdot 2y\right)$$

– непер. при $x^2+y^2>0$

$$f'_x(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x} = 0 = f'_y(0,0)$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f'_x(x,y) = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{y\cdot(x^2+y^2)\cdot(-\ln(x^2+y^2)) + x^2y}{(x^2+y^2)\sqrt{-\ln(x^2+y^2)}} = 0 = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f'_y(0,0)$$

$\Rightarrow f'_x$ — непер. в $(0,0)$

~~$\exists / x_n = y_n = \frac{1}{n}$: $\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}\cdot\frac{2}{n^2}(-\ln(\frac{2}{n^2})) + \frac{1}{n^3}}{\frac{2}{n^2}\sqrt{-\ln\frac{2}{n^2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\ln\frac{n^2}{2}}$~~

~~$\exists / x_n = y_n = \frac{1}{n}$: $\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}\cdot\frac{2}{n^2}(-\ln(\frac{2}{n^2})) + \frac{1}{n^3}}{\frac{2}{n^2}\sqrt{-\ln\frac{2}{n^2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{2\ln\frac{n^2}{2}}$~~

$$f''_{xx} = \frac{\left(\left(y\cdot 2x(-\ln(x^2+y^2)) + y(x^2+y^2)\left(-\frac{2x}{x^2+y^2}\right) + 2xy\right)(x^2+y^2)\sqrt{-\ln(x^2+y^2)} - }{}$$
$$\frac{-(y(x^2+y^2)(-\ln(x^2+y^2)) + x^2y)}{(x^2+y^2)^2(-\ln(x^2+y^2))} =$$

$$= -\frac{x^3y}{(-\ln(x^2+y^2))^{3/2}} - \frac{xy}{\sqrt{-\ln(x^2+y^2)}\,(x^2+y^2)} + \frac{2x^2y^2}{\sqrt{-\ln(x^2+y^2)}\,(x^2+y^2)^2}$$

$$f''_{xx}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f'_x(x,0) - f'_x(0,0)}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{0-0}{x} = 0 \quad \Rightarrow f''_{xx} \text{ — непер на } x^2+y^2<1$$

Аналогічно f''_{yy} непер

$$f''_{xy}(x,y) = -\frac{x^2y^2}{(-\ln(x^2+y^2))^{3/2}\cdot(x^2+y^2)^2} + \frac{2x^2y^2}{\sqrt{-\ln(x^2+y^2)}\cdot(x^2+y^2)^2}$$

$x^2+y^2>0$

$$f''_{xy}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f'_x(0,y) - f'_x(0,0)}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{y^3\cdot(-\ln y^2)}{y^2\sqrt{-\ln y^2}} = 0$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f_{xy}(x,y) = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} -\frac{x^2y^2}{(-\ln(x^2+y^2))^{3/2}(x^2+y^2)^2} + \frac{2x^2y^2}{\sqrt{-\ln(x^2+y^2)}\cdot(x^2+y^2)^2} = 0 = f_{xy}(0,0)$$

$\Rightarrow f''_{xy}(x,y)$ — непер. при $x^2+y^2 \le 1$

N 87 г) Знайти всі похідні до другого порядку включно, перші та другі диференціали

$$F = f(x^2+y^2+z^2), \quad (x,y,z)\in\mathbb{R}^3$$

<u>Розв'язок.</u>

$$\frac{\partial F}{\partial x} = f'(x^2+y^2+z^2)\cdot 2x, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = f'(x^2+y^2+z^2)\cdot 2y, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = f'(x^2+y^2+z^2)\cdot 2z$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = f''(x^2+y^2+z^2)\cdot 4x^2 + f'(x^2+y^2+z^2)\cdot 2$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = f''(x^2+y^2+z^2)\cdot 4y^2 + f'(x^2+y^2+z^2)\cdot 2$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = f''(x^2+y^2+z^2)\cdot 4z^2 + f'(x^2+y^2+z^2)\cdot 2$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y} = F''_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) = f''(x^2+y^2+z^2)\cdot 2x\cdot 2y = \frac{\partial^2 F}{\partial y\,\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} = f''(x^2+y^2+z^2)\cdot 2y \cdot 2z = \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial y}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} = f''(x^2+y^2+z^2)\cdot 2x \cdot 2z = \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial x}$$

$$dF = f'(x^2+y^2+z^2)\cdot d(x^2+y^2+z^2) = f'(x^2+y^2+z^2)(2x\,dx + 2y\,dy + 2z\,dz)$$

$$d^2F = f''(x^2+y^2+z^2)(2x\,dx+2y\,dy+2z\,dz)^2 + f'(x^2+y^2+z^2)\cdot 2\cdot$$
$/dx = const,\ dy = const,\ dz = const/$
$$\cdot d(x\,dx + y\,dy + z\,dz) = f''(x^2+y^2+z^2)(2x\,dx+2y\,dy+2z\,dz)^2 +$$
$$+ f'(x^2+y^2+z^2)\cdot 2\cdot((dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2)$$

Або $d^2F = \left(dx\frac{\partial}{\partial x} + dy\frac{\partial}{\partial y} + dz\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 F =$
$$= \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}dy^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}dz^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}dx\,dy +$$
$$+ 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z}dx\,dz + 2\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z}dy\,dz$$

N 87 в $F = f(x+y, zx)$, $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$

Розв'язок $dF = f_1'(x+y, zx)\cdot d(x+y) + f_2'(x+y, zx)\cdot d(zx) =$
$$= f_1'(\cdot,\cdot)(dx+dy) + f_2'(\cdot,\cdot)(x\,dz + z\,dx)$$
$$\Rightarrow \frac{\partial F}{\partial x} = f_1' + z\cdot f_2';\quad \frac{\partial F}{\partial y} = f_1';\quad \frac{\partial F}{\partial z} = f_2'\cdot x.$$
$$d^2F = \left(dx\frac{\partial}{\partial x} + dy\frac{\partial}{\partial y} + dz\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 F =$$
$$= \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}dy^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}dz^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}dx\,dy +$$
$$+ 2\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z}dy\,dz + 2\frac{\partial^2 F}{\partial z \partial x}dz\,dx =$$

$/\ \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = f''_{11}\cdot 1 + f''_{12}\cdot z + z\cdot f''_{21} + z^2 f''_{22} = f''_{11} + 2z f''_{12} + z^2 \ldots$

$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = f''_{11}\cdot 1 + z f''_{21};$

$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} = f''_{12}\cdot x + f_2' + z f''_{22}\cdot x$

$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = f''_{11};\quad \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} = f''_{12}\cdot x;$

$\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = f''_{22}x^2$ /

$$= (f''_{11} + 2z f''_{12} + z^2 f''_{22})dx^2 + 2(f''_{11} + z f''_{21})dx\,dy +$$
$$+ 2(f''_{12}x + f_2' + z f''_{22}\cdot x)dx\,dz + f''_{11}dy^2 + f''_{12}x\,dy\,dz +$$
$$+ f''_{22}x^2 dz^2$$

Або $d^2F = d(dF) = d\left(f_1'\cdot(dx+dy) + f_2'\cdot(xdz+zdx)\right) =$

$= f_{11}''(dx+dy)^2 + 2f_{12}''(dx+dy)(xdz+zdx) + f_{22}''(xdz+zdx)^2 +$

$+ f_2'\cdot(dxdz+dzdx) =$

$= dx^2(f_{11}'' + 2f_{12}''z + f_{22}''z^2) + dxdy(2f_{11}'') + dy^2(f_{11}'') +$

$+ dxdz(2f_{12}''x + 2f_{22}''xz + 2f_2') + dydz(2f_{12}''\cdot x) + dz^2(f_{22}''x$

№88 к) $F = e^{x+y^2-z^3}$, $M(-1,3,2)$.

Розв'язок.

№89 а) $f(x,y) = (x+1)\sin\frac{1}{y^2}$ $\qquad \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}$ – ?

№90 g) $f(x,y) = x^m y^n$ $\qquad \frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m \partial y^n} f(0,0)$ – ?

Д/З №85 б), №86 б), №87 б), в), №88 р) №89 б), №90 а), №91 б)