Заняття 33. Диференційованість функцій векторного аргумента.

Озн. Відображення $G \xrightarrow{f} F$ ($G \subset E$) наз. диференційованим в т. $x_0 \in G$, якщо $\exists$ лін. відображення L

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\| f(x) - f(x_0) - L(x - x_0) \|_2}{\| x - x_0 \|_1} = 0$$

Озн. $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ наз. диф. в т. $(x_0, y_0) \in D_f$, якщо приріст Δf можна подати у вигляді

$$\Delta f(x_0, y_0) = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho), \quad \rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

f – диф. в т. (x_0, y_0) $\Leftrightarrow$ ~~$\exists \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0) - A\Delta x$~~

$\Leftrightarrow$

$$\exists \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0) - A\Delta x - B\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = 0.$$

Якщо f – диф. в т. (x_0, y_0), то $A = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$

$B = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$.

Частинні похідні: $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}.$$

$\boxed{N75a}$ Знайти частинні похідні 1-го порядку, дослідити їх на неперервність, а також дослідити функцію f на диференційовність

$f(x, y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$.

<u>Розв'язок</u> $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{3}(x^3+y^3)^{-2/3} \cdot 3x^2 = \frac{x^2}{\sqrt[3]{(x^3+y^3)^2}}$ $\quad x \neq -y$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt[3]{(\Delta x)^3} - 0}{\Delta x} =$$

$$= 1 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \frac{y^2}{\sqrt[3]{(x^3+y^3)^2}}$$

$\frac{\partial f}{\partial x}$ та $\frac{\partial f}{\partial y}$ – непер. якщо $x \neq -y$

Дослідимо f на диф. в т. $(0,0)$

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \frac{\Delta f(0,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\Delta x - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}} =$$

$$= \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \frac{\sqrt[3]{(\Delta x)^3+(\Delta y)^3} - \sqrt[3]{0^3+0^3} - \Delta x - \Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}} =$$

$$= \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \frac{\sqrt[3]{(\Delta x)^3+(\Delta y)^3} - \Delta x - \Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}} \neq 0$$

Дійсно, якщо $\Delta x = \Delta y = \frac{1}{n}$, то

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{\frac{1}{n^3}+\frac{1}{n^3}} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n}}{\sqrt{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}}} = \frac{\sqrt[3]{2}-2}{\sqrt{2}} \neq 0$$

$\Rightarrow f$ не диф. в т. $(0,0)$.

Достатня умова диф. Якщо $\exists$ ~~неперервні~~ частинні похідні $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$, неперервні в деякому околі т. (x_0,y_0), то f – диф. в т. (x_0,y_0).

$\Rightarrow f(x,y) = \sqrt[3]{x^3+y^3}$ – диф. $\forall (x_0,y_0):\ x_0 \neq -y_0$

$\boxed{N75e)}$ $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2>0 \\ 0, & x=y=0 \end{cases}$

Розв'язок. Перевіримо спочатку неп. f в т. $(0,0)$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}} \le$$

$$\le \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{|xy|}{\sqrt{2|xy|}} = \lim_{z\to 0} \sqrt{\frac{|z|}{2}} = 0 = f(0,0)$$

$\Rightarrow f$ – неперервна на $\mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y\sqrt{x^2+y^2} - xy\cdot\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}\cdot 2x}{x^2+y^2} = \frac{y(x^2+y^2)-x^2y}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \frac{y^3}{(x^2+y^2)^{3/2}}.$$

$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x^3}{(x^2+y^2)^{3/2}}$. f'_x та f'_y – неп. $\forall (x_0,y_0)\neq(0,0)$

$\Rightarrow f$ – диф. $\forall (x_0,y_0)\neq(0,0)$.

Дослідимо на диф. в т. $(0,0)$:

$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{0-0}{\Delta x} = 0$

$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0.$

$\lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\Delta f(0,0) - 0 \cdot \Delta x - 0 \cdot \Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = \lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\frac{\Delta x \Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} =$

$= \lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta x^2 + \Delta y^2} \neq 0.$

Дійсно, $\Delta x = \Delta y = \frac{1}{n} \Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{2/n^2} = \frac{1}{2} \neq 0$

$\Rightarrow f$ не диф. в $(0,0)$.

$\boxed{N\ 75\ m}$ $f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2) \cdot \sin \frac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 > 0 \\ 0, & x = y = 0 \end{cases}$

Розв'язок. $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} (x^2+y^2) \sin \frac{1}{x^2+y^2} = 0 = f(0,0) \Rightarrow$

$\Rightarrow f$ - неп. на $\mathbb{R}^2$.

$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \sin \frac{1}{x^2+y^2} + (x^2+y^2) \cos \frac{1}{x^2+y^2} \cdot \left(-\frac{1}{(x^2+y^2)^2}\right) \cdot 2x$

$= 2x \cdot \sin \frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2x}{x^2+y^2} \cos \frac{1}{x^2+y^2}$

$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y \sin \frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2y}{x^2+y^2} \cos \frac{1}{x^2+y^2}$

f'_x та f'_y - неп. $\forall (x_0, y_0) \neq (0,0)$

$\Rightarrow f$ - диф. $\forall (x_0, y_0) \neq (0,0)$

Дослід. $x_0 = 0, y_0 = 0$.

$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} =$

$= \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{(\Delta x)^2 \sin \frac{1}{(\Delta x)^2}}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta x \cdot \sin \frac{1}{(\Delta x)^2} = 0$

$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$

$\lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\Delta f(0,0) - 0 \cdot \Delta x - 0 \cdot \Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} =$

$= \lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{(\Delta x^2 + \Delta y^2) \sin \frac{1}{\Delta x^2 + \Delta y^2}}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = 0$

$\Rightarrow f$ - диф. в т. $(0,0)$.

$\boxed{N74\ a)}$ За допомогою першого диференціала наближено знайти значення ~~sin 29°·tg 76°~~ $(16{,}02)^{\frac{1}{3.97}}$

Розв'язок. $f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) \approx f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\Delta y$

$f(x,y) = x^{\frac{1}{y}}$, $x_0 = 16$, $y_0 = 4$, $\Delta x = 0{,}02$, $\Delta y = -0{,}03$

$16.02^{\frac{1}{3.97}} = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) \approx 16^{\frac{1}{4}} + f'_x(16,4)\cdot 0{,}02 - f'_y(16,4)\cdot 0.03 \ominus$ / $f'_x = \frac{1}{y}x^{\frac{1}{y}-1}$

$f'_y = (e^{\frac{\ln x}{y}})' = x^{\frac{1}{y}}\cdot\left(-\frac{\ln x}{y^2}\right)$

$\ominus\ 2 + \frac{1}{4}\cdot 16^{-\frac{3}{4}}\cdot 0.02 + 16^{\frac{1}{4}}\cdot\frac{\ln 16}{16} =$

$= 2 + \frac{1}{32}\cdot 0.02 + \frac{\ln 2}{2}$

$\boxed{N79\ a)-1)}$ Знайти похідну в напрямку орту e в точці M, якщо

$f(x,y) = (x-y)^2 + 2x - 4y$, $M(-1,1)$,

орт e утворює кут $\alpha = \frac{\pi}{3}$ з додатнім напрямком осі Ox.

Розв'язок. Якщо f – диф. в т. (x_0,y_0), то f має похідну в будь-якому напрямку e.

При цьому $\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial e} = (\operatorname{grad} f(x_0,y_0), e)$ (скалярний добуток),

$\operatorname{grad} f(x_0,y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right)$.

$\frac{\partial f}{\partial x} = 2(x-y)+2$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 2(x-y)(-1) - 4$.

$\frac{\partial f}{\partial x}(M) = 2\cdot(-1-1)+2 = -2$ $\frac{\partial f}{\partial y}(M) = 2(-1-1)(-1)-4 = 0$

$\Rightarrow \operatorname{grad} f(M) = (-2, 0)$

$e = \left(\cos\frac{\pi}{3}, \sin\frac{\pi}{3}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$\frac{\partial f}{\partial e}(M) = \left((-2,0), \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) = -2\cdot\frac{1}{2} + 0\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = -1$

Д/З N75 б), д); N74 б), N79 б), N80 a)

N81 г) N85 б)