

Зачет 32

Функции векторного аргумента.
Положим, непрерывность, непрерывность.
Равномерная непрерывность.

N 49 0) 1) $f(x,y) = \left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}$; $\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} f(x,y) = ?$

Решение:

$$x_n' = y_n' = n; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n', y_n') =$$

$$x_n'' = ; y_n'' = ; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n'', y_n'') =$$

N 49 0-3) $f(x,y) = \left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}$, $a=b=+0$, $\lim_{\substack{x \rightarrow +0 \\ y \rightarrow +0}} f(x,y) = ?$

$$x_n' = ; y_n' =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n', y_n') =$$

$$x_n'' = ; y_n'' = ; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n'', y_n'') =$$

N 49 p-1 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (x^2+y^2)^{x^2 y^2} = ?$

Решение. Покажем, что $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (x^2+y^2)^{x^2 y^2} = 1$

Добавим,
 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (x^2+y^2)^{x^2 y^2} \geq \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (2|xy|)^{x^2 y^2} = \lim_{z \rightarrow +0} (2z)^{z^2} =$

$$= \lim_{z \rightarrow +0} e^{z^2 \ln(2z)} = \lim_{w \rightarrow +\infty} e^{-\frac{1}{w} \ln \frac{1}{2w}} = e^{\frac{\ln w + \ln 2}{w}} = 1$$

Так как $\lim_{z \rightarrow +0} \frac{\ln w + \ln 2}{w} = 0$, то среднее арифметическое $\geq$ среднего гармонического.

$$\frac{x^2+y^2}{2} \geq \sqrt{x^2 y^2}$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (x^2+y^2)^{x^2 y^2} \leq \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (x^2+y^2)^{\frac{(x^2+y^2)^2}{2}} =$$

$$= \lim_{u \rightarrow +0} \frac{u}{\sqrt{u}} = \lim_{u \rightarrow +0} \sqrt{u} = 0$$

$$= \lim_{v \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{v}} = 0$$

[N50 d)]

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0 \\ z \rightarrow 0}} \frac{xyz}{(e^x - 1)(e^y - 1)(e^z - 1)} = ?$$

Rozwiązanie

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0 \\ z \rightarrow 0}} \frac{xyz}{(e^x - 1)(e^y - 1)(e^z - 1)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{e^x - 1} \cdot \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{e^y - 1} \cdot \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{e^z - 1} = \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{e^x - 1} \right)^3$$

$$= \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x + o(x) - 1} \right)^3 = 1$$

[N50 e-1)]

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0 \\ z \rightarrow 0}} \frac{e^{xy^2z^3} - 1}{e^{x^3y^2z} - 1}$$

Rozwiązanie

$$x_n \rightarrow 0, y_n \rightarrow 0, z_n \rightarrow 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{1}{n^6}} - 1}{e^{\frac{1}{n^6}} - 1} = 1$$

$$x_n'' = \frac{1}{n^2}, y_n'' = z_n'' = \frac{1}{n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{1}{n^7}} - 1}{e^{\frac{1}{n^9}} - 1}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^7}}{\frac{1}{n^9}} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 = \infty$$

$$\Rightarrow \lim \nexists$$

[N52 a)]

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 2}} (1 + xy)^{\frac{1}{x^2 + xy}} \quad \text{③ / L'Hôpital's rule}$$

Rozwiązanie

$$\text{③ } \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2x)^{\frac{1}{x^2 + 2x}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{\ln(1 + 2x)}{x^2 + 2x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{2x + o(x)}{x^2 + 2x}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^1 = e$$

[N55 a)]

Doświadczamy, że ciąg funkcji

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^4 + y^4} & , \quad x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & , \quad x = y = 0 \end{cases}$$

Rozwiązanie

Wyznaczamy, czy w każdym punkcie $\mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$ jest równoznaczność ciągów funkcji. Sprawdźmy w punkcie $(0, 0)$: $x_0 = 0, y_0 = 0$.

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) \stackrel{?}{=} f(x_0, y_0)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2y}{x^4 + y^4} \neq 0 \quad \text{Dowód: } x_n = y_n = \frac{1}{n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^3}}{\frac{2}{n^4}} = \infty \neq 0$$

$\Rightarrow f$ - nie jest ciągła w punkcie $(0, 0)$.

NSS K

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\sin \pi x} + \frac{1}{\sin \pi y}, & (x \notin \mathbb{Z}) \wedge (y \notin \mathbb{Z}) \\ 1, & (x \in \mathbb{Z}) \vee (y \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

Розб'язок

$$\sin \pi x = 0 \Rightarrow x = n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow f - \text{непер. } \forall (x, y): (x \notin \mathbb{Z}) \wedge (y \notin \mathbb{Z})$$

$$\text{Нев. } x_0 \in \mathbb{Z}, y_0 \notin \mathbb{Z}$$

$$\text{Нев. } x_0 \notin \mathbb{Z}, y_0 \in \mathbb{Z}$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) \neq$$

$$f(x, y) \neq$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) \neq$$

$$f(x, y) \neq$$

$$\Rightarrow f \text{ розривна нв } x_0 \in \mathbb{Z}, \text{ або } y_0 \in \mathbb{Z}$$

NSS C

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } (x, y) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \vee (x, y) \in \mathbb{Q} \vee (x=0 \wedge y=0) \\ \frac{1}{n}, & \text{якщо } (x = \frac{m}{n} - \text{нескоротли, } m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}) \wedge y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ \frac{1}{p}, & \text{якщо } (y = \frac{p}{q} - \text{нескоротли, } p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}) \wedge x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Розб'язок

$$1) x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, y_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \quad f(x_0, y_0) = 0$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = ?$$

$$\text{Розгл. } \forall \text{ посл. } \{(x_n, y_n)\} \rightarrow \{x_0, y_0\}$$

$$\text{Нев. } \{(x_n, y_n)\} \in \mathbb{Q} \quad \text{або } \{(x_n, y_n)\} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$$

$$\lim = 0$$

$$\text{Нев. } \{(x_n, y_n)\}: x_n \in \mathbb{Q}, y_n \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$$

$$f(x_n, y_n) = \frac{1}{k_n}, \text{ де } k_n - \text{стан. гр. } x_n$$

$$f(x_n, y_n) \rightarrow 0, \text{ оскільки } x_n \rightarrow \text{иправ. нв } x_0$$

$$\text{Але нв } f(x_n, y_n) \rightarrow 0 \text{ нв } x_n \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, y_n \in \mathbb{Q}$$

$$\Rightarrow f - \text{непер. в } (x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, y_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$$

$$2) x_0 = y_0 = 0. \text{ Але нв } \forall (x_n, y_n)$$

$$f(x_n, y_n) \rightarrow f(x_0, y_0) = 0$$

$$3) x_0 \in \mathbb{Q}, y_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \quad f(x_0, y_0) = \frac{1}{n_0}$$

$$\text{Але } \exists \{x_n\} \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}: x_n \rightarrow x_0$$

$$f(x_n, y_0) \rightarrow 0 \neq \frac{1}{n_0} \Rightarrow f - \text{розривна в } (x_0, y_0)$$

$$4) \text{ Але нв } \text{нв } x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \text{ та } y_0 \in \mathbb{Q} \quad f - \text{розр.}$$

$$5) x_0 \in \mathbb{Q}, y_0 \in \mathbb{Q} \quad f(x_0, y_0) = 0$$

$\text{Вер } x_n \rightarrow x_0, n \rightarrow \infty \quad \{x_n\} \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$
 $\{y_n\} \subset \mathbb{Q} \quad y_n = y_0$
 $f(x_n, y_n) = \frac{1}{y_0} \neq 0 \Rightarrow f - \text{разрывн.}$

№60 §-4) Доказать, что функции непрерывны на множествах D
 $X \subset \mathbb{R}^2, Y \subset \mathbb{R}$ с евклидовой метрикой,
 $f(x, y) = \sin \frac{\pi}{1-x^2-y^2}, D = \{(x, y) | x^2+y^2 < \frac{1}{2}\}$

Развязок.

Озн. Функция $f: X \rightarrow Y$ наз. равномерно непрерывной на множестве $M \subset D_f$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall (x_1, x_2) \in M \quad \rho_1(x_1, x_2) < \delta \Rightarrow \rho_2(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$$

Теор. Кантора. Непр. на компактах $K \subset X$ функции

$f: X \rightarrow \mathbb{R}$ равномерно непрерывны на множестве

$f(x, y) = \sin \frac{\pi}{1-x^2-y^2}$ не удовлетворяет условию
 $\{(x, y) | x^2+y^2=1\}$ — точки разрыва f .

Але эти точки $\notin D$. Тому будем доказывать равномерную непрерывность f .

Рассмотрим $\bar{D} = \{(x, y) | x^2+y^2 \leq \frac{1}{2}\}$ — замыкание D ; $\bar{D}$ — компакт (один из замкнутых и ограниченных).

$\Rightarrow$ за теор. Кантора f — р.н. на $\bar{D} \Rightarrow \Rightarrow f$ — р.н. на D .

№60 §-5) $f(x, y) = \sin \frac{\pi}{1-x^2-y^2}, D = \{(x, y) | x^2+y^2 < 1\}$

Развязок f — непрерывна на D . Але

область D касается области разрыва $x=1$ f $\{(x, y) | x^2+y^2=1\}$.

Тому будем доказывать, что f не в р.н.

$$(x_n', y_n') : \frac{\pi}{1-x_n'^2-y_n'^2} = 2\pi n \Rightarrow x_n'^2+y_n'^2 = 1 - \frac{1}{2n}$$

$$x_n' = \sqrt{1 - \frac{1}{2n}} \cos \alpha, \quad y_n' = \sqrt{1 - \frac{1}{2n}} \sin \alpha$$

$$(x_n'', y_n'') : \frac{\pi}{1-x_n''^2-y_n''^2} = \frac{\pi}{2} + 2\pi n \Rightarrow$$

$$x_n'' = \sqrt{1 - \frac{1}{\frac{1}{2} + 2n}} \cos x = \sqrt{1 - \frac{2}{1+4n}} \cos x, \quad y_n'' = \sqrt{1 - \frac{2}{1+4n}} \sin x$$

$$|f(x_n', y_n') - f(x_n'', y_n'')| =$$

$$\rho((x_n', y_n'), (x_n'', y_n'')) = (x_n'' - x_n')^2 + (y_n'' - y_n')^2$$

$$= \left(\sqrt{1 - \frac{2}{1+4n}} \cos x - \sqrt{1 - \frac{1}{2n}} \cos x \right)^2 + \left(\sqrt{1 - \frac{2}{1+4n}} \sin x - \sqrt{1 - \frac{1}{2n}} \sin x \right)^2$$

$$= \cos^2 x \left(\sqrt{\frac{4n-1}{4n+1}} - \sqrt{\frac{1}{2n}} \right)^2 + \sin^2 x \left(\sqrt{1 - \frac{2}{1+4n}} - \sqrt{1 - \frac{1}{2n}} \right)^2$$

$$\rightarrow 0 \quad \text{wenn } n \rightarrow \infty$$

$$|f(x_n'', y_n'') - f(x_n', y_n')| = \sin 2\pi n = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)$$

$$= \left| \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) - \sin 2\pi n \right| = 1 - 0 = 1 \neq 0, \quad n \rightarrow \infty$$

$$\Rightarrow f \text{ ist } \in \mathcal{P}_4 \text{ aber } \notin \mathcal{D}$$

$$\mathcal{D}/3 \quad N50 \ a-1), \quad N51 \ a, \quad N52 \ d), \ 1)$$

$$N55 \ b) \ 2), \quad N60 \ g-1), \ 2), \ 3)$$