

Занемен 31

Функції векторного аргументу
(багатоох змінних)
Норми. Збіжність в норм. просторі.
Метрика. Повторно та поглиблено/поглиблено читати

Q34. Нехай E - векторний простір над полем $K = \mathbb{R}$.
Визнач. $\|\cdot\|: E \rightarrow \mathbb{R}^+$ наз. нормою в просторі E ,
якщо $\forall (x \in E, y \in E, \lambda \in K)$ викон. аксіом:
1) $\|x\| = 0 \Rightarrow x = \theta$ (нульовий елемент)
2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$
3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (нерівн. трикутника)

[N8 a) 2] Чи можна в лінійному просторі X одразу
ввести норми відповідно функції

$$a) X = C^1[a, b], \quad \|x\| = |x(b) - x(a)| + \max_{t \in [a, b]} |x'(t)|$$

Розв'язок. Перевіримо 1-у аксіому:

$$1) \|x\| = 0 \Rightarrow \max_{t \in [a, b]} |x'(t)| = 0 \Rightarrow$$

$$\forall t \in [a, b] \quad x'(t) = 0 \Rightarrow x(t) = \text{const}, \quad t \in [a, b]$$

Контрприклад $x(t) \equiv 1, \quad \|x\| = 0,$

але $x(t) \equiv 1 \neq \theta$.
Отже, це викон. 1-а аксіома $\Rightarrow \|\cdot\|$ не є нормою
($\|x\| = 0 \not\Rightarrow x = \theta$)

$$[N8 a) 3] \quad \|x\| \leq |x(b) - x(a)| + \max_{t \in [a, b]} |x'(t)|$$

Розв'язок. Перевір аксіом норми:

$$1) \|x\| = 0 \Rightarrow |x(b) - x(a)| + \max_{t \in [a, b]} |x'(t)| = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x(a) = x(b) \\ x(t) \equiv \text{const} \end{cases} \Rightarrow x(t) \equiv 1 - \text{контрприклад}$$

$\Rightarrow$ порушення 1-а аксіома $\Rightarrow \|\cdot\|$ не є нормою

$$[N8 a) 4] \quad \|x\| \leq |x(a)| + \max_{t \in [a, b]} |x'(t)|$$

$$\text{Розв'язок. } 1) \|x\| = 0 \Rightarrow \begin{cases} x(a) = 0 \\ \max_{t \in [a, b]} |x'(t)| = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x(a) = 0 \\ x(t) \equiv \text{const} \end{cases} \Rightarrow x \equiv 0 \Rightarrow x = \theta$$

Нехай $x = \theta \Rightarrow$ очевидно $\Rightarrow \|x\| = 0$ -
виконується 1-а аксіома

$$2-а: \|\lambda x\| = |\lambda x(a)| + \max_{t \in [a, b]} |\lambda x'(t)| =$$

$$= |\lambda| (|x(a)| + \max_{t \in [a, b]} |x'(t)|) = |\lambda| \cdot \|x\| - \text{викон.}$$

3-а: аксіома

$$\|x + y\| = |x(a) + y(a)| + \max_{t \in [a, b]} |x'(t) + y'(t)| \leq$$

$$\begin{aligned} &\leq |x(a)| + |y(b)| + \max_{t \in [a, b]} (|x'(t)| + |y'(t)|) \leq \\ &\leq |x(a)| + |y(b)| + \max_{t \in [a, b]} |x'(t)| + \max_{t \in [a, b]} |y'(t)| = \\ &= \|x\| + \|y\| \quad - \text{Оценка.} \\ &\Rightarrow \|\cdot\| \quad - \text{норма.} \end{aligned}$$

Лема 6) $\|x\| = \max_{t \in [a, \frac{a+b}{2}]} |x(t)|$

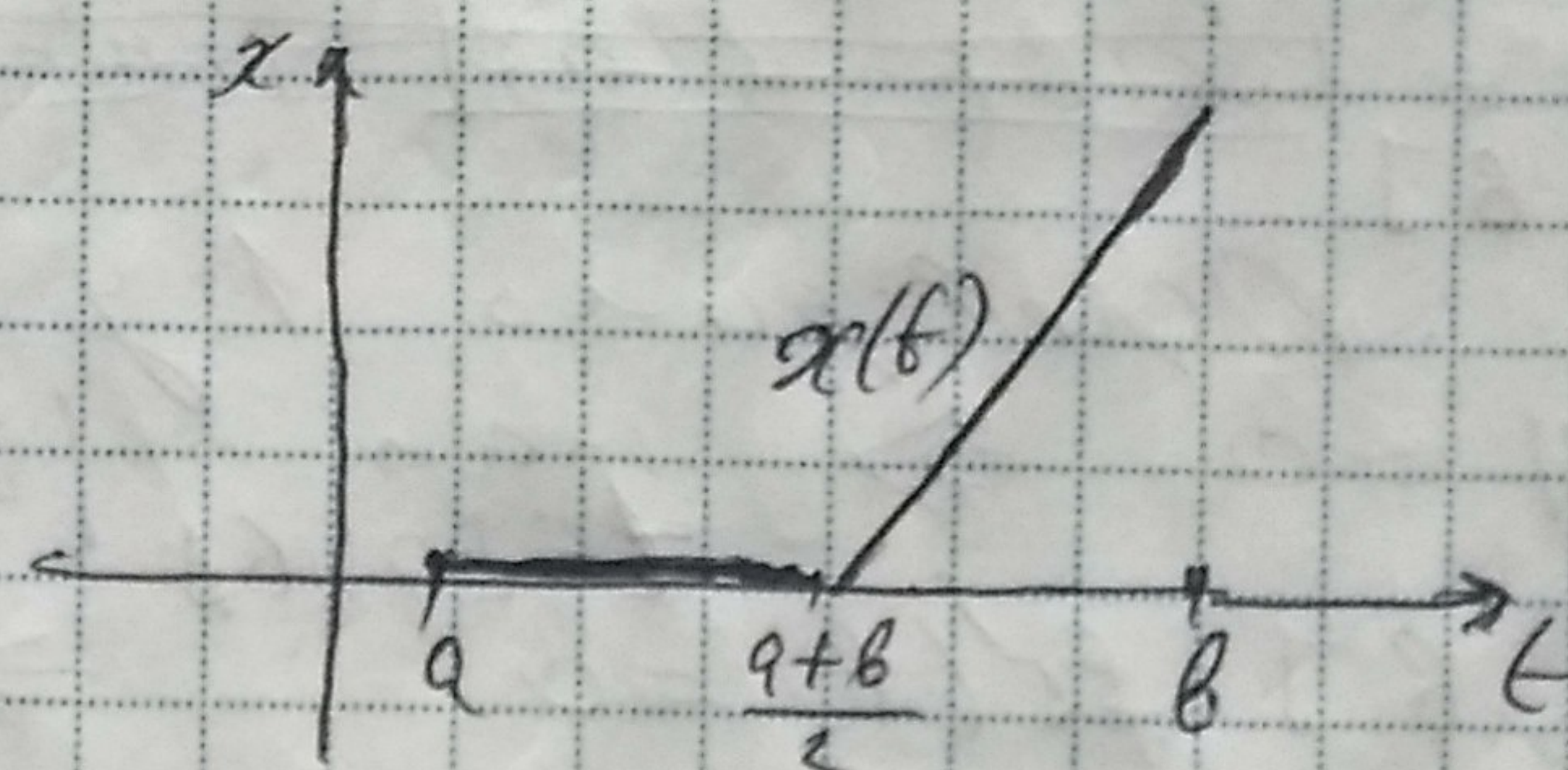
Розв'язок. 1-а аксіома:

$$\|x\| = 0 \Rightarrow x = \theta$$

Контрприклад:

$$\|x\| = 0 \text{ але}$$

$$x \neq \theta.$$



$\Rightarrow \|\cdot\|$ не є нормою.

Лема 1) Дослідити на збіжність у заданому нормованому просторі E послідовність $(x_n) \in E$.

a) $E = C[0, 1]$; 1) $x_n = t^n - t^{n+1}$.

Розв'язок.

Згідно, $x_n \in C[0, 1]$ - функції (проблема) фікс. $t=0$ $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n(0) = 0$

$$t=1 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n(1) = 1 - 1 = 0$$

$$t \in (0, 1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} t^n - t^{n+1} = 0$$

Доведено, $x_n \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$ в $C[0, 1]$

$$\|x\| = \max_{t \in [0, 1]} |x(t)|$$

$$\|x_n - 0\| = \max_{t \in [0, 1]} |t^n - t^{n+1} - 0| = \max_{t \in [0, 1]} |t^n - t^{n+1}|$$

$$\begin{aligned} & \left. \begin{aligned} &x'(t) = nt^{n-1} - (n+1)t^n = 0 \\ &t=0, \quad t = \frac{n}{n+1} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\arg \min \\ &\arg \max \end{aligned} \end{aligned} \quad \left| \left(\frac{n}{n+1} \right)^n - \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n+1} \right|$$

$$= \left| \left(1 - \frac{1}{n+1} \right)^n \left(1 - \frac{n}{n+1} \right) \right| = \left| \left(1 - \frac{1}{n+1} \right)^n \cdot \frac{1}{n+1} \right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

тому $x_n \rightarrow 0$ в E .

N14 § 2)

$$E = C^{(1)}[0,1], \quad x_n(t) = t^n - t^{n+1}$$

Розв'язок. Оскільки, що $x_n \in C^{(1)}[0,1]$.

$$\forall t \in [0,1] \quad x_n(t) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty$$

$$\begin{aligned} \|x_n\| &= \max_{t \in [0,1]} |x_n(t)| + \max_{t \in [0,1]} |x'_n(t)| = \\ &= \max_{t \in [0,1]} |t^n - t^{n+1}| + \max_{t \in [0,1]} |nt^{n-1} - (n+1)t^n| = M_1 + M_2 \\ &\rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty \quad (\text{з попередніх завдань}) \end{aligned}$$

$$x''(t) = n(n-1)t^{n-2} - (n+1)nt^{n-1} = 0$$

$$nt^{n-2}((n-1) - (n+1)t) = 0$$

$$t=0 \quad - \arg \min, \quad t = \frac{n-1}{n+1} \quad - \arg \max x'(t)$$

$$\begin{aligned} M_1 &\approx \left| n \cdot \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^{n-1} - (n+1) \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^n \right| = \left| \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^{n-1} (n - (n+1) \cdot \frac{n-1}{n+1}) \right| \\ &= \left| \left(1 - \frac{2}{n+1} \right)^{n-1} (n - (n-1)) \right| = \left(1 - \frac{2}{n+1} \right)^{n-1} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty \end{aligned}$$

$$\downarrow \frac{1}{e^2}$$

$\Rightarrow x_n \not\rightarrow 0$ в $C^{(1)}[0,1]$ (за Лебегом).
 $\Rightarrow$ не здійс. до $\forall$ елементів в $C^{(1)}[0,1]$.

N14 § 1)

$E = C_0$ - лінійний простір усіх здійснених до нуля послідовностей, $\|x\| = \max_k |x_k|$ (задача 7.2)

$$x_n = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, 0, 0, \dots)$$

Розв'язок. $x_n \in C_0$ тому, що

при фіксованому n x_n - здійснена до нуля послідовність.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{nk} = \lim_{k \rightarrow \infty} 0 = 0$$

$$\text{як } x_{nk} = \begin{cases} \frac{1}{k}, & \text{якщо } k \leq n \\ 0, & k > n \end{cases}$$

Додамо, що $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^0$, я

$$x^0 = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \dots) \in C_0$$

$$\|x_n - x^0\| = \left\| (0, 0, 0, \dots, 0, -\frac{1}{n+1}, -\frac{1}{n+2}, \dots) \right\| =$$

$$= \max_k \left| -\frac{1}{k+1} \right| = \frac{1}{n+1} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty$$

N17 а) Довести, що будь-який простір X метричний, якщо в ньому визначити метрику таким чином

а) X - довільна множина та $\forall (x \in X, y \in X)$

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y \end{cases}$$

Розв'язок.

Озн. Нехай X - довільна множина.
Визначимо $X \times X \xrightarrow{\rho} \mathbb{R}^+$ заз. метрикою,
якщо $\forall (x \in X, y \in X, z \in X)$ виконуються аксіомы:

- 1) $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
- 2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$
- 3) $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$

Доведення:

- 1) $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ - очевидно викон.
- 2) - очевидно
- 3) якщо $x = y$ - викон.
якщо $x \neq y$ та $x = z$ $\Rightarrow y \neq z \Rightarrow 1 \leq 0 + 1$ - викон.
якщо $x \neq y$ та $y = z$ $\Rightarrow x \neq z \Rightarrow 1 \leq 0 + 1$ - викон.
 $\Rightarrow \rho$ - метрика, простір (X, ρ) - метричний.

N49 а 2) Знайти повторні границі:
 $\lim_{x \rightarrow a} (\lim_{y \rightarrow b} f(x, y))$, $\lim_{y \rightarrow b} (\lim_{x \rightarrow a} f(x, y))$
та подинну границю, якщо вони існують

а) $f(x, y) = \frac{x-y}{x+y}$, 2) $a = b = 0$

Розв'язок. $\lim_{x \rightarrow 0} (\lim_{y \rightarrow 0} \frac{x-y}{x+y}) =$ / шукаємо (поглати) внутр. границю при фікс. $x \neq 0$ /

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1$

$\lim_{y \rightarrow 0} (\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-y}{x+y}) = \lim_{y \rightarrow 0} (-\frac{y}{y}) = \lim_{y \rightarrow 0} -1 = -1$

Додамо, що $\nexists \lim_{x \rightarrow 0, y \rightarrow 0} \frac{x-y}{x+y}$

Доведемо. Нехай $x_n' = y_n' = \frac{1}{n} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ Тоді

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n} - \frac{1}{n}}{\frac{1}{n} + \frac{1}{n}} = 0$

Нехай $x_n'' = \frac{2}{n}, y_n'' = \frac{1}{n}$, тоді $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{n} - \frac{1}{n}}{\frac{2}{n} + \frac{1}{n}} = \frac{1}{3} \neq 0$

N 49 5 1)

$$f(x, y) = (x+y) \cdot \sin \frac{1}{x} \cdot \sin \frac{1}{y}, \quad a=b=0.$$

Решение

Посмотрим значение

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} (x+y) \sin \frac{1}{x} \cdot \sin \frac{1}{y} \right) =$$

$\neq$ / $x \neq 0$ /

Аналогично

$$\lim_{y \rightarrow 0} \sin \frac{1}{y} \text{ не существует}$$

$$y_n' = \frac{1}{2\pi n} \rightarrow 0, \quad \sin \frac{1}{y_n'} \rightarrow 0$$

$$y_n'' = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n} \rightarrow 0, \quad \sin \frac{1}{y_n''} \rightarrow 1$$

так $x \sin \frac{1}{x} \neq 0$, то $\lim_{y \rightarrow 0} (x+y) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y}$ не существует

$$\text{Аналогично, } \nexists \lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} (x+y) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y} \right)$$

$$\Rightarrow \nexists \lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} (x+y) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y} \right)$$

$$\text{Аналогично, } \nexists \lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} (x+y) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y} \right)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (x+y) \sin \frac{1}{x} \cdot \sin \frac{1}{y} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} o(1) \cdot O(1) \cdot O(1) = 0.$$

N 49 6 1)

$$f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x-y)^2}, \quad a=b=0.$$

Решение. Посмотрим значение

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x-y)^2} \right) = \left| \frac{x \neq 0}{x \neq 0} \right| =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} \frac{x^2 y^2}{x^2 + o(1)} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0.$$

$$\text{Аналогично, } \lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x-y)^2} \right) = 0.$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x-y)^2} \text{ — не существует.}$$

$$\text{Докажем, } x_n' = y_n' = \frac{1}{n}; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^4}}{\frac{1}{n^4} + 0} = 1;$$

$$x_n'' = \frac{1}{n}, \quad y_n'' = -\frac{1}{n}; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^4}}{\frac{1}{n^4} + \left(\frac{2}{n}\right)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + 4n^2} = 0$$

$$0 \neq 1$$

$\Rightarrow$ не существует.

N 49 a 1)

$$f(x, y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2}$$

$$a = b = 0$$

Розбізоч.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} \frac{2xy}{x^2 + y^2} \right) =$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2xy}{x^2 + y^2} \right) =$$

$$? \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{2xy}{x^2 + y^2}$$

N 49 g 1)

$$f(x, y) = x^2 e^{-(x^2 - y)}$$

$$a = b = +\infty$$

Розбізоч.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\lim_{y \rightarrow +\infty} x^2 e^{-(x^2 - y)} \right) = +\infty$$

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-(x^2 - y)} \right) = 0$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} x^2 e^{-(x^2 - y)} \quad \text{?}$$

$$x_n' =$$

$$y_n' =$$

$$x_n'' =$$

$$y_n'' =$$

N 49 e 1)

$$f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^4}$$

$$1) a = b = +\infty$$

Розбізоч.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^4} \right) =$$

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^4} \right) =$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^4} \quad \text{?}$$

$$x_n' =$$

$$y_n' =$$

$$x_n'' =$$

$$y_n'' =$$

D/3 № сгор. 284 N 8 d-1), N 14 d-4), b-2), b-6),
N 14 2-4), g-3),
сгор. 312 N 49 m-4), g-1, 2), H-1)