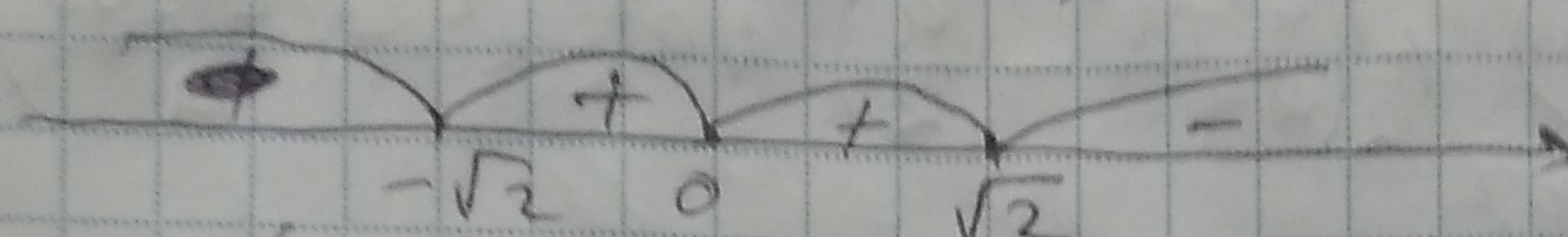
Заняття 30 Застосування інтегралу Рімана (довжина дуги, об'єм).

№ 165 г) Обчислити довжину дуги кривої
$x = 8t^3$, $y = 2t^2 - t^4$, $(y \geq 0)$.

Розв'язок. $y \geq 0 \Rightarrow 2t^2 - t^4 \geq 0$

$t^2(2 - t^2) = 0$, $t_{1,2} = 0$, $t_{3,4} = \pm\sqrt{2}$



$\Rightarrow t \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$

$$L = \int_{t_3}^{t_4} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \sqrt{(24t^2)^2 + (4t - 4t^3)^2}\, dt =$$

$$= \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} 4|t| \sqrt{(6t)^2 + (1-t^2)^2}\, dt = 2\int_0^{\sqrt{2}} 4t \sqrt{36t^2 + (1-t^2)^2}\, dt$$

$$= \left| t^2 = y \right| = 4\int_0^2 \sqrt{36y + (1-y)^2}\, dy =$$

$$= 4\int_0^2 \sqrt{1 + 34y + y^2}\, dy = 4\int_0^2 \sqrt{(y+17)^2 - 288}\, dy =$$

$$= 4\left(\frac{y+17}{2}\sqrt{(y+17)^2 - 288} + 144 \ln\left| y + 17 + \sqrt{(y+17)^2 - 288}\right|\right)\Big|_0^2 =$$

$$= 4\left(\frac{19}{2}\sqrt{73} + 144 \ln|19 + \sqrt{73}| - \frac{17}{2} + 144 \ln 18\right).$$

№ 167 а) Знайти довжину кривої, заданої в полярних координатах
$r = \varphi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$

Розв'язок. $L = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{r^2(\varphi) + (r'(\varphi))^2}\, d\varphi =$

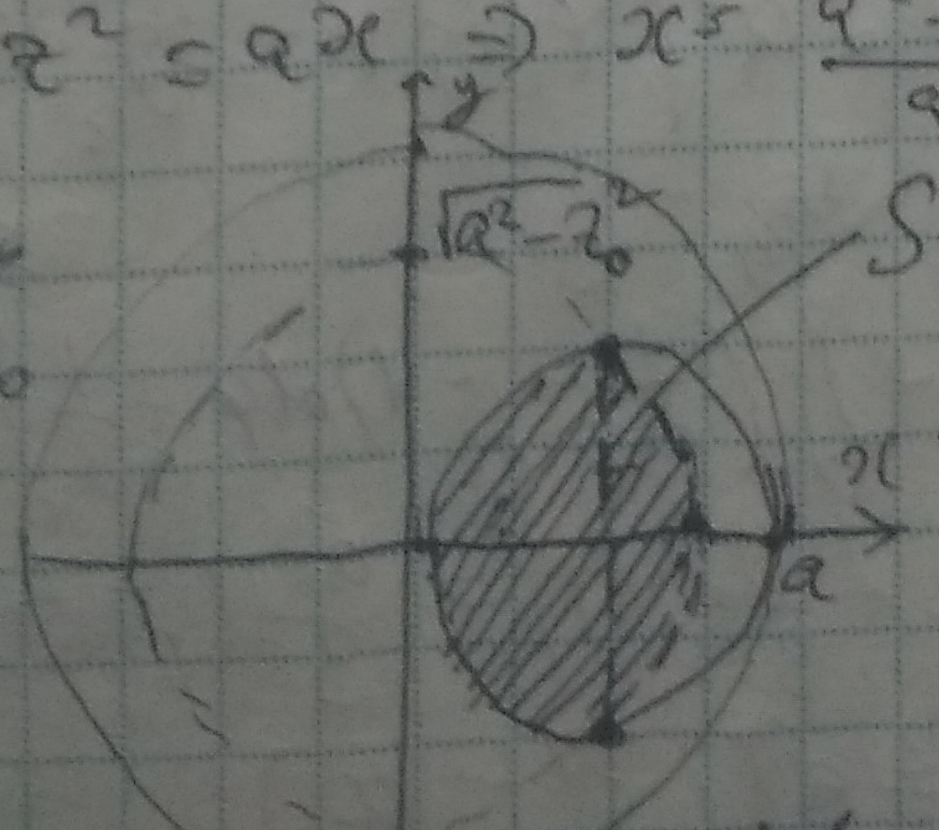
$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{\varphi^2 + 1^2}\, d\varphi = \int_0^{2\pi} \varphi\, d\varphi = \frac{\varphi^2}{2}\Big|_0^{2\pi} = 2\pi^2.$$

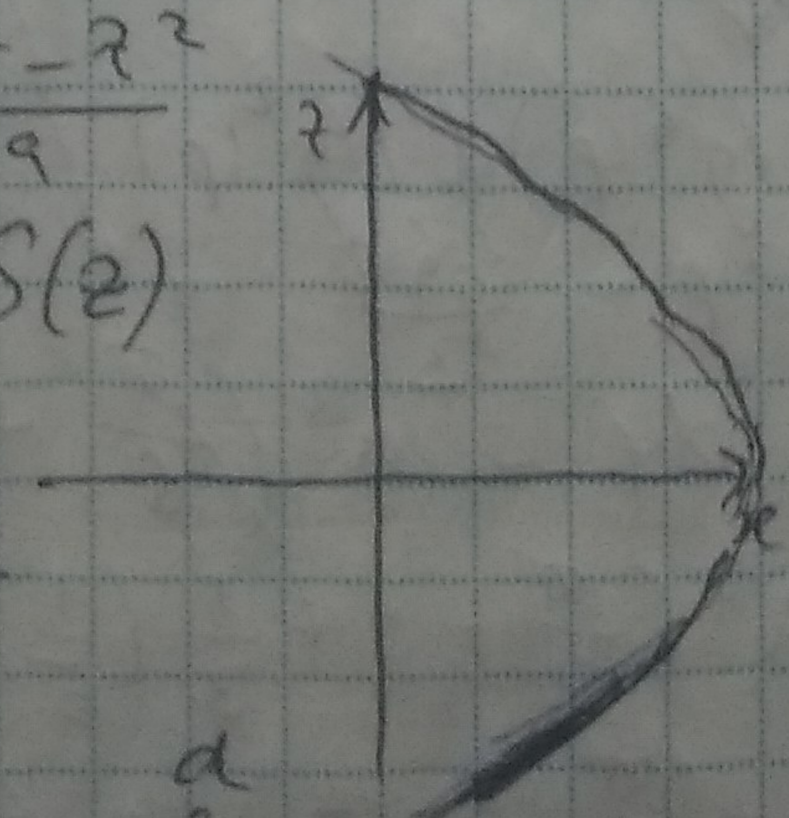
№ 168 в) Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x^2 + y^2 = ax$

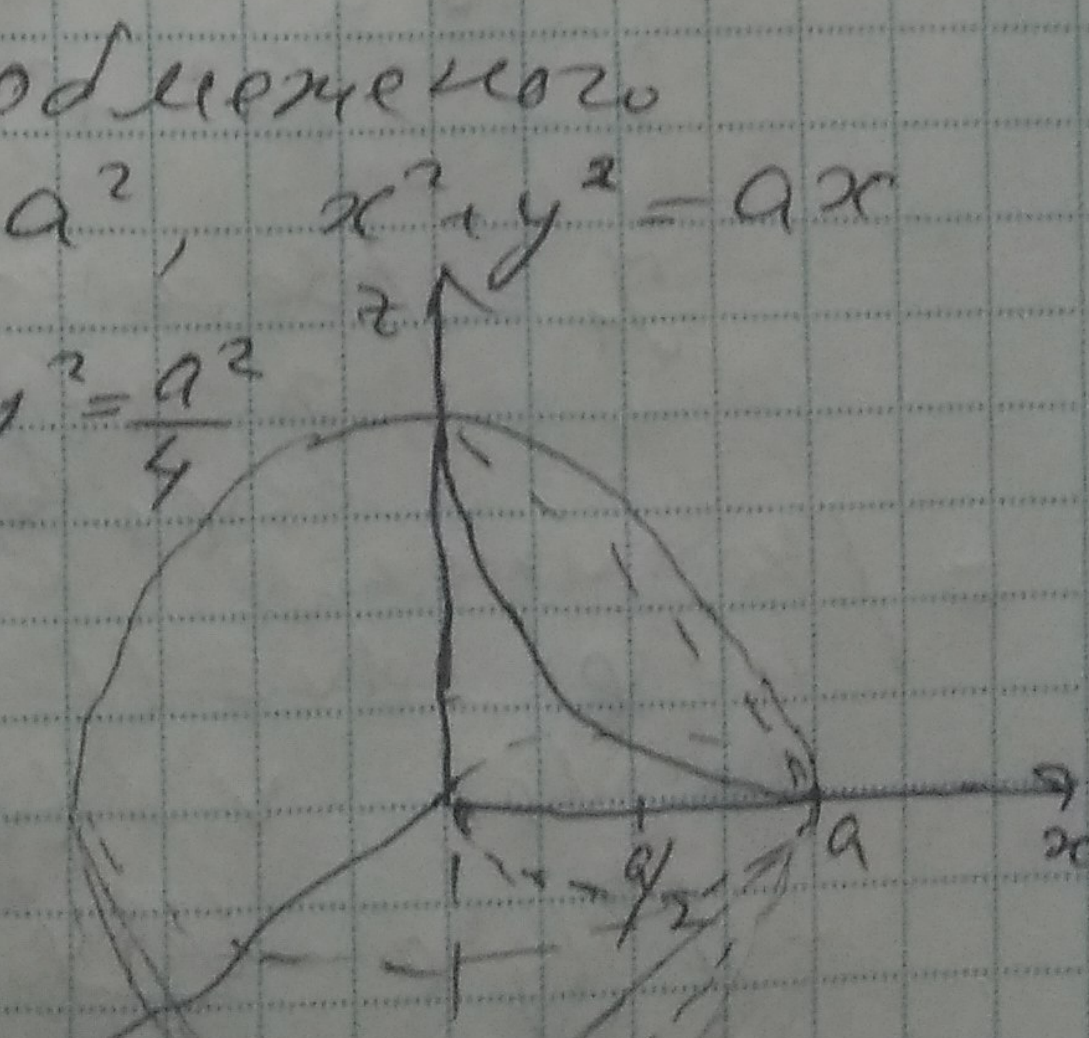
Розв'язок. $x^2 + y^2 = a^2 - z^2$, $\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{a^2}{4}$

Перетин поверхонь:

$a^2 - z^2 = ax \Rightarrow x = \frac{a^2 - z^2}{a}$







$$V = 2\int_0^a S(z)\, dz$$

~~$S(z) = \int_0^{\frac{a^2-z^2}{a}} \sqrt{\frac{a^2}{4} - \dots}$~~

$$S(z) = \int_0^{\frac{a^2-z^2}{a}} \sqrt{ax-x^2}\,dx + \int_{\frac{a^2-z^2}{a}}^{a} \sqrt{a^2-z^2-x^2}\,dx = J_1 + J_2$$

$$J_1 = \int_0^{\frac{a^2-z^2}{a}} \sqrt{\frac{a^2}{4} - \left(x-\frac{a}{2}\right)^2}\,dx = \frac{a^2}{8}\arcsin\frac{2\left(x-\frac{a}{2}\right)}{a} + \frac{\left(x-\frac{a}{2}\right)}{2}\sqrt{ax-x^2}\Bigg|_0^{\frac{a^2-z^2}{a}} =$$

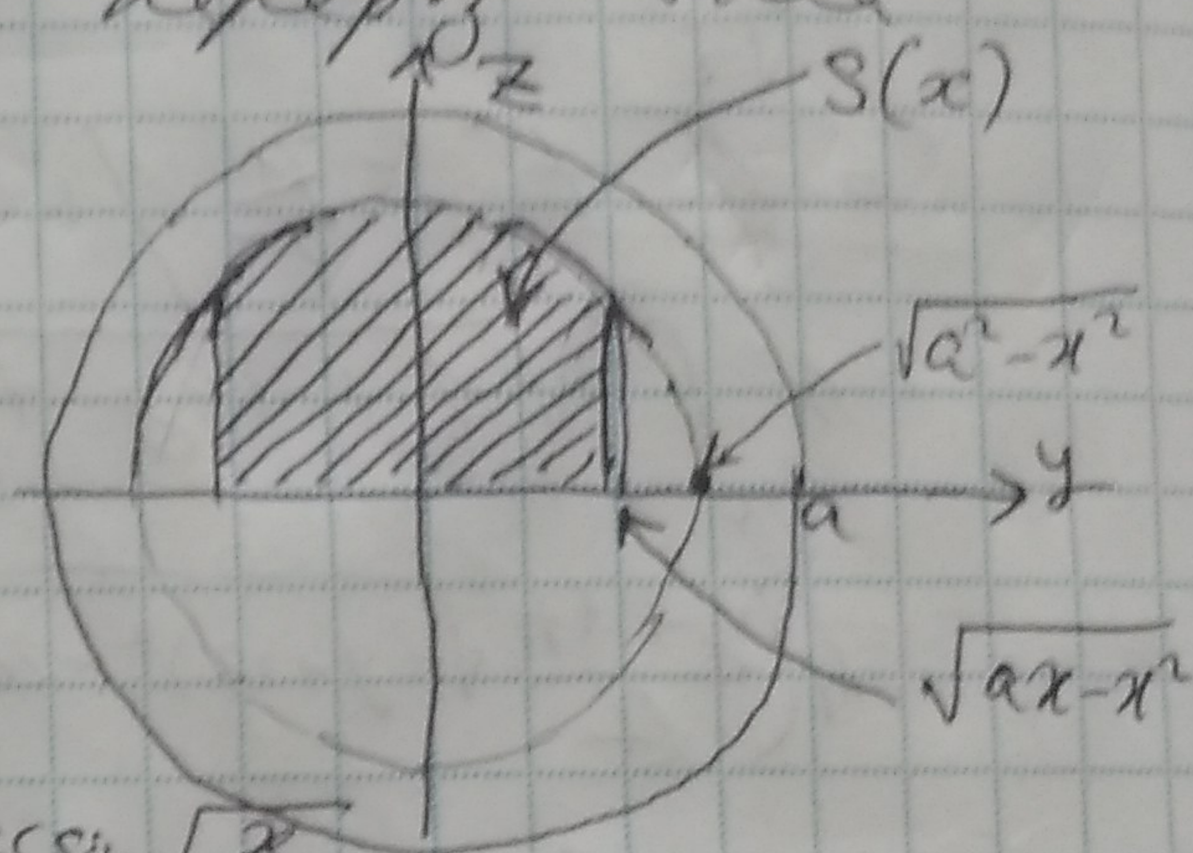
$$= \frac{a^2}{8}\arcsin\left(\frac{2}{a}\left(\frac{a^2-z^2}{a}\right)\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{a^2-z^2}{a} - \frac{a}{2}\right)\sqrt{a^2-z^2-\left(\frac{a^2-z^2}{a}\right)^2} -$$

$$- \frac{a^2}{8}\arcsin(-1)$$

$$J_2 = \left(\frac{a^2-z^2}{2}\arcsin\frac{x}{\sqrt{a^2-z^2}} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2-z^2-x^2}\right)\Bigg|_{\frac{a^2-z^2}{a}}^{a}$$

<u>Інший підхід:</u> розглянемо переріз тіла площиною ⊥ вісі Ox:

$$V = 2\int_0^a S(x)\,dx.$$



$S(x)$ – площа криволінійної трапеції

$$S(x) = 2\int_0^{\sqrt{ax-x^2}} \sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dy =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \text{Заміна } y = \sqrt{a^2-x^2}\sin t \\ t = \arcsin\frac{y}{\sqrt{a^2-x^2}} \end{array} \right| = 2\int_0^{\arcsin\sqrt{\frac{x}{a+x}}} (a^2-x^2)\cos^2 t\,dt =$$

$$= (a^2-x^2)\left(\arcsin\sqrt{\frac{x}{a+x}} + \frac{\sin\left(2\arcsin\sqrt{\frac{x}{a+x}}\right)}{2}\right) = \left|\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha\right|$$

$$= (a^2-x^2)\left(\arcsin\sqrt{\frac{x}{a+x}} + \sqrt{\frac{x}{a+x}}\cdot\sqrt{1-\frac{x}{a+x}}\right) =$$

$$= (a^2-x^2)\left(\arcsin\sqrt{\frac{x}{a+x}} + \frac{\sqrt{ax}}{a+x}\right).$$

$$V = 2\int_0^a (a^2-x^2)\left(\arcsin\sqrt{\frac{x}{a+x}} + \frac{\sqrt{ax}}{a+x}\right)dx = 2(J_1+J_2), \text{ де}$$

$$J_1 = \int_0^a (a^2-x^2)\arcsin\sqrt{\frac{x}{a+x}}\,dx, \quad J_2 = \int_0^a (a-x)\sqrt{ax}\,dx = \frac{4}{15}a^3$$

$$J_1 = \left| \begin{array}{l} \text{Заміна} \\ x = a\,tg^2\varphi \\ 0 \le \varphi \le \pi/4 \end{array} \right| = a^3\int_0^{\pi/4} \varphi\cdot(1-tg^4\varphi)\,d(tg^2\varphi) =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \text{частинами:} \\ u = \varphi,\ dv = (1-tg^4\varphi)\,d(tg^2\varphi) \\ du = d\varphi,\ v = tg^2\varphi - \frac{tg^6\varphi}{3} \end{array} \right| = a^3\left(\varphi\left(tg^2\varphi - \frac{tg^6\varphi}{3}\right)\right)\Bigg|_0^{\pi/4} -$$

$$- \int_0^{\pi/4}\left(tg^2\varphi - \frac{tg^6\varphi}{3}\right)d\varphi = a^3\left(\frac{\pi}{6} - \int_0^{\pi/4}\left(\frac{1}{\cos^2\varphi} - 1\right)d\varphi + \frac{1}{3}\int_0^{\pi/4}(tg^4\varphi - tg^2\varphi + 1)\,d(tg\varphi) -\right.$$

$$\left. - \frac{1}{3}\int_0^{\pi/4} d\varphi\right) = a^3\left(\frac{\pi}{3} - 1 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3} + 1\right)\right) = \frac{a^3}{3}\left(\pi - \frac{32}{15}\right).$$

$$V = 2a^3\left(\frac{4}{15} + \frac{\pi}{3} - \frac{32}{45}\right) = \frac{2}{3}a^3\left(\pi - \frac{4}{3}\right).$$

№169 а) Обчислити об'єм тіла, що утворене обертанням фігури, обмеженої кривою, навколо прямої l, якщо

$y = 2x - x^2$, $y \geq 0$

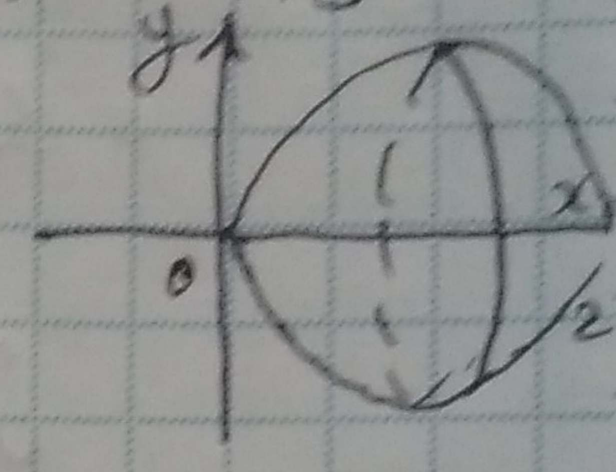
1) l – вісь Ox; 2) l – вісь Oy.

Розв'язок: 1) $V = \pi\int_a^b f^2(x)\,dx =$

| $y \geq 0 \Rightarrow 2x - x^2 \geq 0$, $x(2-x) \geq 0$
$x \in [0, 2]$

$= \pi\int_0^2 (2x - x^2)^2 dx = \pi\int_0^2 (4x^2 - 4x^3 + x^4)\,dx =$

$= \pi\left(\frac{4x^3}{3} - x^4 + \frac{x^5}{5}\right)\Big|_0^2 = \pi\left(\frac{4\cdot 8}{3} - 16 + \frac{32}{5}\right) = \frac{16\pi}{15}.$



2) $V_1 = \pi\int_{f(a)}^{f(b)} g^2(y)\,dy = \Big|\ g = f^{-1}$, заміна: $y = f(x) \Big| =$

l – вісь Oy

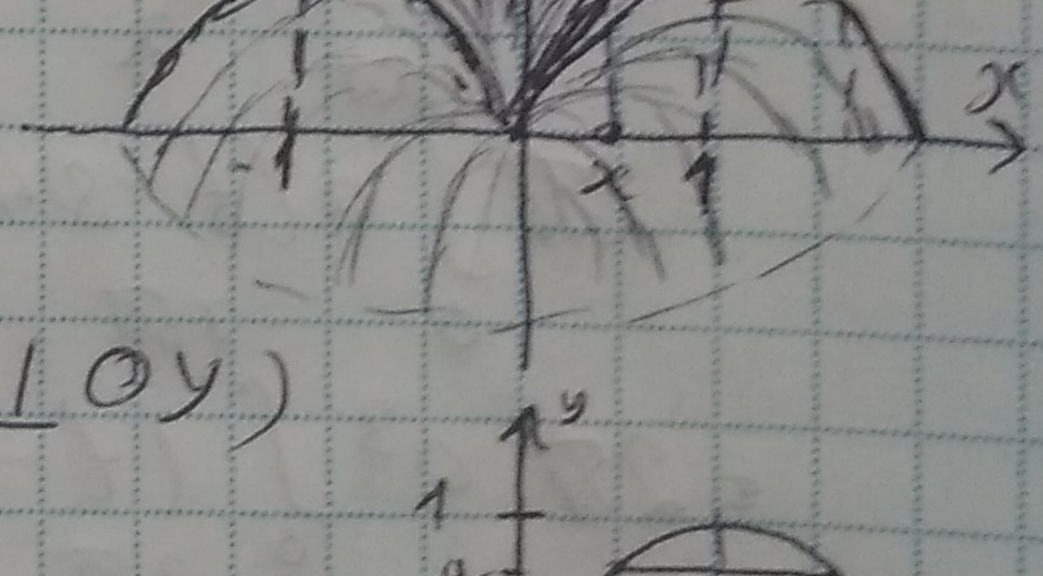
$= 2\pi\int_a^b x\cdot f(x)\,dx$ (задача 158 а))

Δ $\pi\int_{f(a)}^{f(b)} g^2(y)\,dy = \Big|\ y = f(x),\ g = f^{-1}$, заміна $y = f(x) \Big| = \pi\int_a^b \left(f^{-1}(f(x))\right)^2 f'(x)\,dx$

$= \pi\int_a^b x^2 f'(x)\,dx = \pi\int_a^b x^2\,df(x) = \Big|\ u = x^2,\ dv = df(x);\ du = 2x\,dx,\ v = f(x) \Big| =$

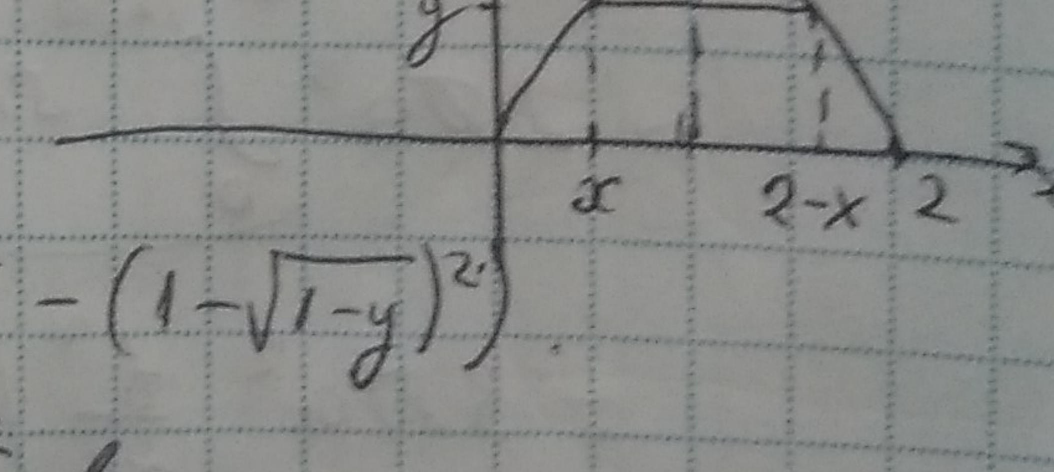
$= \pi\left(x^2 f(x)\Big|_a^b - 2\int_a^b x f(x)\,dx\right) \Rightarrow$

$V = 2\pi\int_a^b x f(x)\,dx.$ ▲



Використаємо інший спосіб, через перерізи!

У горизонт. перерізі (площиною $\perp Oy$) тіла обертання – кільце з радіусами кіл $r_1 = x = 1 - \sqrt{1-y}$ та $r_2 = 2 - x = 1 + \sqrt{1-y}$



Тоді $S(y) = \pi r_2^2 - \pi r_1^2 = \pi\left((1+\sqrt{1-y})^2 - (1-\sqrt{1-y})^2\right).$

$V = \int_0^1 S(y)\,dy = \pi\int_0^1 \left((1+\sqrt{1-y})^2 - (1-\sqrt{1-y})^2\right) dy =$

$= 4\pi\int_0^1 \sqrt{1-y}\,dy = -4\pi(1-y)^{3/2}\cdot\frac{2}{3}\Big|_0^1 = \frac{8\pi}{3}.$

II спосіб (через формулу)

$V = 2\pi\int_a^b x f(x)\,dx = 2\pi\int_0^2 x(2x - x^2)\,dx = 2\pi\int_0^2 (2x^2 - x^3)\,dx =$

$= 2\pi\left(x^3\cdot\frac{2}{3} - \frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^2 = 2\pi\left(\frac{16}{3} - \frac{16}{4}\right) = \frac{32\pi}{12} = \frac{8\pi}{3}.$

N 169 е) $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$, $0\le t\le 2\pi$

1) l – вісь Ox; 2) l – вісь Oy; 3) l – $y=2a$.

Розв'язок 1) $V=\pi\int_a^b f^2(x)\,dx=\pi\int_0^{2\pi a} f^2(x)\,dx=$

$=\left|\begin{matrix}\text{Заміна } x=a(t-\sin t)\\ \Rightarrow y=f(x)=a(1-\cos t)\end{matrix}\right|=\pi\int_0^{2\pi} a^2(1-\cos t)^2\cdot(a(t-\sin t))'\,dt$

$=\pi a^3\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^3\,dt=8\pi a^3\int_0^{2\pi}\sin^6\frac{t}{2}\,dt=32\pi a^3\underbrace{\int_0^{\pi/2}\sin^6\frac{t}{2}\,dt}_{J_6}$

$=\left|\begin{matrix}\text{частинами: } \sin^5\frac{t}{2}=u,\ dv=\sin\frac{t}{2}\,dt\\ du=5\sin^4\frac{t}{2}\cdot\cos\frac{t}{2}\cdot\frac{1}{2}\,dt,\ v=-2\cos\frac{t}{2}\end{matrix}\right|=$

$=32\pi a^3\left(-2\sin^5\frac{t}{2}\cdot\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{\pi/2}+2\int_0^{\pi/2}\frac{5}{2}\sin^4\frac{t}{2}\cos^2\frac{t}{2}\,dt\right)=$

$=32\pi a^3\cdot 5\left(\int_0^{\pi/2}\sin^4\frac{t}{2}\,dt-\int_0^{\pi/2}\sin^6\frac{t}{2}\,dt\right)$ (=) $\Rightarrow$

$J_6=5J_4-5J_6 \Rightarrow J_6=\frac{5}{6}J_4=\left|J_n=\frac{n-1}{n}J_{n-2}\right|$

$=\frac{5!!}{6!!}\cdot\frac{\pi}{2}$

(=) $32\pi a^3\cdot\frac{5!!}{6!!}\cdot\frac{\pi}{2}$.

2) l – вісь Oy:

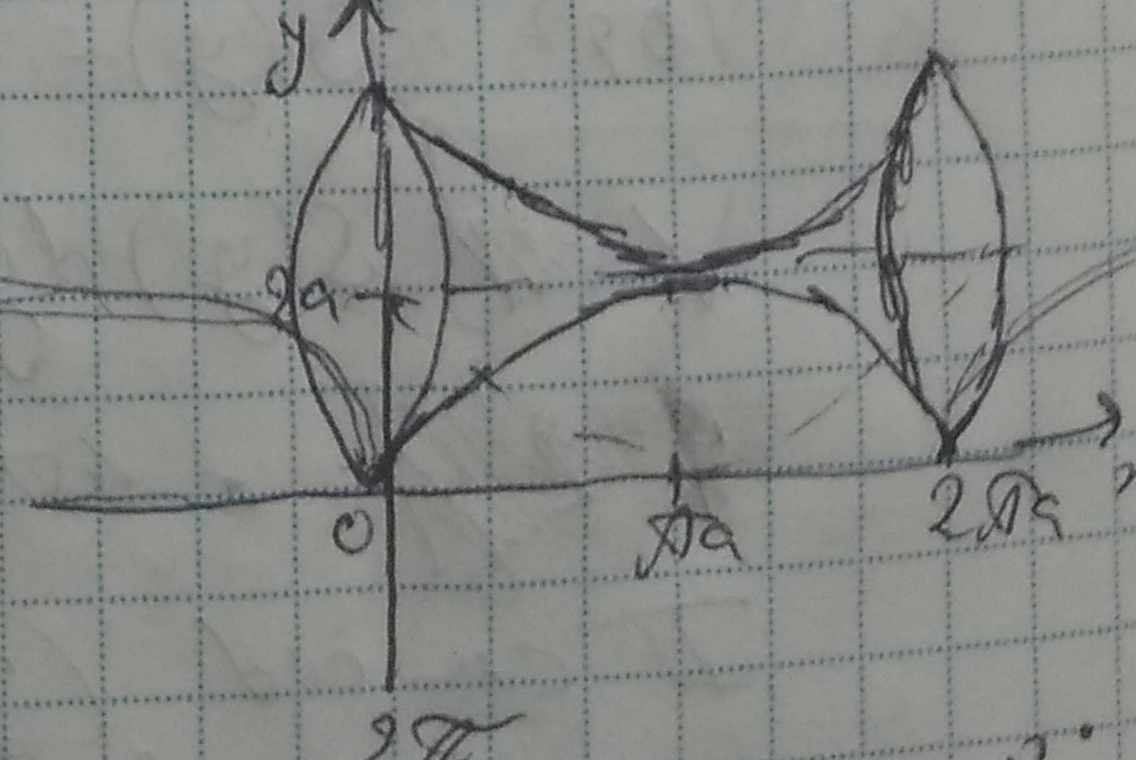
$V=2\pi\int_a^b x f(x)\,dx=\left|\begin{matrix}\text{Заміна } x=a(t-\sin t)\\ y=f(x)=a(1-\cos t)\end{matrix}\right|=$

$=2\pi\int_0^{2\pi}a(t-\sin t)a(1-\cos t)\cdot(a(t-\sin t))'\,dt=$

$=2\pi a^3\int_0^{2\pi}(t-\sin t)(1-\cos t)^2\,dt=2\pi a^3\int_0^{2\pi}t(1-\cos t)^2\,dt-$

$-\underbrace{2\pi a^3\int_0^{2\pi}\sin t(1-\cos t)^2\,dt}_{=0}=2\pi a^3\int_0^{2\pi}t\left(\frac{3}{2}-2\cos t+\frac{\cos 2t}{2}\right)dt=$

$=3\pi a^2\frac{t^2}{2}\Big|_0^{2\pi}=6\pi^3a^3.$



3) l: пряма $y=2a$

З геометр. міркувань

$V=\pi\int_0^{2\pi a}y_1^2\,dx$, де $y_1=2a-y$,

$V=\pi\int_0^{2\pi a}(2a-y)^2\,dx=\left|x=a(t-\sin t)\right|=\pi\int_0^{2\pi}(2a-a(1-\cos t))^2\cdot a(1-\cos t)\,dt$

$=a^3\pi\int_0^{2\pi}(4-4(1-\cos t)+(1-\cos t)^2)(1-\cos t)\,dt=\pi^2a^3$

Д/з 168 ж), N169 ж) г), ф)