

Задача 28

Интеграл Римана.

Теорема про смену.

N 82 m

D/3

Доказать

$$\int_0^{\pi/2} f(\sin 2x) \cos x dx = \int_0^{\pi/2} f(\cos^2 x) \cos x dx$$

$$\Delta \int_0^{\pi/2} f(\sin 2x) \cos x dx \stackrel{x = \frac{\pi}{2} - 2y}{=} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} f(\cos 2x) \cos(\frac{\pi}{2} - y) dy$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} f(\cos 2y) (\cos y + \sin y) dy = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} f(\cos 2y) \sin y dy = 0$$

$$= \sqrt{2} \int_0^{\pi/4} f(\cos 2y) \cos y dy = \sqrt{2} \int_0^{\pi/4} f(2\cos^2 y - 1) \cos y dy$$

$$= \sqrt{2} \int_0^{\pi/4} f(1 - 2\sin^2 y) d(\sin y) dy \quad \text{let } \sin y = t$$

$$= \sqrt{2} \int_0^{\sqrt{2}/2} f(1 - 2t^2) dt \quad \text{let } 1 - 2t^2 = z, \quad t = \sqrt{\frac{1-z}{2}}, \quad dt = -\frac{dz}{2\sqrt{2}\sqrt{1-z}}$$

$$= \sqrt{2} \int_1^0 -\frac{f(z)}{2\sqrt{2}\sqrt{1-z}} dz = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{f(z)}{\sqrt{1-z}} dz$$

нужно

доказать:

$$\int_0^{\pi/2} f(\cos^2 x) \cos x dx = \int_0^{\pi/2} f(1 - \sin^2 x) d(\sin x) \quad \text{let } \sin x = t$$

$$= \int_0^1 f(1 - t^2) dt \quad \text{let } 1 - t^2 = z, \quad t = \sqrt{1-z}, \quad dt = -\frac{1}{2\sqrt{1-z}} dz$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{f(z)}{\sqrt{1-z}} dz \quad \text{— чужбана, где же!}$$

N 84 a

Оценить интеграл $\int_1^e \sin(\ln x) dx =$

$$\text{let } \ln x = y, \quad x = e^y, \quad dx = e^y dy \quad \Rightarrow \int_0^1 \sin y \cdot e^y dy = \int_0^1 \sin y \cdot e^y dy$$

$$= \sin y \cdot e^y \Big|_0^1 - \int_0^1 e^y \cdot \cos y dy = \sin 1 \cdot e - \int_0^1 e^y \cdot \cos y dy$$

$$\text{let } y_1 = \int_0^1 \sin y \cdot e^y dy, \quad \text{then } y_1 = e \cdot \sin 1 - (e^1 \cos 1 - 1 + y)$$

$$\Rightarrow 2y_1 = e(\sin 1 - \cos 1) + 1 \Rightarrow y_1 = \frac{e(\sin 1 - \cos 1) + 1}{2}$$

N 84 u

Обчислення інтеграла

$$\int_0^1 \ln(x + \sqrt{1+x^2}) dx = / \text{ застосуємо: } u = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$$

$$du = \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} \cdot (1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}) dx$$

$$= x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx = \ln(1 + \sqrt{2}) - \ln \sqrt{1+x^2} \Big|_0^1 =$$

$$= \ln(1 + \sqrt{2}) - \ln \sqrt{2}$$

N 85 a)

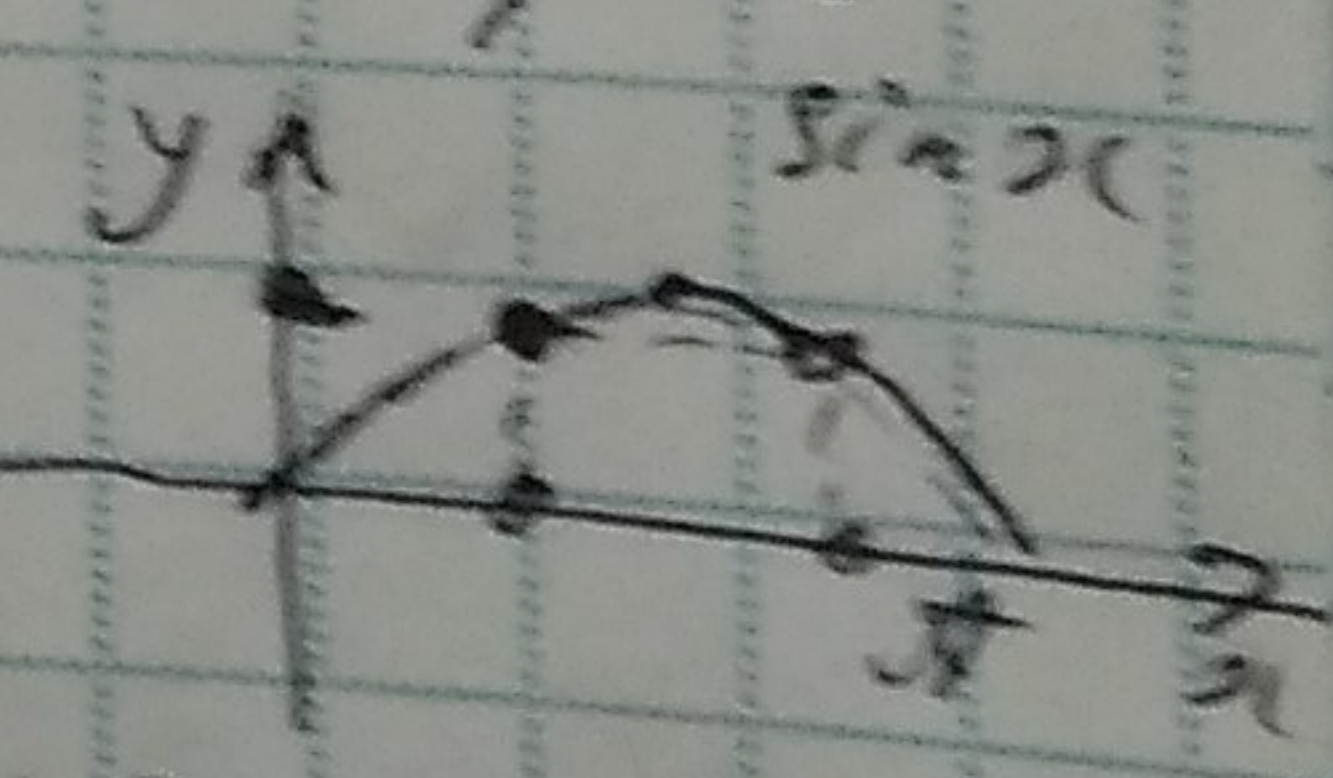
В інтегралі зводимо вираз замість, якщо це можливо

$$\int_a^b f(x) \cos x dx, f \in R[a, b], \sin x = t$$

Розв'язок Дієсно, ми використовуємо умови використання формули заміни змінних в інтегралі Ріманна $\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} (f \circ \varphi) \cdot \varphi'(t) dt$, де $f \in C[A, B]$, $[a, b] \subset [A, B]$, $\varphi: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ - гомеоморфізм, $\varphi' \in R[\alpha, \beta]$, $F_\varphi \subset D_f$, $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$.

Якщо $[a, b]$ такий, що рівняння $\sin x = t$ має більше одного розв'язку відносно x , тобто $b-a$ накриває $[a, b] = [\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}]$,

і такий такий вибір оберненої функції $x = \varphi(t)$ не існує, тобто умови використання формули порушені і заміну робити не можна.



Якщо ж $[a, b]$ такий, що $b-a \leq \pi/2$, тобто $[a, b] \subset [0, \pi/2]$, тоді $\sin x$ діє обернено, тобто маємо $\varphi(t) = \arcsin t$ і можна зводити заміну.

N 85 b)

$$\int_4^7 (x^2 - 6x + 13) dx \quad \text{де } t = x^2 - 6x + 13$$

Розв'язок $t = (x-3)^2 + 4$ - діє обернено, бо $x \in [4, 7] \Rightarrow$

можемо зводити заміну

$$\Rightarrow / x = 3 + \sqrt{t-4} / \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{t-4}} \Rightarrow \int_4^7 \frac{t dt}{2\sqrt{t-4}}$$

N86 a)

Чи до вичного результату приведе
формальне використання формули
Лейбніца - Лейбніца

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x}$$

Розв'язок

Так: $y = \ln|x| \Big|_{-1}^1 = 0$.
Але в даному разі: i) використовуємо
не припустимо, бо в точці $x=0$
функція $F(x) = \ln|x|$ розривна:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln|x| = -\infty.$$

N86 б)

$$\int_{-1}^1 \frac{d}{dx} \left(\arctg \frac{1}{x} \right) dx$$

Розв'язок. Не можна використ. ф-лу Ньютона-Лейбніца, бо $F(x) = \arctg \frac{1}{x}$ розривна
в т. $x=0$ $F(-0) = -\frac{\pi}{2} \neq F(+0) = \frac{\pi}{2}$.

N87 а 1)

Обчислити інтеграл I_n , $n \in \mathbb{N}$

$$I_n = \int_a^b \sin^n x dx, \quad [a, b] \subseteq [0, \frac{\pi}{2}]$$

Або можливості отримати рекурентне співвідн.

Розв'язок. Частинами: $u = \sin^{n-1} x$, $dv = \sin x dx$
 $du = (n-1) \sin^{n-2} x \cos x dx$,
 $v = -\cos x$

$$\begin{aligned} I_n &= -\cos x \cdot \sin^{n-1} x \Big|_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \cos x \cdot (n-1) \cdot \sin^{n-2} x dx = \\ &= (n-1) \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x \cdot \cos^2 x dx = (n-1) \left(\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x dx - \right. \\ &\quad \left. - \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx \right) = (n-1) (I_{n-2} - I_n) \Rightarrow \end{aligned}$$

Отримали рекурентне співвідношення

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

Врахувавши, що $I_1 = \int_0^{\pi/2} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\pi/2} = 1$,

$$I_2 = \int_0^{\pi/2} \sin^2 x dx = \int_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{маємо } I_n = \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \cdot \frac{\pi}{2}, \text{ якщо } n=2k$$

$$\frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}, \text{ якщо } n=2k+1.$$

№88

Знайти на області визначення похідні

- a) $\frac{df}{dx}$, вважаючи a фіксованим параметром
 б) $\frac{df}{da}$, вважаючи x фіксованим параметром

1) $f(x) = \int_{a - \cos x^2}^{a + \sin x} e^{-t^2} dt$

Розв'язок Нехай $[a, b] \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $f \in C[a, b]$ та $[d, \beta] \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}$,
 $[d, \beta] \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}$ гурперенуційовані на $[d, \beta]$, $E_\varphi \subset Df$,
 $E_\varphi \subset Df$ тоді

$$\frac{d}{dx} \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t) dt \right) = f(\psi(x)) \psi'(x) - f(\varphi(x)) \varphi'(x)$$

$\varphi(x) = a - \cos x^2$ — гурп.; $\psi(x) = a + \sin x$ — гурп.

$$\Rightarrow \frac{df}{dx} = e^{-(a + \sin x)^2} \cdot \cos x - e^{-(a - \cos x^2)^2} \cdot \sin x^2 \cdot 2x$$

№89 а

Знайти границю

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \int_0^x \cos t^2 dt$$

Розв'язок Застосуємо правило Лопітала

Якщо f та g — гурп., $g'(x) \neq 0$, $\lim_{x \rightarrow b-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow b-0} g(x) = 0$
 та $\exists \lim_{x \rightarrow b-0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$, то $\exists \lim_{x \rightarrow b-0} \frac{f(x)}{g(x)} = L$.

Отже, маємо $\frac{d}{dx} \left(\int_0^x \cos t^2 dt \right) = \cos x^2$

$x \rightarrow 0$, $\int_0^x \cos t^2 dt \rightarrow 0$ при $x \rightarrow 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x^2}{1} = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \cos t^2 dt}{x} = 1$$

№89 б

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\int_0^x e^{t^2} dt \right)^2}{\int_0^x e^{2t^2} dt}$ — за правилом Лопітала

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \int_0^x e^{t^2} dt \cdot e^{x^2}}{e^{2x^2}} = 2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x e^{t^2} dt}{e^{x^2}} = 2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x^2}}{2xe^{x^2}} =$$

$$= 2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2x} = 0$$

Теорема про средно

1-а теорема про средно. Нека $\{f, g\} \subset R[a, b]$ та
 $\forall x \in [a, b] \quad g(x) \geq 0$ ($g(x) \leq 0$), то съвместно
 равенство $\int_a^b f(x)g(x)dx = \mu \int_a^b g(x)dx$, где

$$m = \inf_{x \in [a, b]} f(x) \leq \mu \leq M = \sup_{x \in [a, b]} f(x)$$

Нека $f \in C[a, b]$, то $\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi) \int_a^b g(x)dx$,
 $\xi \in [a, b]$.

2-а теорема про средно. Нека $g \in R[a, b]$,

$[a, b] \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ — монотонна. Тогда $\exists \xi \in [a, b]$;

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(a) \int_a^{\xi} g(x)dx + f(b) \int_{\xi}^b g(x)dx.$$

Нека при этом, $f \geq 0$ та монотонно спадает
 (монотонно растет) на $[a, b]$, то

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(a) \int_a^{\xi} g(x)dx, \quad \xi \in [a, b]$$

$$(\int_a^b f(x)g(x)dx = f(b) \int_{\xi}^b g(x)dx)$$

N102 8)

Сравнить интегралы $\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx$ та $\int_{\pi}^{2\pi} \frac{\sin x}{x} dx$.

Решение. Функция $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$

— непер. на $[0, 2\pi]$

$\Rightarrow f \in R[a, b]$.

J_2 / Замена $x - \pi = t$ / $-\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t + \pi} dt$

J_1 / 1-я теор. про сред. / $\int_0^{\pi} \frac{\sin \xi}{\xi} d\xi \geq 0$

J_2 / 1-я теор. про сред. / $-\int_{\pi}^{2\pi} \frac{\sin \xi}{\xi + \pi} d\xi \leq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow J_1 \geq J_2$

N 102 б) $\int_{-2}^0 x^3 2^x dx$ и $\int_0^2 x^3 2^x dx$

$J_1 = \int_{-2}^0 x^3 dx / x^3 \leq 0$ — знак неясен / $\Rightarrow$

$= 2^{\gamma_1} \int_{-2}^0 x^3 dx = 2^{\gamma_1} \frac{x^4}{4} \Big|_{-2}^0 = 2^{\gamma_1} \cdot \left(-\frac{1}{4} \cdot \frac{16}{16} \right) = -\frac{2^{\gamma_1} \cdot 4}{16}$

$J_2 = 2^{\gamma_2} \int_0^2 x^3 dx = 2^{\gamma_2} \frac{x^4}{4} \Big|_0^2 = 4 \cdot 2^{\gamma_2}$, $\gamma_1 \in [-2, 0]$, $\gamma_2 \in [0, 2]$

$J_1 \leq 0$, $J_2 \geq 0 \Rightarrow J_1 \leq J_2$

N 103 а) Оценить интеграл.

$J = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{1 + 0.5 \cos x}$

Разбиваем: $J = \int_0^{\pi} \frac{dx}{1 + 0.5 \cos x} + \int_{\pi}^{2\pi} \frac{dx}{1 + 0.5 \cos x} = J_1 + J_2$

$J_2 = \int_{2\pi-x=\pi}^{\pi} \frac{dx}{1 + 0.5 \cos x} = \int_0^{\pi} \frac{dt}{1 + 0.5 \cos t} = J_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow J = 2 \int_0^{\pi} \frac{dx}{1 + 0.5 \cos x} = 4 \int_0^{\pi} \frac{dx}{2 + \cos x} = 4 \int_0^{\pi} \frac{dx}{1 + 1 + \cos x} =$

$= 4 \int_0^{\pi} \frac{dx}{1 + 2 \cos^2 \frac{x}{2}} = 4 \frac{1}{1 + 2 \cos^2 \frac{\pi}{2}} \cdot \pi$, $\xi \in [0, \pi]$

Оценим $\frac{1}{3} < \frac{1}{1 + 2 \cos^2 \frac{\pi}{2}} < 1 \Rightarrow \frac{4\pi}{3} < J < 4\pi$.

N 103 б) Оценить интеграл $J = \int_0^{100} \frac{e^{-x}}{x+100} dx$

Разбиваем. Оценим $f(x) = \frac{1}{x+100}$ — монотонна, при $0 \leq x \leq 100$, а функции $g(x) = e^{-x}$ — убывающая, то

за 2-ю теор. про среднее

$J = 0.01 \int_0^{\xi} e^{-x} dx + 0.005 \int_{\xi}^{100} e^{-x} dx = 0.01(1 - e^{-\xi}) + 0.005(e^{-\xi} - e^{-100})$, $0 < \xi < 100 \Rightarrow$

$0.01 - 0.005e^{-100} - 0.005 < J < 0.01 - 0.005e^{-100}$

D/3 N 84 а), N 85 б), N 86 в), 87 д-и), N 88 а б в),
N 89 а) г), N 102 к), N 103 а) б) в) г)