Заняття 27. Інтеграл Рімана.

№78 Чи буде функція $[a,b] \to \mathbb{R}$ інтегровною за Ріманом на $[a,b]$, якщо

а) $f(x) = \begin{cases} sgn(\sin \frac{\pi}{x}), & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ $[a,b] = [0,1]$

Розв'язок.

Теор. Лебега. Нехай $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ - обмежена функція, та $E \subset [a,b]$ - множина її точок розриву. Функція f - інтегровна за Ріманом на $[a,b]$ $\Longleftrightarrow$ коли E - множина лебегової міри нуль.

Множина точок розриву f $E = \{x_k = \frac{1}{k}, k \in \mathbb{N}\}$, f - обмежена E - злічена, єдина гранична точка у множині E $\Rightarrow$ $\mu_G(E) = 0$ $\Rightarrow$ $\Rightarrow \mu_L(E) = 0$ $\Rightarrow$ за теор. Лебега $f \in R[a,b]$

№78 б) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & x = \frac{m}{n} \text{ - нескоротний дріб}, m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, n \in \mathbb{N} \\ 0, & \text{якщо } x \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cup \{0\} \end{cases}$

- функція Рімана. $[a,b] = [0,1]$.

Розв'язок. Раніше було доведено, що f - неперервна в усіх ірраціональних точках $[a,b]$ та розривна в кожній ~~ірра~~ раціональній точці цього сегмента. Тобто

Множина точок розриву f $E = [a,b] \cap \mathbb{Q}$ - злічена множина $\Rightarrow$ $\mu_L(E) = 0$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ За теор. Лебега f - інтегровна за Ріманом на $[a,b]$.

№78 г) $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ 1, & x \in \mathbb{Q} \end{cases}$ $[a,b] = [0,1]$

- функція Діріхле.

Розв'язок.

f - розривна в кожній дійсній точці (раніше доводили) $\Rightarrow$

Множина точок розриву f $E = [a,b]$.

Очевидно, що $\mu_L(E) \neq 0$ $\Rightarrow$

За теор. Лебега f - не інтегровна за Ріманом

$\boxed{№ 81\ g}$ Перевірити, чи вірне твердження: якщо $|f| \in R[a,b]$, то $f \in R[a,b]$

$\boxed{№ 81\ e}$ Перевірити:

якщо $[A,B] \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $[a,b] \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}$ такі, що $f \in R[a,b]$, $\varphi \in R[a,b]$, $E_\varphi \subset D_f$, ~~то $f \circ \varphi \in R$~~

то $f \circ \varphi \in R[a,b]$

Розв'язок. Не вірно. Контрприклад:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x = 0 \\ 1, & \text{якщо } x \neq 0 \end{cases}$$

— інтегровна за Ріманом на $[0,1]$.

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \text{ — іррац.} \\ \frac{1}{n}, & \text{якщо } x = \frac{m}{n} \text{ — нескорот.} \end{cases}$$ (функція Рімана)

— інтегровна за Ріманом на $[0,1]$

Але $f \circ \varphi = f(\varphi(x)) = \begin{cases} 0, & x \text{ — іррац.} \\ 1, & x \text{ — раціональн.} \end{cases}$

~~— розривна в~~ — функція Діріхле

— розривна в кожній дійсній точці

та не інтегровна за Ріманом на $[0,1]$

$\boxed{№ 82\ ж}$ Довести рівність

$$\int_0^{\pi/2} f(\sin 2x)\cos x\, dx = \int_0^{\pi/2} f(\cos^2 x)\cos x\, dx,$$

якщо $f \in C[a,b]$.

$\blacktriangle$ Д/З $\blacktriangledown$

№ 82 в) Довести рівність

$$\int_0^{\pi/2} f(\sin x)\, dx = \int_0^{\pi/2} f(\cos x)\, dx, \text{ якщо } f \in C[a,b]$$

$\blacktriangle$ $\displaystyle\int_0^{\pi/2} f(\sin x) dx = \left| \begin{matrix} \text{Заміна} \\ \frac{\pi}{2} - x = t \end{matrix} \right| = -\int_{\pi/2}^{0} f(\cos t)\, dt =$

$\displaystyle = \int_0^{\pi/2} f(\cos t)\, dt$ $\blacktriangledown$

№82 2) Довести рівність

$$\int_0^{\pi} x f(\sin x)\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\,dx, \quad \text{якщо } f\in C[0,1]$$

$$\underbrace{\int_0^{\pi} x f(\sin x)}_{I} = \int_0^{\pi} x f(\sin(\pi-x))\,dx = \left|\begin{matrix}\text{заміна}\\ \pi-x=t\end{matrix}\right| =$$

$$= \int_0^{\pi}(\pi-t)f(\sin t)\,dt = \pi\int_0^{\pi} f(\sin t)\,dt - \underbrace{\int_0^{\pi} t f(\sin t)\,dt}_{I}$$

$$\Rightarrow 2I = \pi\int_0^{\pi} f(\sin t)\,dt \Rightarrow I = \int_0^{\pi} x f(\sin x)\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin t)\,dt$$

№83 4) Обчислити інтеграл Рімана

$$I = \int_0^{100\pi}\sqrt{1-\cos 2x}\,dx$$

Розв'язок. $I = \int_0^{100\pi}\sqrt{2\sin^2 x}\,dx = \sqrt{2}\int_0^{100\pi}|\sin x|\,dx \ominus$

/ функція $f(x) = |\sin x|$ — періодична з періодом $T=\pi$,

$\int_a^{a+T} f(x)\,dx = \int_0^T f(x)\,dx$, $\int_{\pi k}^{\pi k+\pi}|\sin x|\,dx = \int_0^{\pi}|\sin x|\,dx$ $\forall k\in\mathbb{Z}$ /

$$\ominus\ \sqrt{2}\left(\sum_{k=0}^{99}\int_{\pi k}^{\pi k+\pi}|\sin x|\,dx\right) = 100\sqrt{2}\int_0^{\pi}|\sin x|\,dx =$$

$$= 100\sqrt{2}\int_0^{\pi}\sin x\,dx = -100\sqrt{2}\cos x\Big|_0^{\pi} = 200\sqrt{2}.$$

№83 3) Обчислити інтеграл Рімана:

$$\int_0^{4\pi}\frac{dx}{1+\varepsilon\cos x}, \quad \varepsilon\in[0,1)$$

Розв'язок. Спочатку знайдемо первісну.

Заміна $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ (універс. тригонометр.) $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}$

$(2n-1)\pi < x < (2n+1)\pi$, $n\in\mathbb{Z}$

$$I = \int\frac{dx}{1+\varepsilon\cos x} = \frac{2}{1-\varepsilon}\int\frac{dt}{t^2+\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}} = |\varepsilon<1| =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1-\varepsilon}\,\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{1+\varepsilon}} + C_n$$

Далі зшиваємо!

З неперервності первісної слідує, що

$J(\pi+2\pi n-0)=J(\pi+2\pi n+0)$

$$\frac{2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\frac{\pi}{2}+C_n=-\frac{2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\frac{\pi}{2}+C_{n+1}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_n=\frac{2\pi n}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}+C$$

$$(2n-1)\pi<x<(2n+1)\pi\Rightarrow n<\frac{x+\pi}{2\pi}<n+1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow n=\left[\frac{x+\pi}{2\pi}\right]\Rightarrow$$

первісна $J=\frac{2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1-\varepsilon}\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{1+\varepsilon}}+\frac{2\pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\cdot\left[\frac{x+\pi}{2\pi}\right]+C,$

$x\neq(2n+1)\pi,\ n\in \cancel{\pi}\ \mathbb{Z}$

$$\lim_{x\to(2n+1)\pi}J(x)=\frac{\pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}(2n+1).$$

Тоді функція ~~F(x)~~

$$F(x)=\begin{cases}\frac{2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1-\varepsilon}\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{1+\varepsilon}}+\frac{2\pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\left[\frac{x+\pi}{2\pi}\right], & x\neq\pi+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\\ \frac{\pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\cdot(2k+1), & \text{якщо } x=\pi+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

є первісною.

Далі застосовуємо формулу Ньютона-Лейбніца

$$J=F(4\pi)-F(0)=\frac{4\pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}.$$

$\boxed{N\ 81\ у}$ Обчислити інтеграл $J=\int_{0.5}^{2}\left(1+x-\frac{1}{x}\right)e^{x+\frac{1}{x}}dx$

Розв'язок. Заміна $x+\frac{1}{x}=t$. Маємо $x=\frac{t\pm\sqrt{t^2-4}}{2}$

два різні значення x для $2<t<2.5$, тому розбиваємо інтеграл J на два інтеграли:

$J_1=\int_{0.5}^{1}\left(1+x-\frac{1}{x}\right)e^{x+\frac{1}{x}}dx$ та $J_2=\int_{1}^{2}\left(1+x-\frac{1}{x}\right)e^{x+\frac{1}{x}}dx$

$$J_1=\left/\ x=\frac{t-\sqrt{t^2-4}}{2}\ \right/=0.5\int_{2.5}^{2}e^t\left(1-\frac{t}{\sqrt{t^4-4}}+t-\sqrt{t^2-4}\right)dt$$

$$J_2=\left/\ x=\frac{t+\sqrt{t^2-4}}{2}\ \right/=0.5\int_{2}^{2.5}e^t\left(1+\frac{t}{\sqrt{t^4-4}}+t+\sqrt{t^2-4}\right)dt$$

$$J = J_1 + J_2 = \int_2^{2.5} e^t \left(\frac{t}{\sqrt{t^2-4}} + \sqrt{t^2-4} \right) =$$

$$= \int_2^{2.5} e^t d(\sqrt{t^2-4}) + \int_2^{2.5} e^t \sqrt{t^2-4}\, dt = \Big/ \text{частями} \Big/$$

$$= e^t \sqrt{t^2-4} \Big|_2^{2.5} - \int_2^{2.5} e^t \sqrt{t^2-4}\, dt + \int_2^{2.5} e^t \sqrt{t^2-4}\, dt =$$

$$= 1.5\, e^{2.5}$$

Д/З N 78 б) 7), д) ; ~~N 79~~ N 82 ж)

N 83 б) 2) 10), N 84 х)