

Зачетная 26

Интерграл Римана

N 75 а)

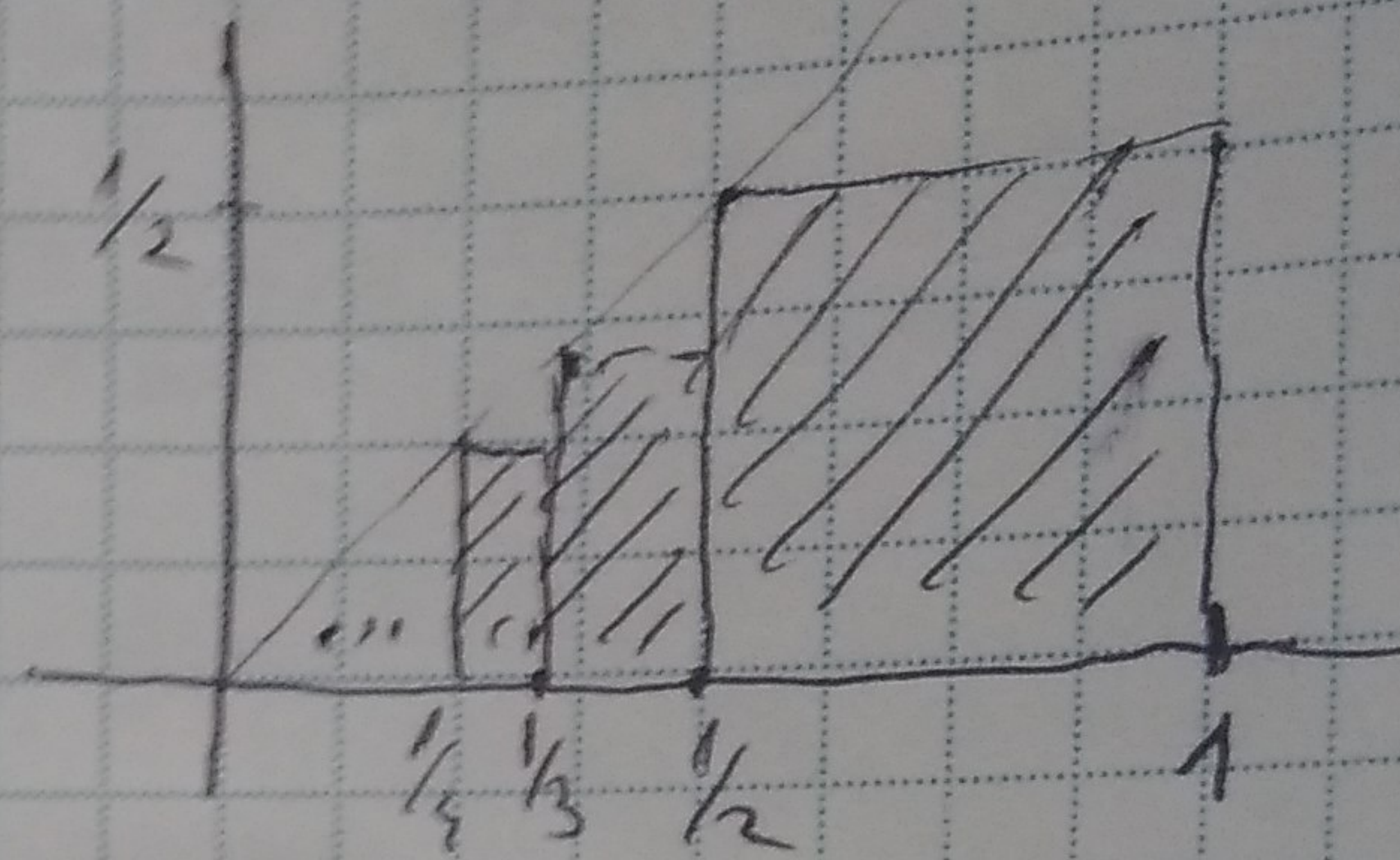
Доказать неравенство

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^3} < \frac{3}{2}$$

$$\Delta \quad \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^3} < \left(\sum_{k=2}^n \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{k(k-1)} \right) + 1 = \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{k} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) \right) + 1$$

или интерпретация суща при функции: $f(x) = x$
 и разбиении $P = \{x_k = \frac{1}{k}, k=1, n\}$

$$\leq \int_0^1 x dx + 1 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2} \quad \Delta$$



N 75 б) Доказать неравенство

$$\frac{2}{\pi} - \frac{1}{n} < \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \cos \frac{k\pi}{2n} < \frac{2}{\pi} \quad (*)$$

$\Delta \quad f(x) = \cos x$ — непрерывна на $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

$$\bar{S}_p(f) = \left/ \text{Верхняя сумма Дарбу} \right/ = \sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta x_k =$$

$$M_k = \sup_{x \in [x_k, x_{k+1}]} f(x)$$

$$\leq \left/ \text{Верхняя сумма Дарбу} \right/ = \sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta x_k =$$

$$x_k = \frac{k\pi}{2n}, k=0, n, \quad M_k = \cos x_k = \cos \frac{k\pi}{2n}$$

$$a=0, b=\frac{\pi}{2}, \quad \Delta x_k = \frac{\pi}{2n}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\pi}{2n} \cos \frac{k\pi}{2n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^{\pi/2} \cos x dx = \left[\sin x \right]_0^{\pi/2} = 1$$

$$\int_0^{\pi/2} \cos x dx \leq \bar{S}_p(f) \quad \text{по свойству верхних сумм Дарбу}$$

или Дарбу $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \cos \frac{k\pi}{2n} = \left[\cos \frac{\pi}{2} = 0 \right] = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \cos \frac{k\pi}{2n} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \cos \frac{k\pi}{2n} - \frac{1}{n} \geq \frac{2}{\pi} - \frac{1}{n}$

$$\underline{S}_p(f) = \left/ \text{Нижняя сумма Дарбу} \right/ = \sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta x_k =$$

$$m_k = \inf_{x \in [x_k, x_{k+1}]} f(x)$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\pi}{2n} \cos \frac{(k+1)\pi}{2n} = \left/ \text{Нижняя сумма Дарбу} \right/ = \sum_{k=1}^n \frac{\pi}{2n} \cos \frac{k\pi}{2n} \leq$$

$$\leq \int_0^{\pi/2} \cos x dx = 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \cos \frac{k\pi}{2n} \leq \frac{1}{\pi} \quad \Delta$$

N75 б) Довести неравенство $1 - \frac{1}{n} < \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k^2 + k}} < 1$

~~$\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k^2 + k}} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{k}{k^2}}} > \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{k^2}{k^2}}} \quad (*)$~~

~~$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$ — строго уб. на $[0, 1]$~~

~~$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{k+1}{n})^2}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{k}{n})^2}}$ — нижняя интегральная сумма~~

~~$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{k}{n})^2}} > \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} > \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \Big|_0^1 = \ln(1 + \sqrt{2})$~~

~~$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \Big|_0^1 = \ln(1 + \sqrt{2})$~~

~~$(*) \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{k^2}{n^2}}} + \frac{1}{n} \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{n} > \ln(1 + \sqrt{2}) + \frac{1}{n\sqrt{2}} - \frac{1}{n}$~~

~~$\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k^2 + k}} < \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = 1$~~

~~$\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k^2 + k}} > \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k^2 + k \cdot n}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{k}{n}}}$~~

~~$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$ — строго уб. на $[0, 1]$~~

~~$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{k}{n}}} > \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x}} = 2(1+x)^{1/2} \Big|_0^1 = 2\sqrt{2} - 2$~~

~~$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x}} = 2(1+x)^{1/2} \Big|_0^1 = 2\sqrt{2} - 2$~~

~~$\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k^2 + k}} > \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k^2 + n}} \geq \frac{n}{\sqrt{n^2 + n}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}}} > 1 - \frac{1}{n}$~~

~~$\frac{1}{1 + \frac{1}{n}} > (1 - \frac{1}{n})^2$~~

~~$\frac{n}{n+1} > (\frac{n-1}{n})^2$~~

~~$n^3 > (n+1)(n-1)^2$~~

~~$n^3 > (n+1)(n^2 - 2n + 1)$~~

~~$n^3 > n^3 - n^2 - n + 1$~~

~~$n^2 + n - 1 < 0$~~

~~$\Delta = 1 + 4 = 5 \quad n_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} < 1$~~

$\Rightarrow$ неравенство ~~(*)~~ справедливо. $\Rightarrow$

доведено левую часть неравенства — по лемме о монотонности

N 75 2) - 1)

Довести справедливо.

$$\sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{a_{k-1}}{a_k}\right) \frac{1}{\sqrt[m]{a_k}} < m, \text{ где } b=1, m \in \mathbb{N},$$

а последовательность (a_n) задана условиями $b=a_0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_n$

$$\Delta S_n = \sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{a_{k-1}}{a_k}\right) \frac{1}{\sqrt[m]{a_k}} = \sum_{k=1}^n (a_k - a_{k-1}) \cdot a_k^{-1-\frac{1}{m}} \quad (*)$$

интегр. сумма для $\varphi(x) = x^{-1-\frac{1}{m}}$
 разбитая на $a_k, k=0, n$

φ - спадает функция при $x \geq 1$,

тогда ΔS_n - нижняя интегральная сумма функции

$$(*) \int_1^{a_n} x^{-1-\frac{1}{m}} dx = -m x^{-\frac{1}{m}} \Big|_1^{a_n} = -m a_n^{-\frac{1}{m}} + m < m. \quad \blacktriangle$$

Озн. Множество $X \subset \mathbb{R}$ має ледеру (мордасеву) міру нуль, якщо $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ диліжен (скінченне) покриття множини X сімейством інтервалів $\{(L_i, \beta_i) \mid i \in \mathbb{N}\}$ ($\{(L_i, \beta_i) \mid i=1, n\}$), що

$$\forall n_1 \in \mathbb{N} \quad \sum_{k=1}^{n_1} (\beta_k - L_k) < \varepsilon \quad \left(\sum_{k=1}^n (\beta_k - L_k) < \varepsilon \right)$$

Дозначається $\mu_L(X) = 0$ ($\mu_G(X) = 0$).

N 76 Довести

а) якщо для множини A $\mu_G(A) = 0$, то $\mu_L(A) = 0$

$\Delta \mu_G(A) \leq 0$. ~~Відома~~ $\forall \varepsilon > 0$

$\mu_G(A) \leq 0 \Rightarrow \forall \varepsilon_1 > 0 \exists n \exists \{(L_i, \beta_i), i=1, n\}$ - покриття A : $\sum_{k=1}^n (\beta_k - L_k) < \varepsilon_1$

$\Rightarrow$ Справдиво і для $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2}$

$$\sum_{k=1}^n (\beta_k - L_k) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Можна ж тоді подувати нескінчен.
 кількість інтервалів $(L_k, \beta_k), k=n+1, n+2, \dots$

$$|\beta_k - L_k| \leq \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=n+1}^{\infty} (\beta_k - L_k) < \frac{\varepsilon}{2^n}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} (\beta_k - L_k) < \varepsilon \Rightarrow \mu_L(A) = 0 \quad \blacktriangle$$

N 76 δ

Довести, що якщо A — скінченна,
то $\mu_G(A) = 0$

Δ

▷

N 76 β

Довести, що якщо A — зліченна,
то $\mu_L(A) = 0$

Δ

▷

N 76 ε

Довести, що існує зліченна множина A
у якій $\mu_G(A) = 0$

Δ $A = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$

$\forall \varepsilon > 0 \quad (\alpha_1, \beta_1) = (0, \frac{\varepsilon}{2})$

Тоді залишається непокритим лише скінченна кількість точок множини $A \Rightarrow$

$\exists \{(\alpha_k, \beta_k) \mid k = 2, n\}$ — покриття множини

$A \setminus (0, \frac{\varepsilon}{2}) \quad \sum_{k=2}^n (\beta_k - \alpha_k) < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow$

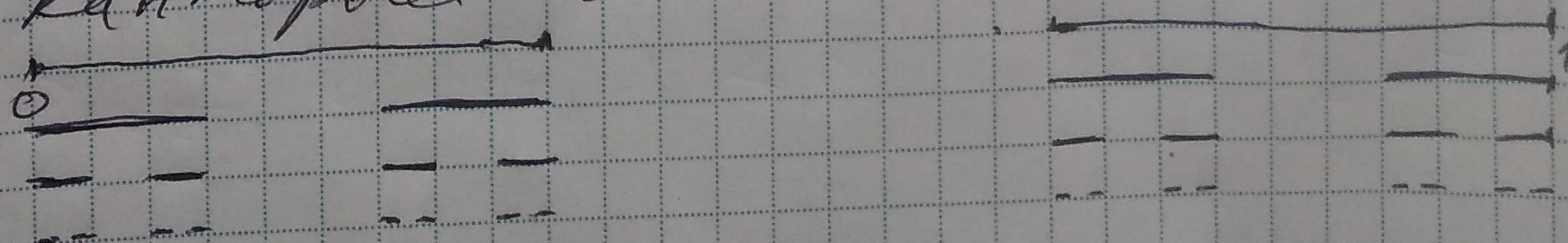
$\Rightarrow \sum_{k=1}^n (\beta_k - \alpha_k) < \varepsilon$ — ~~пок~~ скінченне покриття $A \Rightarrow$

$\mu_G(A) = 0$ ▷

N 76 ж

Довести, що існує біліній ідеал зліченна множина E , у якій $\mu_G(E) = 0$

Δ Відобразити приклад N 77 27) $E = K_3$ — канторова множина



так далі з відрізка $[0, 1]$ будують "відрізаючи" середньої третини, а неможливого відрізаючи в отриманих відрізках

Продовжуючи цей процес до нескінченності,
в результаті отримаємо математичну точку,
що залишилася, яка називається
канторовою множиною.
Або множиною Кантора.

Докажемо, що $m(K_3) = 0$. (міра Лебега)

Діагонально можна встановити

Для цього знайдемо сумарну довжину
всіх відрізків, що відкидаються:

на 1-й ітерації: $\frac{1}{3}$

на 2-й ітерації: $\frac{1}{9} + \frac{1}{9} = \frac{2}{3^2}$

на 3-й ітерації: $\frac{1}{27} + \frac{1}{27} + \frac{1}{27} + \frac{1}{27} = \frac{2^2}{3^3}$

на n -й ітерації: $\frac{2^{n-1}}{3^n}$

Сумарна довжина відрізків:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{3^n} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} = 1 \quad (\text{сума нескінч. спадної геомтр. прогресії})$$

$$\Rightarrow m(K_3) = 0$$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists$ номер ітерації n :

$$1 - \sum_{k=1}^n \frac{2^{k-1}}{3^k} < \varepsilon \quad (\text{зліва в нерівності -$$

- сумарна довжина відрізків,
що залишилися на n -й
ітерації, вона покриває
множину K_3)

$$\Rightarrow m(K_3) = 0$$

Докажемо тепер, що K_3 - білим неможливо
злізати множини. Для цього встановимо
взаємну однозначну відповідність між
тогочасною множиною та нескінченною
послідовністю нулів та одиниць.
Якщо при першому відкиданні маємо точку
потрапила у лівий відрізок, покладаємо
в початку послідовності 1, якщо в лівий - 0,
і так далі. Далі, після першого відкидання
отримаємо маленьку копію великого відрізка
з яким поступимо так само: якщо точка потрапила
після відкидання потрапила в правий відрізок - 1,
в лівий - 0 і так далі.

Оскільки множини послідовностей не мають
одичусь має потужність континуума, то
КЗ має таку потужність континуума

N 77 З'ясувати, чи будуть вершинами
множини бачити моргану чи
середовища нуль

$$2) A = \mathbb{Q} \cap (0, 1)$$

$$3) A = (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [-1, 1]$$

$$7) A = \bigcup_{n=0}^{\infty} (2n, 2n+1)$$

$$9) A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n-1} \right)$$

$$12) A = \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(-1 - \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n} \right) \right) \setminus [-1, 1]$$

~~N 78~~

Д/З

N 75 2, -2), 3); N 74 20), 21), 22)

N 76 4), 6), 20), 19)