Заняття 25 Інтеграл Рімана

~~Озн. Нехай P - довільне розбиття~~

Озн. Розбиттям P сегменту $[a, b]$ наз. скінченна множина точок $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, де $a = x_0 \leq x_1 \leq \ldots \leq x_n = b$

Озн. Нехай P — довільне розбиття сегменту $[a, b]$, $d(P) = \max\limits_{0 \leq i \leq n-1} \Delta x_i$, де $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$. На кожному сегменті візьмемо довільну точку ξ_i. Тоді інтегральною сумою наз. $S_P(f) = \sum\limits_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i$.

Озн. Число $J \in \mathbb{R}$ наз інтегралом Рімана функції $[a, b] \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, якщо

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \forall (P_{[a,b]}, \xi_P) \quad d(P) < \delta \Rightarrow |J - S_P(f)| < \varepsilon$$

$\boxed{N\,73\ ~~ж~~)}$ Обчислити інтеграл як границю інтегральної суми

$$\int_{-1}^{4} (1+x)\, dx.$$

Розвʼязок. $f(x) = 1 + x$, $f \in C_{[-1, 4]}$

Теор. якщо $f \in C[a, b]$, то $f \in R[a, b]$ (інтегровна за Ріманом)

$\Rightarrow f \in R[a, b]$.

Візьмемо ~~ξ_i~~ P — довільне розбиття

$P = \{ \underset{-1}{\overset{\shortparallel}{a}} = x_0 \leq x_1 \leq \ldots \leq x_n = \underset{4}{\overset{\shortparallel}{b}} \}$, $\xi_i = \frac{1}{2}(x_i + x_{i+1})$.

Тоді $S_P(f) = \sum\limits_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i = \sum\limits_{i=0}^{n-1} (1 + \xi_i) \Delta x_i =$

$= \sum\limits_{i=0}^{n-1} \left(1 + \frac{1}{2}(x_i + x_{i+1})\right) \Delta x_i = \sum\limits_{i=0}^{n-1} \left(1 + \frac{1}{2}(x_i + x_{i+1})\right)(x_{i+1} - x_i) =$

$= \sum\limits_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) + \frac{1}{2}(x_{i+1}^2 - x_i^2) = x_n - x_0 + \frac{1}{2}(x_n^2 - x_0^2) =$

$= 4 - (-1) + \frac{1}{2}(16 - 1) = 12.5$.

№73 н $\int_a^b x^m dx$, $0<a<b$, $m \neq -1$

Розв'язок. Оберемо P таким чином, щоб довжини підпроміжків утворювали геометричну прогресію, та візьмемо $\xi_i = x_i$.

Тоді $x_i = x_0 \cdot q^i$, $i=\overline{1,n}$, $x_0=a$, $x_n=b$, $q=\left(\frac{b}{a}\right)^{1/n}$,

$\xi_i = a\left(\frac{b}{a}\right)^{i/n}$, $\Delta x_i = a\left(\frac{b}{a}\right)^{i/n}\left(\left(\frac{b}{a}\right)^{1/n}-1\right)$.

Тоді $S_P(f) = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\Delta x_i = \sum_{i=0}^{n-1} a^{m+1}\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{i}{n}(m+1)}\cdot\left(\left(\frac{b}{a}\right)^{1/n}-1\right) =$

$= a^{m+1}\left(\left(\frac{b}{a}\right)^{1/n}-1\right)\cdot\sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{i(m+1)}{n}} = \left(b^{m+1}-a^{m+1}\right)\cdot\frac{\left(\frac{b}{a}\right)^{1/n}-1}{\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{m+1}{n}}-1}$

Нехай $d(P)\to 0 \Rightarrow n\to\infty$

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(b^{m+1}-a^{m+1}\right)\cdot\frac{\left(\frac{b}{a}\right)^{1/n}-1}{\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{m+1}{n}}-1} =$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\left(b^{m+1}-a^{m+1}\right)\cdot\frac{\frac{1}{n}\ln\left(\frac{b}{a}\right)+o\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{m+1}{n}\ln\left(\frac{b}{a}\right)+o\left(\frac{1}{n}\right)} =$

$= \frac{\left(b^{m+1}-a^{m+1}\right)}{m+1}$.

Відповідь: $\int_a^b x^m dx = \frac{b^{m+1}-a^{m+1}}{m+1}$.

№73 л $\int_a^b \frac{dx}{x^2}$, $0<a<b$

Розв'язок $f(x)=\frac{1}{x^2} \in R[a,b]$

$\xi_i=\sqrt{x_i x_{i+1}}$, тоді

$S_P(f)=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{\Delta x_i}{x_i x_{i+1}} = \sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{1}{x_i}-\frac{1}{x_{i+1}}\right) = \frac{1}{a}-\frac{1}{b}$

Тоді $\int_a^b\frac{dx}{x^2} = \frac{1}{a}-\frac{1}{b}$

№73 к $\int_0^{\pi/2}\sin x\, dx$

Розв'язок. $P=\left\{x_i=\frac{i\pi}{2n},\ i=\overline{0,n}\right\}$, $\xi_i=x_i \Rightarrow$

$\Delta x_i=\frac{\pi}{2n}$, $S_P(f)=\frac{\pi}{2n}\sum_{i=0}^{n-1}\sin\left(i\frac{\pi}{2n}\right) =$ / стор. 43 №40 л) / $=$

$= \frac{\sqrt{2}\pi}{4n}\cdot\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4n}\right)}{\sin(\pi/4n)} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{\sqrt{2}\pi}{4n}\cdot\frac{\sin\frac{\pi}{4}}{\pi/4n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$

Відповідь $\int_0^{\pi/2}\sin x\, dx = 1$

№73с $\int_0^{\pi} \ln(1-2\alpha\cos x+\alpha^2)\,dx$ 1) при $|\alpha|<1$ 2) при $|\alpha|>1$

Розв'язок

Комплексні числа

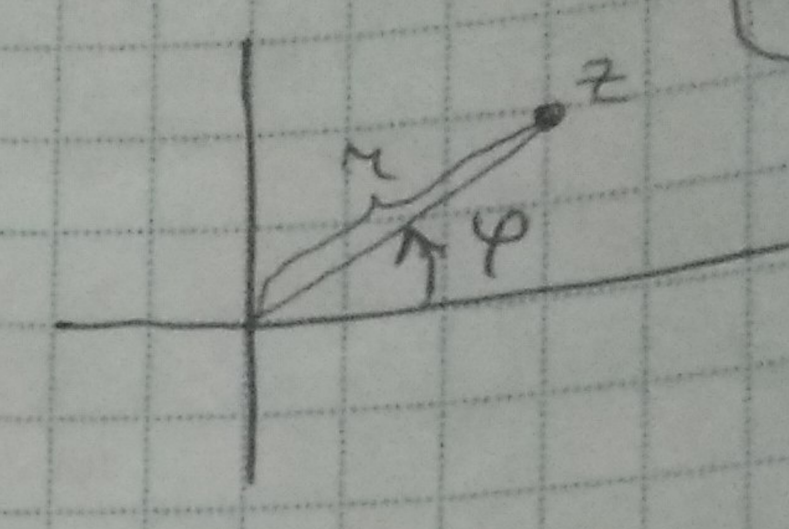
Комплексне число — це упорядк. пара дійсних чисел (x, y), позначає.

$z = x + iy$ — алгебр. форма запису,

$i = \sqrt{-1}$, уявна одиниця

1

або $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ — тригонометр. форма



або $z = re^{i\varphi}$ — експоненційна форма запису

$x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$,

$r = \sqrt{x^2+y^2}$, $\varphi = \begin{cases} \operatorname{arctg} y/x, & \text{якщо } x>0 \\ \operatorname{arctg} y/x + \pi, & \text{якщо } x<0,\ y\geq 0 \\ \operatorname{arctg} y/x - \pi, & \text{якщо } x<0,\ y<0 \\ \pi/2 \operatorname{sign} y, & \text{якщо } x=0. \end{cases}$

Властивості: $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2 \Rightarrow$

$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$

$z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2+y_2^2} + i\cdot\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}$

$z_1 = r_1e^{i\varphi_1}$, $z_2 = r_2e^{i\varphi_2} \Rightarrow z_1\cdot z_2 = r_1r_2e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$

$z_1/z_2 = r_1/r_2 \, e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$

Формула Муавра: $z^n = r^n e^{i\varphi n} = r^n(\cos\varphi n + i\sin\varphi n)$

$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\cdot e^{i\frac{\varphi+2\pi k}{n}} = \sqrt[n]{r}\cdot\left(\cos\left(\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right)\right)$,

$k = \overline{0, n-1}$

— рівномірно розподілені на колі радіуса $\sqrt[n]{r}$.

Спряжене комплексне число $\overline{z} = x - iy$

$|z|^2 = z\cdot\overline{z}$.

$z + \overline{z} = r\cos\varphi + ir\sin\varphi + (r\cos\varphi - ir\sin\varphi) = 2r\cos\varphi$

$z - \overline{z} = 2ir\sin\varphi$

Нехай $P = \{x_k = \frac{\pi}{n}k,\ k = \overline{0,n}\}$, $\xi_k = x_k$

Нехай $z = e^{ix} = \cos x + i\sin x$, $\overline{z} = \cos x - i\sin x$

тоді $f(x) = \ln(1 - 2\alpha\cos x + \alpha^2) = \ln(|z|^2 - (z+\overline{z})\alpha + \alpha^2) =$

$= \ln(z\cdot\overline{z} - (z+\overline{z})\alpha + \alpha^2) = \ln((\alpha - z)(\alpha - \overline{z}))$

$$S_P(f) = \frac{\pi}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(\left(\alpha - e^{i\frac{\pi}{n}k}\right)\left(\alpha - e^{-i\frac{\pi}{n}k}\right)\right) =$$

$$= \frac{\pi}{n} \ln \prod_{k=0}^{n-1} \left(\alpha - e^{i\frac{\pi}{n}k}\right)\left(\alpha - e^{-i\frac{\pi}{n}k}\right) \ (=)$$

Точки (компл. числа) $e^{\pm i\frac{\pi}{n}k}$, $k=\overline{0,n-1}$ — корені ~~...~~ $\sqrt[2n]{1}$ або розв'язки рівняння $z^{2n}=1$.

Тільки $z_0 = e^{i\cdot 0}$ повторюється двічі у виразі під логарифмом, але при цьому не вистачає множника з $z^* = e^{i\pi} = -1$

За основною теоремою алгебри
$$z^{2n}-1 = \prod_{k=0}^{2n-1}\left(z - e^{i\frac{2\pi}{2n}k}\right) = \prod_{k=0}^{2n-1}\left(z - e^{i\frac{\pi}{n}k}\right)$$

$$(=)\ \frac{\pi}{n}\ln\frac{(\alpha-1)(\alpha^{2n}-1)}{\alpha+1}$$

1) Якщо $|\alpha|<1$, то $\lim\limits_{d(P)\to 0} S_P(f) = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\ln\frac{(\alpha-1)(\alpha^{2n}-1)}{\alpha+1} = 0$

2) Якщо $|\alpha|>1$, то $\lim\limits_{d(P)\to 0} S_P(f) = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\ln\frac{(\alpha-1)(\alpha^{2n}-1)}{\alpha+1} =$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{n}\ln\alpha^{2n} + \frac{\pi}{n}\ln\frac{(\alpha-1)\left(1-\frac{1}{\alpha^{2n}}\right)}{\alpha+1} = 2\pi\ln|\alpha|.$$

Відповідь: $$J = \begin{cases} 0, & \text{якщо } |\alpha|<1 \\ 2\pi\ln|\alpha|, & \text{якщо } |\alpha|>1 \end{cases}$$

$\boxed{\text{N 74 a)}}$ За допомогою інтеграла Рімана та інтегр. сум Дарбу обч. $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$,

a) $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k+n}$.

Розв'язок. Суми Дарбу

Верхня $\overline{S}_P(f) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} M_k\Delta x_k$; нижня $\underline{S}_P(f) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} m_k\Delta x_k$,

де $M_k = \sup\limits_{x\in[x_k,x_{k+1}]} f(x)$, $m_k = \inf\limits_{x\in[x_k,x_{k+1}]} f(x)$.

$S_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\left(\frac{k}{n}\right)+1} \rightarrow$ | $f(x) = \frac{1}{x+1}$

$P = \{x_k = \frac{k}{n},\ k=\overline{0,n}\} \Rightarrow [a,b]=[0,1]$,

$\Delta x_k = \frac{1}{n}$, $\xi_k = x_{k+1}$,

отже S_n – інтегральна сума

$$\rightarrow \int_0^1 \frac{1}{x+1}dx = \ln|x+1|\Big|_0^1 = \ln 2.$$

$\boxed{N\,74\ а)\ 6)}$ $S_n = \sum_{k=1}^{n-1}\left(1+\frac{k}{n}\right)\sin\frac{\pi k}{n^2}$

Розвʼязок. $k<n$, тоді $\frac{\pi k}{n^2} \to 0$ при $n\to\infty$ $\forall k=\overline{1,n-1}$

$\Rightarrow$ можна скорист. асимпт. формулою

$\sin\frac{\pi k}{n^2} \sim \frac{\pi k}{n^2}$

Тоді $S_n \sim \sum_{k=1}^{n-1}\left(1+\frac{k}{n}\right)\cdot\frac{\pi k}{n^2} \to \Big/\ f(x)=(1+x)\pi x,\ x_k=\frac{k}{n},\ \Delta x_k=\frac{1}{n},\ \xi_k=x_k\ \Big/$

$\to \int_0^1 (1+x)\pi x\,dx = \pi\left(\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 = \pi\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right) = \frac{5\pi}{6}.$

$\boxed{N\,74\ а)\ 14)}$ $S_n = \frac{1}{n}\cdot\sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!}}$

Розвʼязок. $S_n = \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n^n\cdot n!}} = e^{\frac{1}{n}\ln\left(\frac{(2n)!}{n^n\cdot n!}\right)} =$

$= e^{\frac{1}{n}\left(\ln((2n)!) - \ln n^n - \ln(n!)\right)} =$

$= e^{\frac{1}{n}\left(\ln\prod_{k=1}^{2n}k - \ln\prod_{k=1}^{n}n - \ln\prod_{k=1}^{n}k\right)} =$

$= e^{\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{2n}\ln k - \sum_{k=1}^{n}\ln n - \sum_{k=1}^{n}\ln k\right)} =$

$= e^{\frac{1}{n}\left(\sum_{k=n+1}^{2n}\ln k - \sum_{k=n+1}^{2n}\ln n\right)} = e^{\frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{2n}\ln\frac{k}{n}} \to$

$\to e^{\int_1^2 \ln x\,dx}$;

$\int_1^2 \ln x\,dx = \Big/$ Частинами: $u=\ln x$, $dv=dx$, $du=\frac{dx}{x}$, $v=x$ $\Big/ =$

$\int_a^b u\,dv = u\cdot v\Big|_a^b - \int_a^b v\,du$

$= x\ln x\Big|_1^2 - \int_1^2 \frac{x}{x}\,dx = 2\ln 2 - 1.$

Відповідь: $e^{2\ln 2 - 1} = \frac{4}{e}.$

Д/З. N 73 а) о), м);

N 74 а – 3), 9), 15) 16), 17), 18), 19)

5)