

Зачет 24

Интегрирование по частям. Функции

Метод невязки. Коэф. МНК

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx = Q_{n-1}(x) \sqrt{ax^2+bx+c} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

N55a

$$\int \frac{t^{10}}{\sqrt{t^2+1}} dt = (At^9 + Bt^8 + Ct^7 + Dt^6 + Et^5 + Ft^4 + Gt^3 + Ht^2 + It + J) \sqrt{t^2+1} + \lambda \int \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}} \quad (*)$$

Дифференцируем:

$$\frac{t^{10}}{\sqrt{t^2+1}} = (9At^8 + 8Bt^7 + 7Ct^6 + 6Dt^5 + 5Et^4 + 4Ft^3 + 3Gt^2 + 2Ht + I) \sqrt{t^2+1} + (At^9 + Bt^8 + Ct^7 + Dt^6 + Et^5 + Ft^4 + Gt^3 + Ht^2 + It + J) \cdot \frac{t}{\sqrt{t^2+1}} + \frac{\lambda}{\sqrt{t^2+1}} \Rightarrow$$

$$t^{10} = (9At^8 + 8Bt^7 + 7Ct^6 + 6Dt^5 + 5Et^4 + 4Ft^3 + 3Gt^2 + 2Ht + I)(t^2+1) + At^{10} + Bt^9 + Ct^8 + Dt^7 + Et^6 + Ft^5 + Gt^4 + Ht^3 + It^2 + Jt + \lambda \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t^{10}: 1 = 9A + A \Rightarrow A = \frac{1}{10}$$

$$t^9: 0 = 8B + B \Rightarrow B = 0$$

$$t^8: 0 = 7C + 9A + C \Rightarrow 8C = -9A = -\frac{9}{10} \Rightarrow C = -\frac{9}{80}$$

$$t^7: 0 = 6D + 8B + D \Rightarrow D = 0$$

$$t^6: 0 = 5E + 7C + E \Rightarrow 6E = -7C = \frac{63}{80} \Rightarrow E = \frac{63}{480}$$

$$t^5: 0 = 4F + 6D + E \Rightarrow F = 0$$

$$t^4: 0 = 3G + 5E + G \Rightarrow 4G = -5E = -\frac{63}{96} \Rightarrow G = -\frac{63}{384}$$

$$t^3: 0 = 2H + 4F + H \Rightarrow H = 0$$

$$t^2: 0 = I + 3G + I \Rightarrow 2I = -3G = \frac{63}{128} \Rightarrow I = \frac{63}{256}$$

$$t^1: 0 = 2H + J \Rightarrow J = 0$$

$$t^0: 0 = I + \lambda \Rightarrow \lambda = -\frac{63}{256}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{10} t^9 + \frac{9}{80} t^7 + \frac{63}{480} t^5 - \frac{63}{384} t^3 + \frac{63}{256} t \right) \sqrt{t^2+1} -$$

$$- \frac{63}{256} \int \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}} \quad y_1$$

$$y_1 = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}} = \ln |t + \sqrt{t^2+1}| + C$$

N554

$$\int \frac{t+4}{(t-1)(t+2)^2 \sqrt{t^2+t+1}} dt \quad \text{E}$$

Решение. 1) ~~Решение~~ ~~за 900 ММК~~ $\frac{t+4}{(t-1)(t+2)^2} = \frac{A}{t-1} + \frac{B}{t+2} + \frac{C}{(t+2)^2}$
за 900 ММК:

$$t+4 = A(t+2)^2 + B(t-1)(t+2) + C(t-1)$$

$$t=2 \Rightarrow 2 = -3C \Rightarrow C = -2/3$$

$$t=1 \Rightarrow 5 = 9A \Rightarrow A = 5/9$$

$$t=0 \Rightarrow 4 = -C \Rightarrow 0 = A+B \Rightarrow B = -5/9$$

$$\text{E} \quad \frac{5}{9} \int \frac{dt}{(t-1)\sqrt{t^2+t+1}} - \frac{5}{9} \int \frac{dt}{(t+2)\sqrt{t^2+t+1}} - \frac{2}{3} \int \frac{dt}{(t+2)^2 \sqrt{t^2+t+1}}$$

$$J_1 = \int \frac{1}{t-1} = z \quad \int \frac{dz}{z \sqrt{z^2+3z+3}} = \int \frac{dz}{z^2 \sqrt{1+\frac{3}{z}+\frac{3}{z^2}}} = \int \frac{d(\frac{1}{z})}{\sqrt{1+\frac{3}{z}+\frac{3}{z^2}}}$$

$$t^2+t+1 = (t-1)^2+3(t-1)+3$$

$$= \int \frac{1}{z} = y \quad = - \int \frac{dy}{\sqrt{1+3y+3y^2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{dy}{\sqrt{y^2+y+\frac{1}{3}}}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{dy}{\sqrt{(y+\frac{1}{2})^2+\frac{1}{12}}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \ln |y+\frac{1}{2}+\sqrt{(y+\frac{1}{2})^2+\frac{1}{12}}| + C$$

J2 = Area 2021240

$$J_3 = \int \frac{1}{t+2} = z \quad \int \frac{dz}{z^2 \sqrt{z^2-3z+3}} = \int \frac{dz}{z^3 \sqrt{1-\frac{3}{z}+\frac{3}{z^2}}}$$

$$t^2+t+1 = (t+2)^2-3(t+2)+3$$

$$= \int \frac{1}{z} = y \quad = - \int \frac{y dy}{\sqrt{1-3y+3y^2}} = \text{МКК, см 6559}$$

N555 A $\int \frac{dt}{(1+t^2)\sqrt{1-t^2}} = \int \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} = z \quad \text{E}$

$$t^2 = z^2(1-t^2)$$

$$(1+z^2)t^2 = z^2$$

$$t^2 = \frac{z^2}{1+z^2}, \quad t = \frac{z}{\sqrt{1+z^2}}$$

$$dt = \frac{\sqrt{1+z^2} - z \cdot \frac{z}{\sqrt{1+z^2}}}{1+z^2} dz$$

$$\text{E} \quad \int \frac{dz}{(1+z^2)^{3/2} (1+\frac{z^2}{1+z^2})} \cdot \frac{z \cdot \sqrt{1+z^2}}{z} = \int \frac{dz}{1+z^2} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \arctg \sqrt{2} z + C$$

Алгоритм Евклида: 1) $\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm\sqrt{a} \cdot x + z$, если $a > 0$
 2) $\sqrt{ax^2+bx+c} = xz \pm \sqrt{c}$, если $c > 0$
 3) $\sqrt{ax^2+bx+c} = z \cdot (x-x_1)$,
 $\equiv \sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)} = z \cdot (x-x_1)$,
 звать интеграл
 в инт. big part
 функции.

N 56 a) $\int \frac{dt}{t + \sqrt{t^2+t+1}}$ $\ominus$

Разложение $a=1 > 0 \Rightarrow 1-a$ не год. Евклида

$\sqrt{t^2+t+1} = -t + z \Rightarrow t = \frac{z^2-1}{1+z}, dt = \frac{2z^2+2z+2}{(1+z)^2} dz$

$\ominus \int \frac{2z^2+2z+2}{z(1+z)^2} dz \ominus / \text{МНК}$

$\frac{2z^2+2z+2}{z(1+z)^2} = \frac{A}{(1+z)^2} + \frac{B}{1+z} + \frac{C}{z}$

$\Rightarrow \begin{cases} 2 = 2B + 4C \\ 2 = A + B + 4C \\ 2 = C \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} A = -3 \\ B = -3 \\ C = 2 \end{matrix}$ $\ominus$

$\ominus -3 \int \frac{dz}{(1+z)^2} - 3 \int \frac{dz}{1+z} + 2 \int \frac{dz}{z} = \frac{3}{2(1+z)} + \frac{1}{2} \ln \frac{z^4}{|1+z|^3} + C$

Алгоритм Чебышева: $\int x^m(a+bx^n)^p dx$

- 1) p - целое $\Rightarrow x = t^N$, где N - наименьший знаменатель градуса m и n
- 2) $\frac{m+1}{n}$ - целое $\Rightarrow a+bx^n = t^N$, где N - знаменатель градуса p .
- 3) $\frac{m+1}{n} + p$ - целое $\Rightarrow ax^{-n} + b = t^N$, где N - знаменатель градуса p .

В ином случае $\int$ не берется в элементарных функциях

N 57 a) $\int \sqrt[3]{t} (2+\sqrt{t})^2 dt = \int t^{1/3} (2+t^{1/2})^2 dt$

$\Rightarrow p=2$ - целое $\Rightarrow t = y^6$, $dt = 6y^5 dy$
 $m=1/3, n=1/2$ $\Rightarrow \int y^2 (2+y^3)^2 \cdot 6y^5 dy =$

$= 6 \int (4 + 4y^3 + y^6) y^7 dy = 6 \int (4y^7 + 4y^{10} + y^{13}) dy =$

$= 6 \left(\frac{y^8}{2} + \frac{4y^{11}}{11} + \frac{y^{14}}{14} \right) + C = 6 \left(\frac{t^{8/6}}{2} + \frac{4}{11} t^{11/6} + \frac{t^{14/6}}{14} \right) + C$

N57 b $\int t^{1/3} (2+t^{2/3})^{1/4} dt \odot / p=1/4, n=2/3, m=1/3$

$\frac{m+1}{n} = \frac{4/3}{2/3} = 2$ — yes $\Rightarrow$ 2-е правило

$2+t^{2/3} = y^N = y^4$

$\Rightarrow t = (y^4 - 2)^{3/2}, dt = \frac{3}{2}(y^4 - 2)^{1/2} \cdot 4y^3 dy$

$\odot \int (y^4 - 2)^{1/2} \cdot y \cdot 6(y^4 - 2)^{1/2} \cdot y^3 dy =$

$= 6 \int (y^4 - 2) \cdot y^4 dy = 6 \int (y^8 - 2y^4) dy = 6 \left(\frac{y^9}{9} - \frac{2y^5}{5} \right) + C$

$= 6 \left((2+t^{2/3})^{9/4} - \frac{2}{5} (2+t^{2/3})^{5/4} \right) + C$

~~N57 d $\int t^{-2/3} (1+t^{2/3})^{-1}$~~

N57 e $\int t^{11} (1+t^4)^{-1/2} dt \odot / p=-1/2, m=11, n=4$

$\frac{m+1}{n} = -\frac{11+1}{4} = -\frac{10}{4} \notin \mathbb{Z}$

$\frac{m+1}{n} + p = -\frac{11+1}{4} - \frac{1}{2} = -3 \notin \mathbb{Z}$

$\Rightarrow$ 3-е правило

$t^{-4} + 1 = y^2$

$t^{-4} = y^2 - 1 \Rightarrow t = (y^2 - 1)^{-1/4}, dt = -\frac{1}{4}(y^2 - 1)^{-5/4} \cdot 2y dy$

$\odot \int t^{11} \cdot t^{-2} (t^{-4} + 1)^{-1/2} dt =$

$= \int (y^2 - 1)^{13/4} \cdot y^{-1} \cdot (-\frac{1}{4})(y^2 - 1)^{-5/4} \cdot 2y dy =$

$= -\frac{1}{2} \int (y^2 - 1)^2 dy = -\frac{1}{2} \int (y^4 - 2y^2 + 1) dy = -\frac{1}{2} \left(\frac{y^5}{5} - \frac{2}{3} y^3 + y \right) + C$

$= -\frac{1}{2} \left((t^{-4} + 1)^{5/2} - \frac{2}{3} (t^{-4} + 1)^{3/2} + (t^{-4} + 1)^{1/2} \right) + C$

Интер. тригоном. функций.
Универсальное тригонометрическое

N60 a

$\operatorname{tg} \frac{t}{2} = y \Rightarrow \sin t = \frac{2y}{1+y^2}, \cos t = \frac{1-y^2}{1+y^2}, dt = \frac{2dy}{1+y^2}$

$\int \frac{dt}{2 \sin t - \cos t + 5} = \left| \operatorname{tg} \frac{t}{2} = y \right| =$

$= \int \frac{2dy}{(1+y^2) \left(2 \cdot \frac{2y}{1+y^2} - \frac{1-y^2}{1+y^2} + 5 \right)} = 2 \int \frac{dy}{4y - (1-y^2) + 5(1+y^2)} =$

$$= 2 \int \frac{dy}{6y^2 + 4y + 4} = \int \frac{dy}{3y^2 + 2y + 2} =$$

! D/3 N55 т), N56 б), N57 б), 2) г), N58 а), N59 г),
N60 в), N64 в), N65 а)

N65 а) Знайти одну з первісних, якщо вона існує, а також первісну в широкому розумінні.

Озн. Функція $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ наз. первісною в широкому розумінні, якщо $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ не має похідну $F' = f$ $\forall x \in X$ за Ойлер-Геллером, але для кожного x_0 існує деяка частина X так, що $\forall x \in X \setminus A \exists F'(x) = f(x)$, де A — це ділянка без злізкої точки.

F — непер. на X , $\forall x \in X \setminus A \exists F'(x) = f(x)$, де A — це ділянка без злізкої точки.

65 а) $f(x) = x|x|$ — непер. на $\mathbb{R}$.

$$F(x) = \int x|x| dx = \text{sgn}(x) \cdot \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} \cdot \text{sgn}(x) + C =$$

— непер. на $\mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \exists F'(x) = f(x)$

$x_0 = 0$: f — непер. в т. $x_0 = 0$. $\Rightarrow F'(0) = f(0) = 0$

$\Rightarrow F$ — первісна т.ч. f , $\Rightarrow F$ також і первісна в широкому розумінні.

N65 б) $f(x) = \text{sgn}(x)$

$F(x) = |x| + C$ — непер. на $\mathbb{R}$.

f — позитивна в т. 0. Невідомо, чи дійсно

F — первісною в т. $x_0 = 0$:

$$\nexists \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x_0 + \Delta x) - F(x_0)}{\Delta x} \quad \text{при } x_0 = 0$$

$$\text{Дійсно } \left(\lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = 1 \right) \neq \left(\lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = -1 \right)$$

$\Rightarrow F$ не є первісною.

Але $\{0\}$ — скінченна множина $\Rightarrow$ не ділянка без злізкої точки

$\Rightarrow F$ — первісна в широкому розумінні.