Занятие 22 Интегрирование по частям

$\boxed{N\ 44\ л}$

$$\int \frac{t \ln t}{\sqrt{1+t^2}}\, dt = \int \ln t \cdot d\left(\sqrt{1+t^2}\right) \ominus$$

$$\ominus \left/ \begin{matrix} \int u\, dv = uv - \int v\, du \\ u = \ln t,\ dv = \frac{t\,dt}{\sqrt{1+t^2}} \end{matrix} \right/ \ominus \sqrt{1+t^2} \cdot \ln t -$$

$$- \int \sqrt{1+t^2} \cdot \frac{1}{t}\, dt = \sqrt{1+t^2} \cdot \ln t - J_1.$$

$$J_1 = \int \frac{\sqrt{1+t^2}}{t}\, dt = \left/ \begin{matrix} t = \operatorname{sh} x \\ \sqrt{1+t^2} = \operatorname{ch} x \end{matrix} \right/ = \int \frac{\operatorname{ch} x \cdot \operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} t}\, dx =$$

$$= \int \frac{\operatorname{ch}^2 x}{\operatorname{sh} x}\, dx = \int \frac{\operatorname{ch}^2 x}{\operatorname{sh}^2 x}\, d(\operatorname{ch} x) = \cancel{\int \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{sh}^2 x}} =$$

$$= \int \frac{\operatorname{ch}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x - 1}\, d(\operatorname{ch} x) = \left/ u = \operatorname{ch} x \right/ = \int \frac{u^2}{u^2-1}\, du =$$

$$= \int \left(1 + \frac{1}{u^2-1}\right) du = u + \frac{1}{2} \ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right| + C =$$

$$= \operatorname{ch} x + \frac{1}{2} \ln\left|\frac{\operatorname{ch} x - 1}{\operatorname{ch} x + 1}\right| + C = \sqrt{1+t^2} + \frac{1}{2} \ln\left|\frac{\sqrt{1+t^2}-1}{\sqrt{1+t^2}+1}\right| + C$$

$\boxed{N46\ а)}$

$$\int \ln t\, dt = \left/ \begin{matrix} u = \ln t, & dv = dt \\ du = \frac{dt}{t}, & v = t \end{matrix} \right/ =$$

$$= t \ln t - \int \frac{t}{t}\, dt = t \ln t - \int dt = t \ln t - t + C$$

$\boxed{N\ 46\ б}$

$$\int \operatorname{arcctg} \cancel{x}\, dt = \left/ \begin{matrix} u = \operatorname{arcctg} t, & dv = dt \\ du = -\frac{dt}{1+t^2}, & v = t \end{matrix} \right/ =$$

$$= t \operatorname{arcctg} t - \int \frac{t}{1+t^2}\, dt = t \operatorname{arcctg} t - \frac{1}{2} \ln|1+t^2| + C$$

$\boxed{N\ 46\ ж)}$

$$1)\ \int t \ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right) dt = \int t \ln(1+t)\, dt -$$

$$- \int t \ln(1-t)\, dt = J_1 - J_2$$

$$J_1 = \left/ \begin{matrix} u = \ln(1+t), & dv = t\,dt \\ du = \frac{dt}{1+t}, & v = \frac{t^2}{2} \end{matrix} \right/ = \frac{t^2}{2} \ln(1+t) - \int \frac{t^2}{2(1+t)}\, dt =$$

$$= \frac{t^2}{2} \ln(1+t) - \int \frac{(t+1)^2 - 2(t+1) + 1}{2(1+t)}\, dt = \frac{t^2}{2} \ln(1+t) -$$

$$- \frac{1}{2} \int \left((t+1) - 1 + \frac{1}{t+1}\right) dt = \frac{t^2}{2} \ln(1+t) - \frac{1}{2}\left(\frac{(t+1)^2}{2} - t + \ln|t+1|\right) + C$$

J_2 вычисляется аналогично.

2) $\int t^2 \ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right) dt = \left| \begin{array}{l} u = \ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right), \ dv = t^2 dt \\ du = \left(\frac{1}{1+t} - \frac{1}{1-t}\right) dt, \ v = \frac{t^3}{3} \end{array} \right|$

$= \frac{t^3}{3} \ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right) - \int \frac{-2t}{1-t^2} \cdot \frac{t^3}{3} dt =$

$= \frac{t^3}{3} \ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right) + \frac{2}{3} \underbrace{\int \frac{t^4}{1-t^2} dt}_{J_1}$

$J_1 = \int \frac{t^4}{1-t^2} dt = \int \frac{t^4 - 1 + 1}{1-t^2} dt =$

$= \int \left(\frac{(t^2-1)(t^2+1)}{1-t^2} + \frac{1}{1-t^2} \right) dt = -\int \left(t^2 + 1 + \frac{1}{t^2-1} \right) dt =$

$= -\left(\frac{t^3}{3} + t + \frac{1}{2} \ln\left| \frac{t-1}{t+1} \right| \right) + C$

$\boxed{46\ з}$ $\int \operatorname{arctg} \sqrt{t}\, dt =$

$\boxed{N\,46\ \text{м}}$ $\int t \cos t\, dt = \left| \begin{array}{l} u = t \\ dv = \cos t\, dt \\ du = dt, \ v = \sin t \end{array} \right| =$

$= t \sin t - \int \sin t\, dt = t \sin t + \cos t + C.$

$\boxed{N\,46\ \text{к}}$ $J = \int e^{at} \cos bt\, dt = \left| \begin{array}{l} u = e^{at}, \ dv = \cos bt\, dt \\ du = a e^{at} dt, \ v = \frac{\sin bt}{b} \end{array} \right| =$

$= \frac{1}{b} e^{at} \sin bt - \frac{a}{b} \int e^{at} \sin bt\, dt =$

$= \left| \begin{array}{l} u = e^{at}, \ dv = \sin bt\, dt \\ du = a e^{at} dt, \ v = -\frac{\cos bt}{b} \end{array} \right| = \frac{1}{b} e^{at} \sin bt -$

$- \frac{a}{b} \left(- \frac{e^{at} \cos bt}{b} + \frac{a}{b} \int e^{at} \cos bt\, dt \right) \Rightarrow$

$J = \frac{1}{b} e^{at} \sin bt + \frac{a}{b^2} e^{at} \cos bt - \frac{a^2}{b^2} J \Rightarrow$

$J = \frac{a e^{at} \cos bt + b e^{at} \sin bt}{a^2 + b^2}$

№46 ч $J=\int \sin \ln t \, dt = \left| \begin{matrix} u=\sin \ln t, & dv=dt \\ du=\cos \ln t \cdot \frac{dt}{t}, & v=t \end{matrix} \right| \textcircled{=}$

$\textcircled{=} \ t \sin \ln t - \int \cos \ln t \, dt = \left| \begin{matrix} u=\cos \ln t, & dv=dt \\ du=-\frac{\sin \ln t}{t} dt, & v=t \end{matrix} \right| =$

$= t \sin \ln t - \left(t \cos \ln t + \int \sin \ln t \, dt \right) \Rightarrow$

$J = t \sin \ln t - t \cos \ln t - J \Rightarrow$

$J = \frac{t \sin \ln t - t \cos \ln t}{2} + C.$

№46 н $\int t^2 \operatorname{sh} t \, dt = \left| \begin{matrix} u=t^2, & dv=\operatorname{sh} t \, dt \\ du=2t\,dt, & v=\operatorname{ch} t \end{matrix} \right| =$

$= t^2 \operatorname{ch} t - 2\int t \operatorname{ch} t \, dt = \left| \begin{matrix} u=t, & dv=\operatorname{ch} t \, dt \\ du=dt, & v=\operatorname{sh} t \end{matrix} \right| =$

$= t^2 \operatorname{ch} t - 2\left(t \operatorname{sh} t - \int \operatorname{sh} t \, dt \right) =$

$= t^2 \operatorname{ch} t - 2t \operatorname{sh} t + 2 \operatorname{ch} t + C.$

№48 а) $\int t^7 e^{-t^2} dt = \left| \begin{matrix} t^2=y \\ 2t\,dt=dy \end{matrix} \right| = \frac{1}{2} \int y^3 e^{-y} dy =$

$= \left| \begin{matrix} u=y^3, & dv=e^{-y}dy \\ du=3y^2dy, & v=-e^{-y} \end{matrix} \right| = \frac{1}{2}\left(-y^3 e^{-y} + 3\int y^2 e^{-y} dy \right) =$

$= \left| \begin{matrix} u=y^2, & dv=e^{-y}dy \\ du=2y\,dy, & v=-e^{-y} \end{matrix} \right| = \frac{1}{2}\left(-y^3 e^{-y} + 3\left(-y^2 e^{-y} + 2\int y e^{-y} dy \right)\right) =$

$= \left| \begin{matrix} u=y, & dv=e^{-y}dy \\ du=dy, & v=-e^{-y} \end{matrix} \right| = \frac{1}{2}\left(-y^3 e^{-y} + 3\left(-y^2 e^{-y} + 2\left(-y e^{-y} + \int e^{-y} dy \right)\right)\right)$

$= \frac{1}{2}\left(-y^3 e^{-y} + 3\left(-y^2 e^{-y} + 2\left(-y e^{-y} - e^{-y} \right)\right)\right) + C$

$= -\frac{1}{2} e^{-y} \left(y^3 + 3y^2 + 6y + 6 \right) + C =$

$= -\frac{1}{2} e^{t^2} \left(t^6 + 3t^4 + 6t + 6 \right) + C.$

$\boxed{N48\,e)}$ $\int t e^t \cos t \, dt \overset{\circ}{=} \left| \begin{array}{l} u = t, \quad dv = e^t \cos t\, dt \\ du = dt, \quad v = \int e^t \cos t\, dt = \\ \qquad = \frac{1}{2} e^t (\cos t + \sin t) \end{array} \right|$

$\overset{\circ}{=} \frac{1}{2} t e^t (\cos t + \sin t) - \frac{1}{2} \int (e^t \cos t + e^t \sin t)\, dt \overset{\circ}{=}$

$\overset{\circ}{=} \left| \begin{array}{l} \boxed{N46\,л)} \\ Д/З \end{array} \int e^{at} \sin(bt)\, dt = \frac{e^{at}}{a^2+b^2} (b\cos(bt) - a \sin(bt)) + C \right| \overset{\circ}{=}$

$\overset{\circ}{=} \frac{1}{2} t e^t (\cos t + \sin t) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} e^t (\cos t + \sin t) + \frac{1}{2} e^t (\cos t - \sin t)\right) + C$

$= \frac{1}{2} t e^t (\cos t + \sin t) - \frac{1}{2} e^t \cos t + C$

$\boxed{N45\ a)}$ Знайти інтеграл Ньютона-Лейбніца

$I(x) = \int\limits_{x_0}^{x} \sqrt{1 - \sin 2t}\, dt.$

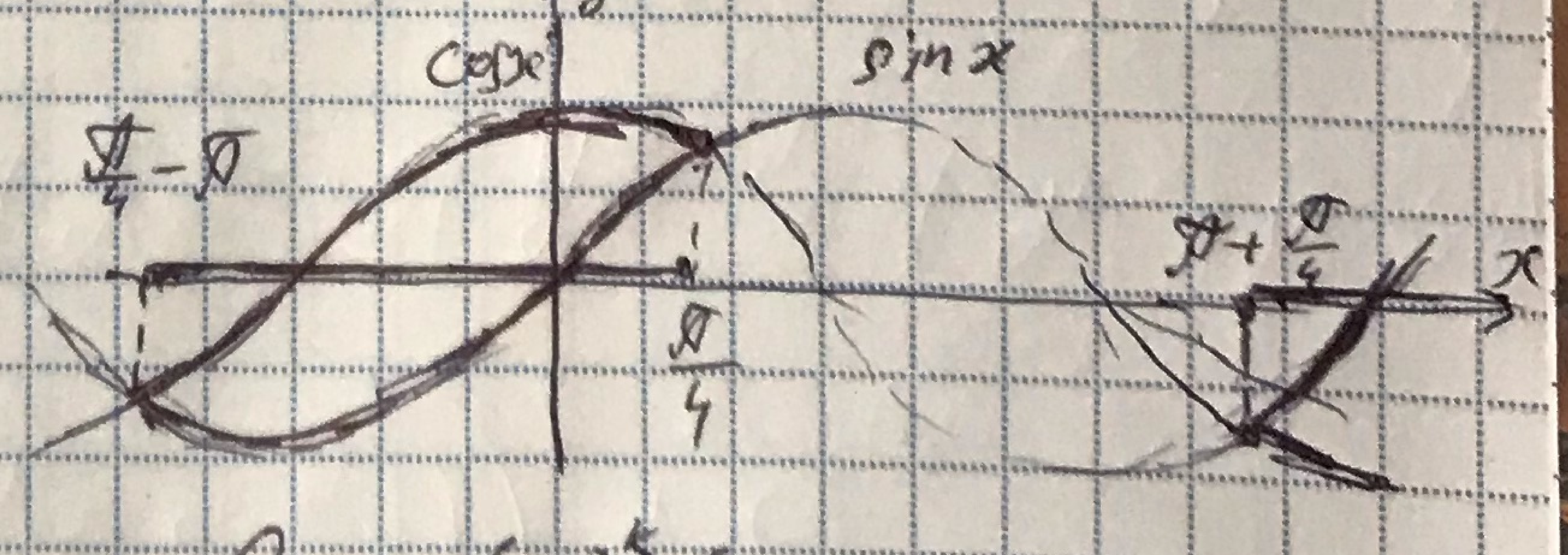
Розв'язок. Оскільки $\sqrt{1-\sin 2x} = \sqrt{(\cos x - \sin x)^2} =$

$= |\cos x - \sin x| = (\cos x - \sin x)\cdot \operatorname{sgn}(\cos x - \sin x)$, то

$$I(x) = \begin{cases} \vdots \\ -(\sin x + \cos x) + C_{-1}, & \frac{\pi}{4} - 2\pi \le x < \frac{\pi}{4} - \pi \\ \sin x + \cos x + C_0, & \frac{\pi}{4} - \pi \le x < \frac{\pi}{4} \\ -(\sin x + \cos x) + C_1, & \frac{\pi}{4} \le x < \frac{\pi}{4} + \pi \\ \vdots \\ (-1)^n (\sin x + \cos x) + C_n, & \frac{\pi}{4} + (n-1)\pi \le x < \frac{\pi}{4} + n\pi \\ \vdots \end{cases}$$

Оскільки первісна неперервна, то має виконуватися рівність:

$I\left(\frac{\pi}{4} + k\pi\right) = I\left(\frac{\pi}{4} + k\pi - 0\right)$, $k \in \mathbb{Z}$,



тобто $(-1)^{k+1}(\sin x_k + \cos x_k) + C_{k+1} = \lim\limits_{x \to x_k - 0} (-1)^k (\sin x + \cos x)$,

де $x_k = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

$\Rightarrow -\sqrt{2} + C_{k+1} = \sqrt{2} + C_k$. При $k=0$ $C_1 = 2\sqrt{2} + C_0$.

При $k=1$ $C_2 = 2\sqrt{2} + C_1 = 2\cdot 2\sqrt{2} + C_0 \Rightarrow$ За індукцією $C_n = 2\sqrt{2}\cdot n + C$, де $C = C_0$ — довільна константа.

Позбуваємось n у формулі для інтегралу:

$\frac{\pi}{4} + (n-1)\pi \le x < \frac{\pi}{4} + n\pi \Rightarrow n \le \frac{x - \pi/4 + \pi}{\pi} < n+1$

$\Rightarrow n = \left[\frac{x - \pi/4 + \pi}{\pi}\right]$

Відповідь: $I(x) = (-1)^{\left[\frac{x - \pi/4 + \pi}{\pi}\right]} (\sin x + \cos x) + 2\sqrt{2}\left[\frac{x - \pi/4 + \pi}{\pi}\right] + C.$

$\boxed{N45\ \text{е)}}$ Знайти інтеграл Ньютона-Лейбниця

$$I(x)=\int_{x_0}^{x}\frac{t^2+1}{t^4+1}\,dt$$

Розвʼязок. При $t\neq 0$ $\quad \dfrac{t^2+1}{t^4+1}\,dt=\dfrac{1+\frac{1}{t^2}}{t^2+1/t^2}\,dt=\dfrac{d\left(t-\frac{1}{t}\right)}{\left(t-\frac{1}{t}\right)^2+2}$.

Тоді $\displaystyle I(x)=\int\frac{d\left(t-\frac{1}{t}\right)}{\left(t-\frac{1}{t}\right)^2+2}=\frac{1}{\sqrt2}\operatorname{arctg}\frac{x-\frac{1}{x}}{\sqrt2}+\begin{cases}C_{-1} & \text{при } x<0\\ C_1 & \text{при } x>0\end{cases}$

$I(x)$ має бути неперервною, тоді має виконуватись умова: $I(-0)=I(+0)$, тобто $\dfrac{\pi}{2\sqrt2}+C_{-1}=-\dfrac{\pi}{2\sqrt2}+C_1$
$=C=I(0)$

Тоді $\quad C_{-1}=-\dfrac{\pi}{2\sqrt2}+C,\quad C_1=\dfrac{\pi}{2\sqrt2}+C\ \Rightarrow$

$$I(x)=\int_{x_0}^{x}\frac{t^2+1}{t^4+1}\,dt=\frac{1}{\sqrt2}\operatorname{arctg}\frac{x^2-1}{x\sqrt2}+\frac{\pi}{2\sqrt2}\operatorname{sgn}x+C,\quad x\neq0.$$

Д/З $\quad$ N46 ~~в)~~ г) л) и), с) т) ч), э)
N48 д) з)
N 45 г).